非紧空间上的连续函数空间

吴拿达[1]，杨忠强[2]
（1. 韩山师范学院数学与信息技术系，广东 潮州 521041;
2. 汕头大学数学系， 广东 汕头 515063）

摘要：对一个度量空间(X, d)，设↓C(X)是从 X 到 I=[0, 1]的连续函数下方图形全体之集赋予由度量空间 X×I 上的 Hausdorff 度量诱导出的拓扑. 如果(X, d) 是紧的, 则↓C(X)的拓扑结构已经清楚. 本文证明了下面的结果：如果(X, d) 是一个非紧的, 局部紧的,可分的, 其完备化是紧的度量空间, 则↓C(X) 同胚于 c0 当且仅当 X 上的孤立点全体之集在 X 中不稠密, 这里 c0={(x1, x2, …,xn…)∈[-1, 1]∞: xn→0(n→∞)}. 特别地,对赋予通常度量的开区间(0, 1), ↓C((0, 1)) 同胚于 c0.

关键词：拓扑; 连续函数; 非紧空间; Hausdorff 拓扑; 吸收子
中图分类号：O189.11

The spaces of continuous functions on noncompact spaces

Wu Nada[1], Yang Zhongqiang[2]
(1. Department of math and information technology, Hanshan Normal University, GuangDong ChaoZhou 521041;
2. Department of mathematics, Shantou Univerity, GuangDong ShanTou 515063)

Abstract: For a metric space(X, d), let↓C(X) be the family of regions below of all continuous maps from X to I=[0, 1] endowed with the topology induced by the Hausdorff metric of the metric space X×I . If (X, d) is compact, the topological structrue of ↓C(X) has been made clear. Let c0={(x1, x2, ⋯,xn⋯)∈[-1, 1]∞: xn→0(n→∞)}. In the present paper, the following result is proved: if (X, d) is a noncompact, locally compact, separable metric space and its completion is compact, then↓C(X) is homeomorphic to c0 if and only if the set of all isolated points of X is not dense in X. Specially, for the open interval (0, 1) with the usual metric, ↓C((0, 1)) is homeomorphic to c0.

Keywords: Topology; Continuous maps; noncompact spaces; Hausdorff topolgy; Absorber

0 引言

对一个 Tychonoff 空间 X 和实直线 R 的一个子空间 L, 设 C(X, L) 表示所有从 X 到 L 的连续函数之集. C(X, L) 能赋予各种不同的拓扑. 研究它们的拓扑结构是一个有意思的课题. 1966 年, M. I. Kadec 证明下面的定理:

定理 A. [1] 如果 X 是无限的紧度量空间而 L=I=[0, 1] 或L=R则$C_u(X, L)$ 同胚于（≈）希尔伯特空间 l_2，这里 $C_u(X, L)$ 是 C(X, L) 赋予一致收敛拓扑.

设 Q=[-1, 1]$^\infty$ 是希尔伯特空间，$\Sigma=\{(x_n)_{n\in N}\in Q:\sup\limits_{n\in N}|x_n|<1\}$ 和 c_0= $\{(x_n)_{n\in N}\in\Sigma:\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\}$是 Q 的子空间. 1991 年, 俄罗斯数学家证明了下面定理.

定理 B. [2] 如果 X是 一个可数的、非离散的度量空间，L=R 或 L=I则$C_p(X, L)\approx c_0$ 这里 $C_p(X, L)$表示 C(X, L) 赋予点态收敛拓扑.

设 C(X) 表示 C(X, I). 在[3]到[7]中, C(X) 被赋予另一种拓扑. 对一个度量空间 (X, d), 超空间 Cld (X) 是 X 的所有非空闭集赋予由 Hausdorff 度量 d_H 诱导出的拓扑. 其中

基金项目：中国国家自然科学基金 (No. 10971125)；教育部高等学校博士学科点专项科研基金(No. 20094402110001)
作者简介：吴拿达，（1981-），男，讲师，主要研究拓扑学. E-mail: ndwu@hstc.edu.cn

$$d_H(A,B)=\mathrm{Max}\{\mathrm{Sup}_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b),\mathrm{Sup}_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\} \tag{0.1}$$

对任意 $A, B\in \mathrm{Cld}(X)$. 若 X 是紧的, 则 d_H 是一个度量并诱导出 Cld (X)上的 Vietoris 拓扑. 对一个无界的度量空间 (X, d)， d_H 可能为无穷大，但仍生成 Cld (X) 上的一个拓扑，称为 Hausdorff 拓扑. 准确的说, 这个拓扑是由度量 $\mathrm{Min}\{1, d_H\}$生成的.

设(X，ρ)是一个度量空间. 对任意$(x_1,t_1),(x_2,t_2)\in X\times I$，令

$$d((x_1,t_1),(x_2,t_2))=\mathrm{Max}\{\rho(x_1,x_2),|t_1-t_2|\}. \tag{0.2}$$

d 是 $X\times I$上的一个度量. 用 USC(X) 表示从 X 到 I 的所有上半连续函数之集. 对每一个 $f\in \mathrm{USC}(X)$, 设$\downarrow f$ 表示f 的下方图形，即$\downarrow f=\{(x,t):(x,t)\in X\times I, t\le f(x)\}$，则$\downarrow f\in \mathrm{Cld}(X\times I)$. 故可以认为 $\downarrow\mathrm{USC}(X)=\{\downarrow f: f\in \mathrm{USC}(X)\}$和$\downarrow C(X)=\{\downarrow f: f\in C(X)\}$ 是（$\mathrm{Cld}(X\times I)$，d_H）的子空间. $\downarrow C(X)$可以看成 C(X)被赋予一种不同于前面两种拓扑的新拓扑(参 [3, 推论 1]).

设 $X_1\subset Y_1$， $X_2\subset Y_2$，用$(X_1, Y_1)\approx(X_2, Y_2)$表示空间对$(X_1, Y_1)$ 和 (X_2, Y_2)同胚, 即存在同胚 $h: X_1\to X_2$ 使得 $h(Y_1)=Y_2$.

对一个度量空间 X, 用 X_0 和 $\mathrm{cl}_X(\cdot)$ 分别表示 X 的所有孤立点之集和在 X 中取闭包的运算.

在 [7]中, 我们给出了下面的定理:

定理 C. 设 X 是紧度量空间, 则

$$(\downarrow\mathrm{USC}(X),\ \downarrow C(X))\approx\begin{cases}(I^{|X|},I^{|X|}) & \text{如果 X 是有限集;}\\ (Q,c_0) & \text{如果 } \mathrm{cl}_X(X_0)\neq X;\\ (Q,c_0\cup(Q\setminus\Sigma)) & \text{其它,}\end{cases}$$

这里 |X| 表示 X 的基数.

文献 [8] 考虑非紧的情况并证明了下面的定理.

定理 D. 如果 (X, ρ)是一个非紧的拓扑完备的度量空间且完备化是紧的则 $\mathrm{USC}(X)\approx l_2$ 。

文献[8]中, 提出了$\downarrow C(X)$的拓扑结构如何的问题. 本文主要证明下面的结果，从而给出该问题的部分答案.

定理 1. 如果 X 是一个非紧的，局部紧的，其完备化是紧的，可分的度量空间，则 $\downarrow C(X)\approx c_0$ 当且仅当 $\mathrm{cl}_X(X_0)\neq X$.

满足定理 1 条件的一个典型空间是赋予通常度量的开区间 (0, 1)，故有下面的推论.

推论 1. $\downarrow C((0, 1))\approx c_0$.

1 预备知识

下面所有空间都假设是可分度量空间.

定义 1. 一个空间 X 称为绝对收缩核(简记为 AR), 若对任意一个包含 X 为其闭子空间的空间 Y, X 都是 Y 的收缩核, 即存在一个连续函数 $r:Y\to X$ 使得 $r|_X=\mathrm{id}_X$.

定义 2. 空间 X 的一个闭子集 A 称为一个 *Z-集* 如果 id_X可以由一列从 X 到 X\A 的函数逼近. 一个空间中可数多 Z-集的并称为这个空间的一个 Z_σ-*集*. 用 Z(X) 和 $Z_\sigma(X)$ 分别表示 X 中所有 Z-集之集和所有 Z_σ-集之集. 如果一个嵌入的象是 Z-集则称它为一个 Z-

嵌入.

定义 3. 设 A 是空间 Y 的一个子集，若存在一个同伦 $h:Y\times I\to Y$ 使得 $h_0=id_Y$ 且对任意 $t>0$，$h_t(Y)\subset A$ 则称 A 在 Y 中同伦稠.

定义 4. 设 $\mathcal{M}_0$ 表示所有紧空间的类, 对一个拓扑空间类 $\mathcal{C}$, 令 $(\mathcal{M}_0, \mathcal{C}) = \{(Z, C): Z\in\mathcal{M}_0, C\in\mathcal{C}$ 且 $C\subset Z\}$. 设 (X, d) 与希尔伯特方体 Q 同胚. 设 Y 是 X 的子空间，如果对任意$(M, C)\in(\mathcal{M}_0, \mathcal{C})$, 对任意连续函数 f: $M\to X$，对任意使得 $f|_K:K\to X$ 是一个 Z-嵌入的 M 的闭子集 K，对任意$\varepsilon>0$, 存在一个 Z-嵌入 g: $M\to X$ 使得 $g|_K=f|_K$, $g^{-1}(Y)\backslash K=C\backslash K$ 且对任意 $m\in M$ 有 $d(g(m), f(m))<\varepsilon$ 则称 Y 在 X 中是*强$\mathcal{C}$-万有的* (*或说* (X, Y) *是强* $(\mathcal{M}_0, \mathcal{C})$-*万有的*).

定义 5. 设 $Y\approx Q$，$C\subset Y$, 称 C 是 Y 中的 $\mathcal{C}$-吸收子, 若 C 与 Y 满足如下条件:

(a) $C\in\mathcal{C}$;

(b) C 包含在 Y 的一个 Z_σ-集中;

(c) (Y, C) 是强 $(\mathcal{M}_0, \mathcal{C})$-万有的.

下面引理将在证明定理 1 中起到关键作用.

引理 1. [9, 定理 8.2][10] 如果 X 和 Y 都是$M\approx Q$的 $\mathcal{C}$–吸收子, 则 $(M, X)\approx(M, Y)$.

定义 6. 如果一个空间在任何包含其为子空间的空间中都是 $F_{\sigma\delta}$-集则称该空间为绝对 *$F_{\sigma\delta}$-空间*. 用 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ 表示所有 $F_{\sigma\delta}$-空间的类. 则 c_0 是 Q 中一个 $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -吸收子[11].

设ϕ: $A\to B$ 是集 A 到集 B 的一个映射. 若对空间 X 和 Y 有 $A\subset USC(X)$ 且/或 $B\subset USC(Y)$，定义相应的映射 $\downarrow\phi:\downarrow A\to\downarrow B$ 或$\downarrow\phi: A\to\downarrow B$ 或$\downarrow\phi:\downarrow A\to B$ 分别为$\downarrow\phi(\downarrow f)=\downarrow(\phi(f))$ 或 $\downarrow\phi(f)=\downarrow(\phi(f))$或 $\downarrow\phi(\downarrow f)=\phi(f)$.

2 定理 1 的证明

本节中我们总是假设 (X,ρ) 是一个非紧的, 局部紧的, 其完备化是紧的可分度量空间. $(\overline{X},\rho)$ 表示 X 的完备化. d 是 $\overline{X}\times I$上的一个度量，其定义如下：

对任意$(x_1,t_1),(x_2,t_2)\in\overline{X}\times I$， $d((x_1,t_1),(x_2,t_2))=\max\{\rho(x_1, x_2),|t_1-t_2|\}$.

定义映射 $\downarrow e$: $\downarrow USC(X)\to\downarrow USC(\overline{X})$ 如下： 对任意 $f\in USC(X)$，

$$e(f)(x)=\begin{cases} f(x) & x\in X \\ \lim\limits_{y\to x, y\in X} f(y) & x\in\overline{X}\backslash X \end{cases} \tag{2.1}$$

引理 2.$\downarrow e$ 的定义是好的且它是一个等距嵌入.

证明: 首先, $\downarrow e$ 的定义是好的, 即 $\downarrow e(f)\in\downarrow USC(\overline{X})$ 对任意 $f\in USC(X)$都成立. 要证 $\downarrow e(f)\in\downarrow USC(\overline{X})$, 须证明对任意 $x_0\in\overline{X}$ 和$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得对任意$\overline{X}$中满足$\rho(x, x_0)<\delta$ 的 x 都有 $e(f)(x_0)>e(f)(x)-\varepsilon$ 成立. 考虑下列两种情形:

情形 **1.** $x_0\in X$.

因为 $f\in USC(X)$, 所以存在$\delta>0$ 使得对任意$\overline{X}$中满足$\rho(x, x_0)<\delta$ 的x都有$e(f)(x_0)=f(x_0)>f(x)-\frac{\varepsilon}{2}=e(f)(x)-\frac{\varepsilon}{2}$成立. 对任意$\overline{X}\backslash X$ 中满足$\rho(x, x_0)<\delta$ 的x，存在一个序列 (x_n)

$_n\in X$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$， $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e(f)(x)$. 不失一般性，假设对任意 $n\in N$ 都有 $\rho(x_n, x_0)<\delta$. 因此 $e(f)(x_0)=f(x_0)>f(x_n)-\dfrac{\varepsilon}{2}$. 故 $e(f)(x_0)\ge e(f)(x)-\dfrac{\varepsilon}{2}>e(f)(x)-\varepsilon$.

情形 2. $x_0\in \overline{X}\setminus X$.

因为 $e(f)(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，故存在 $\delta>0$，使得对任意 X 中满足 $\rho(x, x_0)<\delta$ 的 x，都有 $e(f)(x_0)>f(x)-\dfrac{\varepsilon}{2}=e(f)(x)-\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立. 可仿照情形 1 的证明得：对任意 $x\in\overline{X}\setminus X$ 且 $\rho(x, x_0)<\delta$ 都有 $e(f)(x_0)>e(f)(x)-\varepsilon$.

其次，容易验证 $\downarrow e$ 是单射.

最后，验证 $d_H(\downarrow e(f_1),\downarrow e(f_2))=d_H(\downarrow f_1,\downarrow f_2)$ 对任意 f_1, $f_2\in USC(X)$都成立.

事实上，因为 $\downarrow e(f)=cl_{\overline{X}\times I}(\downarrow f)$ 对任意 $f\in USC(X)$都成立. 又因为对任意度量空间 X 及其可度量的子空间 Y，若 A, B 都是 Y 中的闭子集，则 $d_H(A, B)= d_H(cl_X(A), cl_X(B))$. 所以 $d_H(\downarrow e(f_1),\downarrow e(f_2))=d_H(\downarrow f_1,\downarrow f_2)$ 对任意 $f_1, f_2\in USC(X)$都成立. 证毕

下面当我们提到 $\downarrow USC(X)$ (或$\downarrow C(X)$)，总把其等同 $\downarrow e(USC(X))$(或$\downarrow e(C(X))$) ,即 $\downarrow USC(\overline{X})$的子空间.

引理 3. 若 $cl_X(X_0)=X$，则 $\downarrow C(X)$ 是一个 Baire 空间.

证明： 注意到 $\downarrow C(\overline{X})\subset\downarrow C(X)$ 而且在 $\downarrow C(X)$中稠密. 若 $cl_X(X_0)=X$，则 $cl_{\overline{X}}(X_0)=\overline{X}$. 由[3, 引理 3]，$\downarrow C(\overline{X})$是 Baire 空间，故$\downarrow C(X)$也是 Baire 空间. 证毕.

注： 注意到 c_0 不是 Baire 空间. 由引理 3，可知如果$\downarrow C(X)\approx c_0$ 则 $cl_X(X_0)\ne X$. 故要证明定理 1，只须证明若 $cl_X(X_0)\ne X$ 则$\downarrow C(X)\approx c_0$. 下面讨论中我们总假设 $cl_X(X_0)\ne X$.

由 X 满足的条件易知存在一列逐渐增大的 X 的开子空间 $(X_n)_n$ 使得 $X=\bigcup\limits_{n\in N} X_n$ 且 $cl_X(X_n)$ 是紧的. 令

$$\downarrow C_n(X)=\{\downarrow f\in\downarrow USC(X):\ f \text{ 在 } X_n \text{上一致连续}\}. \tag{2.1}$$

显然 $C(X)=\bigcup\limits_{n\in N} C_n(X)$. 因而，由下面引理可得 $\downarrow C(X)\in F_{\sigma\delta}$.

引理 4. $\downarrow C_n(X)$ 是一个绝对 $F_{\sigma\delta}$-集.

证明： 对$\varepsilon,\delta>0$，令

$$A(\varepsilon,\delta)=\{\downarrow f\in\downarrow USC(X):\ \text{对所有 } x, y\in X_n \text{且 } \rho(x, y)<\delta \text{ 有 } |f(x)-f(y)|\le\varepsilon\}. \tag{2.2}$$

则 $A(\varepsilon,\delta)$是$\downarrow USC(X)$的闭子集. 事实上，假设对任意 i， $\downarrow f_i\in A(\varepsilon, \delta)$ 且 $\downarrow f_i\to\downarrow f$ $(i\to\infty)$但$\downarrow f\notin A(\varepsilon, \delta)$，则存在 x, $y\in X_n$ 使得 $\rho(x, y)<\delta$ 但 $|f(x)-f(y)|>\varepsilon$. 因为$\downarrow f_i\to\downarrow f$ $(i\to\infty)$，故可选择(x_i, λ_i), $(y_i,\mu_i)\in\downarrow f_i$ 使得 $(x_i, \lambda_i)\to(x, f(x))$, $(y_i,\mu_i)\to(y, f(y))$ $(i\to\infty)$. 由 I 的紧性，可以假设 $f_i(x_i)\to\lambda$, $f_i(y_i)\to\mu$ $(i\to\infty)$，即 $(x_i, f_i(x_i))\to(x,\lambda)$，$(y_i, f_i(y_i))\to(y,\mu)$ $(i\to\infty)$. 一方面，因 $\downarrow f_i\to\downarrow f$ $(i\to\infty)$，故有 (x,λ), $(y,\mu)\in\downarrow f$. 因此 $\lambda\le f(x)$，$\mu\le f(y)$. 另一方面，因为 $f_i(x_i)\ge\lambda_i$，$f_i(y_i)\ge\mu_i$ 故 $\lambda\ge f(x)$，$\mu\ge f(y)$. 因此$\lambda=f(x)$，$\mu=f(y)$. 因而 $(x_i, f_i(x_i))\to(x, f(x))$, $(y_i, f_i(y_i))\to(y, f(y))$ $(i\to\infty)$.

因为

$|f(x)-f(y)|>\varepsilon$ 且 X_n 是开集，所以存在充分大的自然数 m 使得 x_m，$y_m\in X_n$ 且 $\rho(x_m, y_m)<\delta$ 但 $|f_m(x_m)-f_m(y_m)|>\varepsilon$. 这与 $\downarrow f_m\in A(\varepsilon,\delta)$矛盾. 故 $A(\varepsilon,\delta)$是$\downarrow$USC (X)的闭子集. 注意到下面的事实:

$$\downarrow C_n(X)=\bigcap_{k\in N}\bigcup_{m\in N}A\left(\frac{1}{m},\frac{1}{k}\right), \qquad (2.3)$$

可得 $\downarrow C_n(X)$ 是$\downarrow$USC (X)的一个 $F_{\sigma\delta}$-集. 由定理 D，$\downarrow USC(X)\approx l_2$(一个完备的度量空间)，结合 [12，定理 A.13.3]，命题得证.

引理 5. 若 $cl_X(X_0)\neq X$ 则 $\downarrow C(X)$ 是一个 Z_σ-空间.

证明: 因 $cl_X(X_0)\neq X$，可选择一个可数无限集 $D=\{d_1, d_2, \ldots\}$ 使得 $cl_X(D)=X\backslash X_0$. 对任意 $n, m\in N$，令

$$F_{n,m}=\{\downarrow f\in\downarrow C(X): f(d_n)\leq\frac{1}{m}\}. \qquad (2.4)$$

则 $F_{n,m}$ 是$\downarrow C(X)$ 的一个 Z-集. 事实上，易知 $F_{n,m}$ 是$\downarrow C(X)$的闭集. 此外，对任意 $n\in N$ 和任意连续函数 $\varepsilon:\downarrow C(X)\to(0, 1)$，由 [3，引理 4]，存在一个连续函数 $\downarrow\varphi_n:\ \downarrow C(X)\to\downarrow C(X)$ 使得对任意 $f\in C(X)$有

(a) $d_H(\downarrow f,\ \downarrow\varphi_n(f))<\varepsilon(\downarrow f)$;

(b) $\varphi_n(f)(d_n)=0$.

因此对任意 $n, m\in N$ 都有 $\downarrow\varphi_n\ (\downarrow C(X))\cap F_{n,m}=\varnothing$ 成立. 令

$$F=cl_{\downarrow C(X)}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}(\downarrow C(X)\backslash F_{nm}) \qquad (2.5)$$

则 F 也是$\downarrow C(X)$的一个 Z-集. 事实上，因为 $X\backslash cl_X(X_0)\neq\varnothing$，由 [3，引理 5]，我们只须验证对任意 $\downarrow f\in F$ 和 $a\in X\backslash cl_X(X_0)$ 都有 $f(a)=0$. 注意到对任意 $a\in X\backslash cl_X(X_0)$ 有 $g(a)=0$ 和 $\downarrow g\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}(\downarrow C(X)\backslash F_{nm})$. 设$\downarrow f\in F, a\in X\backslash cl_X(X_0)$，则存在$\delta>0$ 使得 $B(a,\delta)\subset X\backslash cl_X(X_0)$. 对任意 $\varepsilon\in(0,\delta)$，选择$\downarrow g\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}(\downarrow C(X)\backslash F_{nm})$ 使得 $d_H(\downarrow f,\ \downarrow g)<\varepsilon$. 则存在 $(x,\lambda)\in\downarrow g$ 使得 $d((x,\lambda), (a, f(a)))<\varepsilon$. 由 $\lambda\leq g(x)=0$ 可得 $f(a)<\varepsilon$. 故 $f(a)=0$.

最后，注意到$\downarrow C(X)=F\cup\bigcup_{n,m=1}^{\infty}F_{n,m}$，命题得证.

引理 6. $\downarrow C(X)$ 在 $\downarrow USC(\overline{X})$中同伦稠.

证明: 在 [3，引理 10]中证明了$\downarrow C(\overline{X})$ 在$\downarrow USC(\overline{X})$中同伦稠. 注意到$\downarrow C(\overline{X})\subset\downarrow C(X)$，故$\downarrow C(X)$也在$\downarrow USC(\overline{X})$中同伦稠.

推论 2. $\downarrow C(X)$ 是一个 AR.

证明:在 [13]中证明了对任意一个可分可度量空间 Y 和它的一个同伦稠子空间 A，Y 是 AR 当且仅当 A 也是 AR. 因此，由引理 6 和 定理 C 命题得证.

推论 3. 存在一个同伦 H: $\downarrow$USC($\overline{X}$)$\times$I $\rightarrow\downarrow$USC($\overline{X}$) 使得 H_0= $id_{\downarrow USC(\overline{X})}$，对任意 t>0 有 $H_t(\downarrow USC(\overline{X}))\subset\downarrow C(X)$, 且 $d_H(H(\downarrow f,\ t),\ \downarrow f\ )\ \le t$ 对任意 $f\ \in USC(\overline{X})$ 和 $t\in I$ 都成立.

证明. 由引理 6 和 [12, 命题 4.1.7]可得.

推论 4. 若 $cl_X(X_0)\neq X$ 则$\downarrow C(X)$包含在一个$\downarrow USC(\overline{X})$的 Z_σ-空间中.

证明: 由推论 3, $\downarrow C(X)$ 的一个闭集 A 是 $\downarrow C(X)$的 Z-集当且仅当 $cl_{\downarrow USC(\overline{X})}$ $(A)\in Z(\downarrow USC\ (\overline{X}))$. 由引理 5 和引理 6 命题可得.

引理 7. 若 X 非离散，则 $(\downarrow USC(\overline{X}),\downarrow C(X))$是强 $(\mathcal{M}_0,\ \mathcal{F}_{\sigma\delta})$-万有的.

证明: 因为 X 非离散, 故存在一个点 x_∞ 和 X 中的一个点列$(x_n)_{n\in N}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$.

设 Y 是一个紧度量空间, C, K 分别是 Y 的一个 $F_{\sigma\delta}$-子集和紧子集, $\Phi: Y\rightarrow USC(\overline{X})$ 是一个映射使得$\downarrow USC(\overline{X})$是连续的而 $\downarrow\Phi|_K$: $K\rightarrow\ \downarrow USC(\overline{X})$ 是一个 Z-嵌入. 由 [14. 引理 1.1] 和推论 2, 不失一般性, 设 $\downarrow\Phi(K)\cap\downarrow\Phi(Y\backslash\ K)=\varnothing$. 在 [6, 命题 1]的证明中, 证明了对任意的 $\varepsilon\in(0,\ 1)$, 存在一个映射 $\Psi: Y\rightarrow USC(\overline{X})$ 使得 $\Psi: Y\rightarrow\downarrow USC(\overline{X})$ 是一个 Z-嵌入, 且满足如下条件：

(1) $\Psi^{-1}(C(\overline{X}))\backslash K=C\backslash K$,

(2) $d_H(\downarrow\Psi(y),\ \downarrow\Phi(y))<\varepsilon$ 对任意 $y\in Y$ 都成立,

(3) 对任意 $y\in Y\backslash(C\cup K)$都有 $\Psi(y)$ 在 x_∞ 点连续.

因为 $x_\infty\in X$, 故对任意 $y\in Y\backslash(C\cup K)$有 $\Psi(y)\notin C(X)$. 因而 $\Psi^{-1}(C(X))\backslash\ K\subset C\backslash K$. 由 $C(\overline{X})\subset C(X)$ 和 $\Psi^{-1}(C(\overline{X}))\backslash K=C\backslash K$ 可得 $C\backslash K\subset\Psi^{-1}(C(X))\backslash K$. 故 $\Psi^{-1}(C(X))\backslash K=C\backslash K$. 因此, $\downarrow\Psi$ 即为所求，命题得证.

定理 1 的证明： 由引理 4, 可知 $\downarrow C(X)\in\mathcal{F}_{\sigma\delta}$. 因此由推论 4 和引理 7 可得 $\downarrow C(X)$ 满足定义 5 的条件. 由引理 1, $\downarrow C(X)\approx c_0$. 由引理 3 和它的注, 命题得证.

设 $s=(-1,1)^\infty$ 是 Q 的子空间. 我们最后提出下面问题：

问题 1. 对一个非紧的，局部紧的，完备化是紧的，可分的度量空间 X，是否有如下结论：$(\downarrow USC(X),\downarrow C(X))\approx(s,\ c_0)$当且仅当 $cl_X(X_0)\neq X$?

对一个非紧的，局部紧的，完备化是紧的，可分的度量空间 X，已知$(\downarrow USC(\overline{X}),\ \downarrow USC(X))\approx(Q,\ s)$， $(\downarrow USC(\overline{X}),\downarrow C(X))\approx(Q,\ c_0)$，但不能就此推出 $(\downarrow USC(X),\downarrow C(X))\approx(s,\ c_0)$.

实际上 $(Q^\infty,c_0^\infty)\approx(Q,c_0)$，$(Q^\infty,s^\infty)\approx(Q,s)$但 (s^∞,c_0^∞)不同胚于$(s,\ c_0)$(参[15]).

3 结论

在本文中, 我们主要证明了：如果 X 一个非紧的，局部紧的，完备化是紧的，可分的度量空间, 则 $\downarrow C(X)\approx c_0$ 当且仅当 $cl_X(X_0)\neq X$. 但不知道是否 $(\downarrow USC(X),\downarrow C(X))\approx(s,\ c_0)$.

另外当 $cl_X(X_0)=X$ 时，$\downarrow C(X)$的拓扑结构如何也是一个值得探讨的问题.

[参考文献] (References)

[1] Kadec M. I., On topological equivalence of separable Banach spaces[J]. Soviet Math.Dokl, 1966, 7: 319-322.

[2] Dobrowolski T., Marciszewski W., Mogilski J. On topopogical classification of function spaces Cp(X) of low Borel complexity [J]. Trans. Amer. Math. Soc. 1991, 678: 307-324.

[3] Yang Z Q. The hyperspace of the regions below of continuous maps is homeomorphic to c0[J]. Topoloy Appl.2006, 153: 2908--2921.

[4] Yang Z Q, Fan L L.The hyperspace of the regions below of continuous maps from the converging sequence[J].Northeast Math, J.,2006, 22(1): 45-54.

[5] Yang Z Q, Wu N D.The hyperspace of the regions below of continuous maps from S×S to I [J]. Questions and Answers in General Topology, 2008, 26: 29-39.

[6] Yang Z Q, Zhou X E. A pair of spaces of upper semi-continuous maps and continuous maps[J]. Topology Appl. 2007, 154:1737-1747.

[7] Van Mill J. The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces[M]. Amsterdam, North-Holland Math.Library 64, Elsevier Sci. Publ. B.V., 2001.

[8] Yang Z Q, Wu N D. A topological position of the set of continuous maps in the set of upper semicontinuous maps[J]. Science in China, Ser. A: Mathematics. 2009, 52(8): 1815-1828.

[9] 张永久，杨忠强. 非紧度量空间上的上半连续函数下方图形超空间[J].数学进展.2010,39(3):352-360

[10] Baars J., Gladdines H., Van Mill J.. Absorbing systems in infinite-dimensional manifold[J]. Topology Appl. 1993, 50: 147-182.

[11] Banakh T , Radul T, Zarichnyi M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds[J]. VNTL Publishers, Lviv, 1996, 72: 515-519.

[12] Dijkstra J J, Van Mill J., Mogilski J. The space of infinite-dimensional compacta and other topological copys of l2fw[J].Pacific.J.Math. Soc.,1992, 152: 255-273.

[13] Sakai K. The completions of metric ANR's and homotopy dense subsets[J]. J. Math. Soc. Japan, 2000, 52: 835--846.

[14] Bestvina M. Mogilski J. Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absoulte retracts[J]. Michigan Math. J.,1986, 33: 291-313.

[15] Cauty R, Dobrowolski T. Applying coordinate products to the topological identification of normed spaces[J]. Trans. Amer. Math. Soc. 1993, 337: 625–649.