基于牛顿多边形的曲线亏格公式

刘玲玲
北京航空航天大学数学与系统科学学院，北京(100191)
E-mail：linglingliu.2008@163.com

摘 要：曲线的亏格数是重要的双有理不变量，曲线的分类问题便由亏格数给出解答。本文给出了一种计算不可约曲线的亏格的新公式，通过给出一条不可约曲线所对应的牛顿多边形，可以建立单项式变换，因此利用单项式变换达到对曲线奇点的分解，并得到曲线亏格公式中所需的其他变量，这种算法能够更直观更快速的计算曲线的亏格。

关键词：代数曲线；亏格；单项式变换；牛顿多边形；分支点
中图分类号：O187

1. 引 言

代数曲线的分类问题是代数几何中一个最典型的研究问题，代数曲线中有一个拓扑不变量叫做曲线的亏格[1]，这是双有理不变量，并且它的值 g 均是非负整数。对于 g=0, 恰有一个双有理等价类，即有理曲线类（双有理等价于 P^1 的那些曲线）。对每个 $g\geq 1$，均存在双有理等价类的一个连续族，它们可以参量化为一个不可约代数簇。当 $g=1$ 时，这样的曲线叫做椭圆曲线。于是曲线的双有理分类问题可以由曲线的亏格数给出解答。每一条不可约曲线可以通过双有理变换转化为一条非奇异的曲线，这个过程就称为奇点的分解[2,3,4]。因为亏格数是双有理不变量[3,4,5]，因此任意一条有奇点的不可约曲线的亏格数就定义为它经过双有理变换得到的光滑曲线的亏格数。

解决代数曲线的奇点问题是早期代数几何的论题，已经有两种最常规的算法，Puiseux series 算法 [2,7]是牛顿利用他的牛顿多边形得出的一种算法，在这里牛顿多边形起到很大的作用，它的几何性质完全代表了跟它相关的代数曲线的奇点的特性。但是因为分数阶的多项式不可避免的将导致大量的重根的多分支，并且这种算法也不能解决更高维数变量的问题。

双有理变换[2,8]是由 Noether 引入的一种新算法，并且可应用于更高维的代数变量问题，然而这种算法太慢并且同牛顿多边形没有直接的联系，因此很难从解题过程中发现曲线的奇点的性质。

作为双有理变换的一种进步，单项式变换[6]出现于 1970s，并且被 Varchenko 应用于振荡积分。本文就是利用建立在牛顿多边形基础上的单项式变换对曲线的奇点进行分解，，将曲线转化为一条光滑曲线，同时得出曲线亏格的公式。

2. 牛顿多边形

在平面 $\pi=R^2$ 上建立直角坐标系 $\alpha o\beta$，其中 α 轴是水平从左向右，β 轴是垂直从下向上的，假设 $f=\sum\limits_{\alpha,\beta>0}A_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta$，$f\in C([x,y])$ 对每个 $A_{\alpha,\beta}\neq 0$ 中的 (α,β)，我们在直角坐标系中找到相应的点的坐标 (α,β)，因此，我们得到一个非负整数坐标的集合：$\Delta f=\{(\alpha,\beta)\,|\,A_{\alpha,\beta}\neq 0\}$。

为了得到一个多边形，它的所有顶点都是 $\Delta f=\{(\alpha,\beta)\,|\,A_{\alpha,\beta}\neq 0\}$ 里面的点，并且它的边是从坐标系的原点开始，并且还要让 Δf 的所有面在不同的半平面内，我们首先把 Δf 通过所有非负顶点的部分变形，我们得到集合：$\Delta' f=\Delta f+(R^+)^2$ 。下面考虑 $\Delta' f$

的凸包 $\overline{\Delta}f$ （$\overline{\Delta}f$ 是包含 $\Delta' f$ 的集合中最小的凸集合）$\overline{\Delta}f$ 的边由两条平行于坐标轴的半直线和一条多边形的边（可能退化为一个点组成）。这个多边形就被定义为 f 的牛顿多边形[2]。$\Delta f=\{(\alpha,\beta)\,|\,A_{\alpha,\beta}\neq 0\}$ 里面的点定义为牛顿多边形的顶点。下面我们给出牛顿多边形高的定义。

定义 2.1：设直线 $x+y=n(n\to\infty)$，从无穷远处靠近 f 的牛顿多边形，它总能与 $\Delta f=\{(\alpha,\beta)\,|\,A_{\alpha,\beta}\neq 0\}$ 中的点相交，它交 $\Delta f=\{(\alpha,\beta)\,|\,A_{\alpha,\beta}\neq 0\}$ 第一个顶点 (a_k,b_k)，记 $a_k+b_k=d$ 为牛顿多边形的阶。

一个单项式 $x^a y^b$ 的牛顿多边形就是简单的一个以（a, b）为顶点的象限，而一个多项式 $x^3y+xy^3-2y^4$ 的牛顿多边形就是 $\{(x,y)\in R^2\,|\,x\geq 0,y\geq 0,x+y\geq 4\}$ ，它的阶 $d=4$。

3. 单项式变换

任何一个牛顿多边形的边界总是包含两个非紧致面，这两个面都是平行于坐标轴。

一个牛顿多边形的紧的或非紧的面总是满足方程 $mx+ny=p$ 记为 $[mx+ny=p]$，其中 $m,n\in N\cup\{0\}$，并且如果 $mn\neq 0$，$(m,n)=1$。

牛顿多边形的所有面通过次数的递增分类并排序，记为 $L_k=[m_kx+n_ky=p_k]$，（$1\leq k\leq p$），特别的我们令 $L_1=[x=p_1]$ 和 $L_\rho=[y=p_\rho]$。

建立在牛顿多边形的两个相邻面的基础上，考虑单项式变换[6] T_k，从 (X_k,Y_k) 平面到 (x,y) 平面，

$$T_k:\begin{cases}x=X_k^{m_k}Y_k^{m_{k+1}}\\ y=X_k^{n_k}Y_k^{n_{k+1}}\end{cases},\quad T_k^{-1}:\begin{cases}X_k=x^{n_{k+1}}/y^{m_{k+1}}\\ Y_k=y^{m_k}/x^{n_k}\end{cases}\qquad (1)$$

为了得到 T_k^{-1}，我们假设 $xy\neq 0$，因此，T_k 为一一映射。

设 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),......(a_k,b_k),(a_{K+1},b_{k+1}).......$ 是牛顿多边形的顶点，如果牛顿多边形的一些顶点落在同一个面上，比如 $(a_i,b_i),(a_{i+1},b_{i+1})........(a_k,b_k)$ 在同一条面 L_k 上，令 (m_k,n_k) 和 (m_{k+1},n_{K+1}) 分别与 $(a_i,b_i),(a_{i+1},b_{i+1})........(a_k,b_k)$ 做内积，得到 $(m_ka_i+n_kb_i,m_{k+1}a_i+n_kb_i),.......,(m_ka_k+n_kb_k,m_{k+1}a_k+n_{K+1}b_k)$ 在这些实数对中，一定存在一个 $(m_ka_l+n_kb_l,m_{k+1}a_l+n_kb_l)=(p_k,p_{k+1})$，其中 $L_k=[m_kx+n_ky=p_k]$ 和 $L_{k+1}=[m_{k+1}x+n_{k+1}y=p_{k+1}]$ 是牛顿多边形的两个相邻的面，

令 $(m_ka_i+n_kb_i,m_{k+1}a_i+n_kb_i),.......,(m_ka_k+n_kb_k,m_{k+1}a_k+n_{K+1}b_k)$ 同时与 (p_k,p_{k+1}) 做差，得到一列新的实数对，也就是一个新的多项式，即 $p(x,y)=X_k^{p_k}Y_k^{p_{k+1}}p_1(X_k,Y_k)$，其中

$$p_1(X_k,Y_k)=C_k+\sum_{(\alpha,\beta)\in l_k}C_{\alpha\beta}Y_k^{l_{\alpha\beta}}+\sum_{(\alpha,\beta)\in l_{k+1}}C_{\alpha\beta}X_k^{\overline{l}_{\alpha\beta}}+\sum C_{\delta\gamma}X_k^{m_k\delta+n_k\gamma-p_k}Y_k^{m_{k+1}\delta+n_{k+1}\gamma-p_{k+1}}$$

由于牛顿多边形的凸性，因为 $(\delta,\gamma)\notin L_k\cup L_{k+1}$，所以 $m_k\delta+n_k\gamma-p_k>0$，$m_{k+1}\delta+n_{k+1}\gamma-p_{k+1}>0$。$p_1(X_k,Y_k)$ 即为 $p(x,y)$ 经过一次单项式变换得到的新的曲线的方程。下面我们给出它的定义：

定义 3.1：定义 $p_1(X_k,Y_k)$ 为 $p(x,y)$ 的一个局部变换，以上通过单项式变换得到的因式就被称作一个奇点的局部分解[6]。

注：一个牛顿多边形的任意两个相邻的面都能诱导出一个单项式变换，因此都会得到一个局部分解 。

接着我们求直线 X=0 与新的曲线方程 $p_1(X_k,Y_k)$ 的交点，即将 X=0 代入 $p_1(X_k,Y_k)$，这样我们得到以下的多项式。

定义 3.2：一个恰当多项式[6]是一个单变量多项式，它包含这个单变量的所有单项式且包括常数项。

在以上的变换中，关于 Y 的恰当多项式是 $c+\sum_{(\alpha,\beta)\in L_k} C_{\alpha,\beta}Y^{l_{\alpha\beta}}=Q(Y)\prod_j (Y-r_j)^{h_j}$ (2)

其中 $Q(Y)$ 是复数域上的一个非零常数，或者是一个不可约二次多项式，r_j 是这个恰当多项式的根，h_j 为它的重数，同样的，我们有关于 X 的恰当多项式是

$$c+\sum_{(\alpha,\beta)\in L_{k+1}} C_{\alpha,\beta}X^{\bar{l}_{\alpha\beta}}=\tilde{Q}(X)\prod_i (Y-s_i)^{h_i}$$

定义 3.3：每一个关于 Y 的恰当多项式的根 r_j，对应 (X,Y) 平面上的一个点 $(0,r_j)$，在这个点处，局部单项式变换是惟一的，定义 $(0,r_j)$ 作为 $(0,0)$ 点在 (x,y) 平面上的分支点。对于 $(s_i,0)$ 定义是相同的。

而一条直线与曲线交点的重数就是恰当多项式根的重数即定义为分支点的重数[5]。Noether 所定义的曲线亏格公式，是通过无限邻近点的重数给出的，而我们的分支点与无限邻近点有相同的意义。这样我们就通过单项式变换将一个奇点分解为了多个分支点。

为了继续研究 $P_1(X,Y)$ 在分支点 $(0,r_j)$ 处的奇异性，我们把（2）式代入 $P_1(X,Y)$，并作坐标平移使它变为 $\tilde{P}_1(X,Y-r_j)=P_1(X,(Y-r_j)+r_j)$。

定义 3.4：把上面 $P_1(X,Y)$ 经过坐标平移得到的 $\tilde{P}_1(X,Y-r_j)$ 定义为在分支点 $(0,r_j)$ 的一个降次变换，它的推导过程作为对支点 $(0,r_j)$ 的奇异性的局部降次[6]。

我们在(X, Y-r_j)平面的原点(0, 0)处建立多项式 $\tilde{P}_1(X,Y-r_j)$ 的牛顿多边形，在这个牛顿多边形的基础上接着进行单项式变换，这样就是重复进行论文第二部分的局部分解，因此我们得到新的 $P_2(X,Y)$ 和新的恰当多项式 $\mathrm{H}_2(Y)$ 和分支点 r_{2j}，然后在分支点 $(0,r_{2j})$ 处进行降次变换依次进行下去，直到第 N 步，同样的我们得到 $P_N(X,Y)$，和它所对应的恰当多项式 $\mathrm{H}_N(Y)$ 以及分支点 r_{Nj}，这样我们就得到一系列的分支点

$(0,r_{11}),(0,r_{12}),\ldots\ldots(0,r_{21}),\ldots\ldots(0,r_{N1}),\ldots\ldots$ 。

在上面的过程下，通过在新的分支点，重复进行局部分解和局部降次变换，这些分支点在 (x,y) 平面上形成一棵“树”，在第二部分我们用的下标 k 不同，在同一“层”的变换下就会有不同的“树”的分支。这样我们选择“树”的一条路，即从“树”的第一“层”的第一个分支点一直到它的最好一个分支点，也就是我们上面重复进行的过程，因此我们用下标 t 来代表不同的层。

已经证明了对于“树”中的任何一条“路”，总存在 $N \in ¥$，使得 $P_N(X,Y)=[Y-r(X)]^h E(X,Y-r)$，[6]

这里 $E(X,Y-r)$ 是非奇异的，且 $E(0,0)\neq 0$，$r(X)$ 是一个收敛的序列且 $r(0)\neq 0$ 或者为一个非零常数。

这样我们就知道了任何任意一条不可约曲线 $f=0$ 总可以经过有限步的单项式变换转化为一条光滑的射影曲线。

4. 亏格公式

任意一条光滑射影曲线的亏格数[1,2]为：$p(c)=\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$，其中 d 为光滑曲线牛顿多边形的阶。

一条不可约曲线 C 经过奇点分解得到的 $\tilde{C}$ 是一条光滑曲线，每经过一次这样的奇点分解，曲线的亏格数就减少 $\frac{1}{2}r(r-1)$ [1]，r 为无限邻近点重数，因此知道了 $\tilde{C}$ 的牛顿多边形的阶和曲线的奇点经过单项式变换得到的分支点的重数，就得出了 C 的亏格数。因此我们得到计算一条不可约曲线的亏格公式：

设 C 为一条不可约曲线，$p_1, p_2, ...p_s$ 为曲线的奇点，则计算曲线 C 的亏格公式为：

$$p(C)=\frac{d(d-3)}{2}+1-\frac{1}{2}\sum_k\sum_t h_{kt}(h_{kt}-1)$$

其中 d 为曲线 C 所对应的牛顿多边形的阶，h_{kt} 为 $p_1, p_2, ...p_s$ 经过变换得到的分支点的重数，这里的求和是对每一“层”，每一条“路”上的分支点，并且不包括最初的奇点。

注：每一个奇点 p 的重数总是等于它经过变换后得到的分支点 $p_1, p_2, ...p_s$ 的重数之和，因此每一“层”上的分支点的重数总可以表示成它下一“层”的分支点重数和，因此我们的亏格公式可由最后一层的分支点的重数来计算。

5. 结论

本文给出了建立在曲线牛顿多边形基础上的单项式变换，并利用单项式变换达到对曲线奇点的分解，从而得到亏格公式中所需的其他变量，因此给出了一条不可约曲线在单项式变换基础上的亏格公式。

参考文献

[1] R.哈茨霍恩著.冯克勤，刘木兰，胥鸣伟译.《代数几何》.[M]北京科学出版社.（2001.7）27-458

[2] E.Brieskorn and H.Kn&rrer. Plane algebraic curves .[M]Birkh&userVerlag.Basel.（1986）477—589

[3] R.Walker .Algebraic curves .[M]Princeton Mathematical Series 13Princeton University Press and Oxford University Press. Princeton,N.J.（1950）245-367

[4] E.Casas-Alvero .Singularities of plane curves .[M]Eduardo Casas-Alvero

[5] B.L.范德瓦尔登著.李培谦，李乔译.《代数几何引论》(第二版).[M]北京科学出版社.（2008）221-223

[6] Sheng-MingMa. A fast algorithm for curve singularities .in Math.Soc . [J]Auatralia.Vol.69 （2004）.403-414

[7] D.Chudnovsky and G.Chudnovsky .On expansion of algerbraic functions in power and Puiseux seriesI .[J].Complexity2.（1986）

[8] W.Fulton .Algebraic curves ,Mathematics [J]Lecture Note Series .W.A. Benjamin .In New York.Amsterdam.（1969）

The new genus formula of a curve based on the Newton polygon

Liu ling ling
LMIB and Department of Mathematics, BUAA University, Beijing, PRC, (100191)

Abstract

The genus of a curve is an important birational invariants ,the solution of curves' classification is by the genus .We demonstrate a new formula for the genus of an irreducible curve ,by the Newton polygon of an curve ,we can establish monomial transform , so as to resolve the singularity of a curve ,and we obtain the other invariants of the genus , so we can get the genus of a curve more visual and quickly .

Keywords: algebraic curve ; genus ; monomial transform ; Newton polygon ;branch point