模糊库存理论的结构元算法及应用

曹绪，张雷，刘红星
辽宁工程技术大学理学院，辽宁阜新 （123000）
E-mail：caoxucx2009@163.com

摘要：对于一个企业来说，一个好的存储策略，可以节约资金，以获得最大利润。本文陈述的是企业经营管理中应用最广泛的库存理论方法，求其产品的最佳存储量，使其总费用最小。并分析了在需求速度或者是订购费为模糊数下的最佳存储量的计算，最后引用了结构元的算法，推导出了最佳存储量隶属函数的表达式，使其模糊库存理论的研究更加简单。

关键词：隶属函数；模糊结构元；模糊库存理论

中图分类号：0227

1 引 言

人们在生产和日常生活活动中往往将所需的物资、用品和食物暂时的存储起来，以备将来使用或消费。人们在供应和需求这两个环节之间加入存储这一环节，就能起到缓解供应与与需求之间的不协调，库存理论就是利用运筹学的方法找到最合理 、最经济的存储问题。库存理论有确定性存储模型、随机性存储模型等种类，本文只陈述确定性存储模型中的一种，即模型假设允许缺货且生产时间很短。随着时间的推移，不管是什么样的储存物品，订购费用、实际的需求速度都有可能发生变化，因此模糊库存理论也渐渐的发展起来，得到了广泛的应用。

在以往研究模糊库存理论时, 模糊数的运算是基于扩张原理的。但在利用扩张原理时, 最困难的是其遍历性形式, 即对元素遍历某个条件所对应的全体结果进行运算, 或取 λ 遍历 [0, 1]所对应的全体结果的并运算, 这就使得模糊数的运算复杂化了。本文将引入结构元的方法, 简化了模糊库存理论中模糊变量运算结果的隶属函数的表达过程，使其运算更加简单、方便。

2 经典库存理论方法简介

在日常生活中，与存储量有关的问题，需要人们作出抉择，在长期实践中人们摸索到一些规律，也积累了一些经验。专门研究这类有关存储问题的科学，构成运筹学的一个分支，叫作存储论，也称库存论。

确定性存储模型—允许缺货，备货时间很短[3]

假设：

（1）缺货费用很小；

（2）当存储降至零时，还可以在等一段时间在订货；

（3）需求是连续的、均匀的，设需求速度 R（单位时间的需求量）为常数，则 t 时间的需求量为 Rt；

（4）每次订货量不变，订购费不变（每次备货量不变，装配费不变）；

（5）单位存储费不变。

设 单位时间单位物品存储费用为 C_1，每次订购费为 C_3，缺货费为 C_2（单位缺货损失），R 为需求速度。求最佳存储策略，使平均总费用最小。（如图 2-1）

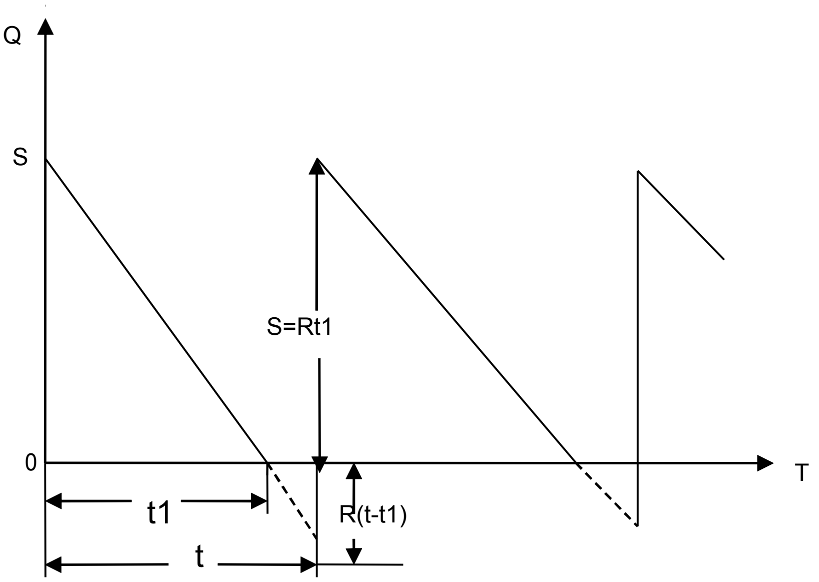

图 2-1 经典库存理论图

假设最初存储量为S，可以满足t_1时间的需求，t_1时间的平均存储量为$\frac{1}{2}S$，在（$t-t_1$）时间的存储为零，平均缺货量为$\frac{1}{2}R(t-t_1)$。由于S仅能满足t_1时间的需求$S=Rt_1$，有$t_1=S/R$.

在t时间内所需存储费 $$\frac{1}{2}C_1St_1=\frac{1}{2}C_1\frac{S^2}{R} \qquad (2\text{-}1)$$

在t时间内的缺货费 $$\frac{1}{2}C_2R(t-t_1)^2=\frac{1}{2}C_2\frac{(Rt-S)^2}{R} \qquad (2\text{-}2)$$

平均总费用

$$C(t,s)=\frac{1}{t}[C_1\frac{S^2}{2R}+C_2\frac{(Rt-S)^2}{2R}+C_3] \qquad (2\text{-}3)$$

利用多元函数求极值的方法求$C(t,S)$的最小值[4]。

$$\frac{\partial C}{\partial S}=\frac{1}{t}[C_1\frac{S}{R}-C_2\frac{Rt-S}{R}]=0$$

$$R\neq 0,t\neq 0,C_1S-C_2(Rt-S)=0$$

$$S=\frac{C_2Rt}{C_1+C_2} \qquad (2\text{-}4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{1}{t^2}[C_1\frac{S^2}{2R}]+C_2\frac{(Rt-S)^2}{2R}+C_3]+\frac{1}{t}[C_2(Rt-S)]=0$$

消去S得

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3(C_1+C_2)}{C_1RC_2}} \tag{2-5}$$

$$S_0=\sqrt{\frac{2C_2C_3R}{C_1(C_1+C_2)}} \tag{2-6}$$

将（2-4）式和（2-5）式代入$C(t,s)$得出最假费用

$$\min C(t,S)=C_0(t_0,S_0)=\sqrt{\frac{2C_1C_2C_3R}{C_1+C_2}} \tag{2-7}$$

3 模糊数与模糊结构元运算

3.1 模糊数

定义 1[5]：设$\underset{\sim}{A}\in F(X)$，若至少存在$x\in X$，使得$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=1$，则称$\underset{\sim}{A}$是正规的。

定义 2：设$\underset{\sim}{A}\in F(R)$，（$R$为实数域)，若对任意实数$x<y<z$都有

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(y)\geq\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{A}}(z)$，则称$\underset{\sim}{A}$为凸函数集。

定义 3：实数域R的正规凸模糊集叫做模糊数。

3.2 模糊结构元

定义 5：设E为实数域 R 上的模糊集，隶属函数记为$E(x)$，$x\in$R．如果$E(x)$满足下述性质[6]：

(1) $E(0)=1$；

(2) 在区间$[-1,0)$上$E(x)$是单增右连续函数，在区间$(0,1]$上是单降左连续函数；

(3) 当$-\infty<x<-1$或者$1<x<+\infty$时，$E(x)=0$。

则称模糊集E为 R 上的模糊结构元。

若模糊结构元E满足：（1）对于$\forall x\in(-1,1)$, $E(x)>0$;（2）在区间$[-1,0)$上$E(x)$是连续且严格单调增的，在区间$(0,1]$上是连续且严格单调降的，称E为正则模糊结构元。若

$E(x)=E(-x)$，称E为对称结构元。

例 1 设模糊集E具有隶属函数

$$E(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-1,0]\\ 1-x, & x\in(0,1]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

称其为三角结构元，隶属函数图形如图 7 所示。

例 2 设模糊集E具有隶属函数

$$\mathrm{E}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

称其为矩形结构元，隶属函数图形如图 8 所示。

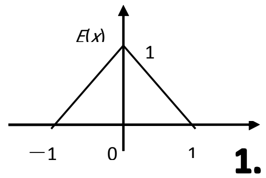

图 4-1 三角结构元

Fig.4-1 Triangle structuring element

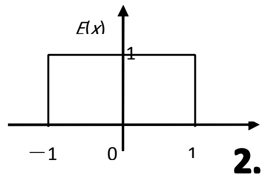

图 4-2 矩形结构元

Fig.4-2 Rectangle structuring element

如果结构元的隶属函数是关于纵坐标轴 $x = 0$ 对称的，则叫做对称模糊结构元。通常，模糊结构元可以是不对称的。

3.3 模糊数与模糊结构元间的关系

定理 1：假设 E 是某结构元，$f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的单调函数，则 $f(E) = \tilde{A}$ 是模糊数，并且 $\mu_{\tilde{A}}(x) = E(f^{-1}(x))$。

定理 2[1]：任给一个模糊数和结构元，一定能找到一个单调函数 $f(x)$，使 $f(E) = \tilde{A}$，即模糊数与单调函数是一一对应的。

定义 6：设 E 是给定的结构元，若 $\tilde{A} = f(E) = a + bE$，则称 $\tilde{A}$ 是线性生成的模糊数。

3.4 模糊数加法的结构元算法

定义 7[5]：设 E 是某结构元，$\tilde{A}$、$\tilde{B}$ 是两个有界的模糊数，且 $\tilde{A} = f(E)$，$\tilde{B} = g(E)$。其中，f 和 g 均为[-1，1]上的同序单调函数，则

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}} = E((f+g)^{-1}(x)) \qquad (3\text{-}1)$$

例：假设 $\tilde{A} = a_1 + b_1 E$，$\tilde{B} = a_2 + b_2 E$ 则

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + b_1 E) + (a_2 + b_2 E) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)E = a + bE$$

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = E(\frac{x-a}{b})$$

3.5 模糊数乘法的结构元算法

定理 3[7]： 设 E 是对称模糊结构元，$\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 都是正模糊数，其结构元表示为 $\tilde{A} = f(E)$，$\tilde{B} = g(E)$，这里 f 和 g 是[-1,1]上两个同序单调函数(不妨假定都是单调增函数)，对于两个模糊数的乘法运算有

$$\tilde{A}\cdot\tilde{B}=f(E)\cdot g(E)=[f\cdot g](E),$$

具有隶属函数

$$\mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{B}}(x)=E[(f\cdot g)^{-1}(x)] \tag{3-2}$$

设由结构元线性生成的模糊数为 $\tilde{A}=a_1+b_1E,\tilde{B}=a_2+b_2E$。令

$$f(x)=a_1+b_1x,\qquad g(x)=a_2+b_2x,$$

则

$$f(x)\cdot g(x)=(a_1+b_1x)\cdot(a_2+b_2x)=y,$$

即 $b_1b_2x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+(a_1a_2-y)=0$。利用二次方程的求根公式[2]，解出

$$x=\pm\sqrt{\frac{y-a_1a_2}{b_1b_2}+\left(\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2b_1b_2}\right)^2}-\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2b_1b_2} \tag{3-3}$$

由于 $(f\cdot g)^{-1}(x)$ 是单调增函数，因此，根号项应取正值，于是有

$$(f.g)^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x-a_1a_2}{b_1b_2}+\left(\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2b_1b_2}\right)^2}-\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2b_1b_2} \tag{3-4}$$

4 具有模糊参数的最佳存储量的计算

4.1 需求速度为模糊数的最佳存储量的计算

设需求速度 $\tilde{R}$ 为结构元 E 生成的模糊数，记 $\tilde{R}=v_0+\Delta\cdot E$（$v_0>\Delta>0$），于是，由经典库存模型中最佳存储策略公式，有

$$\tilde{S}=\sqrt{\frac{2C_2C_3\tilde{R}}{C_1(C_1+C_2)}} \tag{4-1}$$

由模糊数的结构元表示定理可得出，需求速度 $\tilde{R}$ 的隶属函数为 $\mu_{\tilde{R}}(x)=E\left(\frac{x-v_0}{\Delta}\right)$.

记 $y=f(x)=\sqrt{\frac{2C_2C_3x}{C_1(C_1+C_2)}}$，$f^{-1}(x)=\frac{C_1(C_1+C_2)}{2C_2C_3}x^2$。由 $\tilde{S}=f(\tilde{R})$，则

$$\mu_{\tilde{S}}(x)=\mu_{\tilde{R}}(f^{-1}(x))=E\left(\frac{f^{-1}(x)-v_0}{\Delta}\right)=E\left(\frac{C_1(C_1+C_2)x^2}{2C_2C_3\Delta}-\frac{v_0}{\Delta}\right) \tag{4-2}$$

为计算简便，记 $\alpha=\frac{C_1(C_1+C_2)}{2C_2C_3\Delta}$，$\beta=\frac{v_0}{\Delta}$，则 $\mu_{\tilde{S}}(x)=E(\alpha x^2-\beta)$。如果取三角

结构元E，其隶属函数为$E(x)=\begin{cases}1+x & , \quad x\in[-1,0]\\ 1-x & , \quad x\in(0,1]\\ 0 & , \quad 其它\end{cases}$

则

$$\mu_{\tilde{S}}(x)=E(\alpha x^2-\beta)=\begin{cases}1+\alpha x^2-\beta & , \quad -1\le\alpha x^2-\beta\le 0\\ 1+\beta-\alpha x^2 & , \quad 0<\alpha x^2-\beta\le 1\\ 0 & , \quad 其它\end{cases} \tag{4-3}$$

由$-1\le\alpha x^2-\beta\le 0$可得$\sqrt{(\beta-1)/\alpha}\le x\le\sqrt{\beta/\alpha}$；由$0\le\alpha x^2-\beta\le 1$可得$\sqrt{\beta/\alpha}\le x\le\sqrt{(\beta+1)/\alpha}$。于是，在需求速度为模糊数$\tilde{R}=\nu_0+\Delta\cdot E$的情况下的库存模型中经济批量$\tilde{Q}$为模糊数，其隶属函数为

$$\mu_{\tilde{S}}(x)=\begin{cases}1+\alpha x^2-\beta & , \quad \sqrt{(\beta-1)/\alpha}\le x\le\sqrt{\beta/\alpha}\\ 1+\beta-\alpha x^2 & , \quad \sqrt{\beta/\alpha}\le x\le\sqrt{(\beta+1)/\alpha}\\ 0 & , \quad 其他\end{cases} \tag{4-4}$$

4.2 需求速度和订购费均为模糊数的最佳存储量的计算

设需求速度与订购费均为结构元E线性生成的模糊数，分别记为$\tilde{R}=\nu_0+\Delta\cdot E$，$\tilde{C}_3=a+b\cdot E$，其中有限实数$\nu_0>\Delta>0, a>b>0$．则由经典库存模型中最佳存储量的计算公式有$\tilde{S}=\sqrt{2C_2\tilde{C}_3\tilde{R}/C_1(C_1+C_2)}$。

设 $\tilde{M}=\tilde{C}_3\cdot\tilde{R}$，于是，可得隶属函数

$$\mu_{\tilde{M}}(x)=E\left(\sqrt{\frac{x-a\nu_0}{b\Delta}+\left(\frac{b\nu_0+a\Delta}{2b\Delta}\right)^2}-\frac{b\nu_0+a\Delta}{2b\Delta}\right) \tag{4-5}$$

记$y=f(x)=\sqrt{2C_2x/C_1(C_1+C_2)}$，$f^{-1}(x)=\dfrac{C_1(C_1+C_2)}{2C_2}x^2$。则$\tilde{S}=f(\tilde{M})$，得出

$$\mu_{\tilde{S}}(x)=\mu_{\tilde{M}}(f^{-1}(x))=E\left(\sqrt{\frac{f^{-1}(x)-a\nu_0}{b\Delta}+\left(\frac{b\nu_0+a\Delta}{2b\Delta}\right)^2}-\frac{b\nu_0+a\Delta}{2b\Delta}\right)$$

$$=E(\sqrt{\frac{\frac{C_1(C_1+C_2)x^2}{2C_2}-2a\nu_0}{2b\Delta}+(\frac{b\nu_0+a\Delta}{2b\Delta})^2}-\frac{b\nu_0+a\Delta}{2b\Delta}) \tag{4-6}$$

为了表述上的简便，记 $\alpha=\dfrac{C_1(C_1+C_2)}{4bC_2\Delta}$， $\beta=\dfrac{av_0}{b\Delta}$， $\gamma=\dfrac{bv_0+a\Delta}{2b\Delta}$ 。则

$$\mu_{\tilde{S}}(x)=E(\sqrt{\alpha x^2-\beta+\gamma^2}-\gamma)$$

如果取三角结构元可得

$$\mu_{\tilde{S}}(x)=\begin{cases}1+\sqrt{\alpha x^2-\beta+\gamma^2}-\gamma & ,\quad -1\le\sqrt{\alpha x^2-\beta+\gamma^2}-\gamma\le 0\\ 1+\gamma-\sqrt{\alpha x^2-\beta+\gamma^2} & ,\quad 0\le\sqrt{\alpha x^2-\beta+\gamma^2}-\gamma\le 1\\ 0 & ,\quad \text{其它}\end{cases} \tag{4-7}$$

由 $-1\le\sqrt{\alpha x^2-\beta+\gamma^2}-\gamma\le 0$，解出 $\sqrt{\dfrac{1-2\gamma+\beta}{\alpha}}\le x\le\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ 又由

$0\le\sqrt{\alpha x^2-\beta+\gamma^2}-\gamma\le 1$，可推出 $\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\le x\le\sqrt{\dfrac{1+2\gamma+\beta}{\alpha}}$ 。

所以

$$\mu_{\tilde{S}}(x)=\begin{cases}1+\sqrt{\alpha x^2-\beta+\gamma^2}-\gamma & ,\quad \sqrt{\dfrac{1-2\gamma+\beta}{\alpha}}\le x\le\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\\ 1+\gamma-\sqrt{\alpha x^2-\beta+\gamma^2} & ,\quad \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\le x\le\sqrt{\dfrac{1+2\gamma+\beta}{\alpha}}\\ 0 & ,\quad \text{其它}\end{cases} \tag{4-8}$$

5 应用实例

已知正常的需求速度是 100 件，根据专家预测，其需求速度的变化是在 90 到 100 之间，单位存储费为 0.4 元，缺货费为 0.15 元，每次订购费为 5 元。求最佳存储量。

解：由题意可知，需求速度是一个模糊数，即 $\tilde{R}=v_0+\Delta\cdot E$（$v_0>\Delta>0$），取

$\tilde{R}_0=v_0=100$，$\Delta=10$

由（4-4）式

$$\mu_{\tilde{S}}(x)=\begin{cases}1+\alpha x^2-\beta & ,\quad \sqrt{(\beta-1)/\alpha}\le x\le\sqrt{\beta/\alpha}\\ 1+\beta-\alpha x^2 & ,\quad \sqrt{\beta/\alpha}\le x\le\sqrt{(\beta+1)/\alpha}\\ 0 & ,\quad \text{其它}\end{cases}$$

其中： $\alpha=\dfrac{C_1(C_1+C_2)}{2C_2C_3\Delta}$， $\beta=\dfrac{v_0}{\Delta}$

可求得： $\alpha=\dfrac{0.4(0.4+0.15)}{2\times 0.15\times 5\times 10}=\dfrac{11}{750}$， $\beta=\dfrac{100}{10}=10$

$$\mu_{\tilde{Q}}(x)=\begin{cases}\dfrac{11}{750}x^2-9 & , \quad 3\sqrt{\dfrac{750}{11}}\le x\le 10\sqrt{\dfrac{75}{11}}\\ 11-\dfrac{11}{750}x^2 & , \quad 10\sqrt{\dfrac{75}{11}}\le x\le \sqrt{750}\\ 0 & , \quad \text{其它}\end{cases}$$

由其隶属函数可知，当 $x=10\sqrt{\dfrac{75}{11}}$ 时，隶属函数是 1。所以，最佳存储量是 $10\sqrt{\dfrac{75}{11}}\approx 25$ 件。最少的的存储量是 24 件，最多的存储量是 27 件。

6 结论

模糊库存理论是在经典库存理论的基础上，根据实际情况，将其中的某些参数看作模糊数的一种方法。本文引用了模糊结构元的方法, 对允许缺货的模糊库存理论进行了分析，推导出了最佳存储量 $\tilde{S}$ 的隶属函数的表达式，使其运算更加简单。

参考文献

[1] Wu K M, Yao J S, Fuzzy inventory with backorder for fuzzy order quantity and fuzzy shortage quantity[J], European Journal of Operational Research，2003，150(2):320-352

[2] Chang S C, Yao J S, Lee H M, Economic reorder point for fuzzy backorder quantity[J], European Journal of Operational Research, 1998，109（1）：183-202

[3] 钱颂迪，李维铮.运筹学.北京.清华大学出版社，2009

[4] 胡运权. 运筹学[M] .清华大学出版社,2001.7:356-359

[5] 郭嗣琮,陈刚著.信息科学中的软计算方法[M]. 沈阳. 东北大学出版社,2001

[6] 郭嗣琮著. 基于结构元理论的模糊数学分析原理[M]. 沈阳. 东北大学出版社,2004

[7] 郭嗣琮. [-1,1]上同序单调函数的同序变换群与模糊数运算[J],模糊系统与数学，3 (2005)：105-110

Fuzzy inventory theory and application of the structural element method

Cao Xu，Zhang Lei，Liu Hongxing
Department of Basic Science, Liaoning Technical University, Fuxin 123000

Abstract

For an enterprise, a good storage strategy, you can save money to get the maximum profit. This statement is the enterprise management theory of the most widely used method of inventory, find the best storage capacity of their products to minimize the total cost. And analyzed the demand rate or subscription fee for the fuzzy numbers under the optimal storage capacity calculation, the last reference to a structural element of the algorithm, the optimal storage capacity is derived membership function of the expression, to study the theory of fuzzy inventory easier.

Keywords: *Membership function; fuzzy structured element; fuzzy inventory theory*