矩阵可交换性的研究

张冬菊，李微微
中国矿业大学数学与应用数学，江苏 徐州（221008）
E-mail:zhuangguidong@163.com

摘　要：本文主要讨论与一般矩阵可交换的矩阵构成的线性空间的维数。由于每个矩阵都与一个若当标准型相似，并且与它们可交换矩阵构成的线性空间同构，也即这两个线性空间有相同的维数。所以，本文通过讨论一般的若当标准型而得出与一般矩阵可交换矩阵构成的线性空间的维数，并得到了一定的结果。利用该结果，本文还讨论了与任意 2-幂零矩阵可交换矩阵构成的线性空间的维数。

关键词：矩阵；可交换；若当标准型；线性空间；2-幂零矩阵
中图分类号：O

1 问题的提出

在以前很多矩阵可交换性的研究中，绝大部分是研究的是矩阵可交换性的条件，并且得出了许多的结果。本文和以往不同，主要讨论的是与某一矩阵可交换矩阵构成的线性空间的维数。

2　问题的解决

2.1 问题解决的思路

我们要讨论与任意 n 阶矩阵可交换矩阵构成的线性空间的维数，由前面的定理可知，我们只要讨论与它相似的若当标准型可交换矩阵构成的线性空间的维数即可[1]。所以我们把问题转化为求与任意一个 n 阶若当标准型矩阵可交换矩阵构成的线性空间的维数。在讨论若当标准型时，我们采用从特殊到一般的方法进行讨论。

在具体讨论时，我们首先将与给定 n 阶若当标准型可交换的矩阵视为待定矩阵，根据矩阵可交换的定义，有 n^2 个等式，通过这些等式可以得出与该若当标准型可交换矩阵的通式，利用该通式，很容易就可得出其线性空间的维数[2]。

2.2 问题解决的步骤

首先考虑几种特殊情况。

（i）我们知道所有的数量矩阵与任意矩阵可交换[1]，很容易知道与它们可交换矩阵构成的线性空间的维数为 n^2 [3]

（ii）对角元均不相等的对角阵。

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{bmatrix} = A_1$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{bmatrix} = A_2$$

先看 A_1, A_2 的形式：A_1 的第 i 行第 j 列的元素为 $\lambda_i b_{ij} (i = 1,2\cdots n,\ j = 1,2\cdots n)$，$A_2$ 的第 i 行第 j 列的元素为 $\lambda_j b_{ij} (i = 1,2\cdots n, j = 1,2\cdots n)$，要使 $A_1 = A_2$，即 $\lambda_i b_{ij} = \lambda_j b_{ij}$ $(i = 1,2\cdots n, j = 1,2\cdots n)$，当 $i \neq j$ 时，即 $\lambda_i \neq \lambda_j$，则 $b_{ij} = 0$。当 $i = j$ 时 b_{ij} 可任取。由此，我们得到与该若当标准型可交换矩阵的通式为：

$$\begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, \cdots c_n \text{ 为任意复数.})$$

我们可以找出该线性空间的一组基：

$$\begin{bmatrix} c_1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & c_n \end{bmatrix}$$

根据线性空间维数的定义[1]，我们可以得出该线性空间的维数为 n。另外，还可以得到下面一个结论：

与一个矩阵可交换矩阵构成的线性空间的维数等于与该矩阵可交换矩阵的通式中无关的非零元的个数[1]。

（iii）由一个若当块构成的若当标准型。

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ & 1 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ b_{11} + \lambda_1 b_{21} & b_{12} + \lambda_1 b_{22} & \cdots & b_{1n} + \lambda_1 b_{2n} \\ b_{21} + \lambda_1 b_{31} & b_{22} + \lambda_1 b_{32} & \cdots & b_{2n} + \lambda_1 b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} + \lambda_1 b_{n1} & b_{n-1,2} + \lambda_1 b_{n2} & \cdots & b_{n-1,n} + \lambda_1 b_{nn} \end{bmatrix} = A_3$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & \\ & 1 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 b_{11} + b_{12} & \lambda_1 b_{12} + b_{13} & \cdots & \lambda_1 b_{1,n-1} + b_{1n} & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} + b_{22} & \lambda_1 b_{22} + b_{23} & \cdots & \lambda_1 b_{2,n-1} + b_{2n} & \lambda_1 b_{2n} \\ \lambda_1 b_{31} + b_{32} & \lambda_1 b_{32} + b_{33} & \cdots & \lambda_1 b_{3,n-1} + b_{3n} & \lambda_1 b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} + b_{n2} & \lambda_1 b_{n2} + b_{n3} & \cdots & \lambda_1 b_{n,n-1} + b_{nn} & \lambda_1 b_{nn} \end{bmatrix} = A_4$$

先看看 A_3 和 A_4 的特点：A_3 中第 i 行第 j 列的元素为 $b_{i-1,j} + \lambda_1 b_{ij}$（$i = 2,3\cdots n, j = 1,2\cdots n$），第一行第 j 列的元素为：$\lambda_1 b_{1j}$（$j = 1,2\cdots n$）。A_4 中第 i 行第 j 列的元素为 $b_{i,j+1} + \lambda_1 b_{ij}$（$i = 1,2,\cdots n, j = 1,2\cdots n-1$），第 n 列第 i 行的元素为：$\lambda_1 b_{in}$（$i = 1,2,\cdots n$）。要让 $A_3 = A_4$，则两矩阵第 i 行第 j 列元素相等即 $b_{i-1,j} + \lambda_1 b_{ij} = b_{i,j+1} + \lambda_1 b_{ij}$（$i = 2,3\cdots n, j = 1,2\cdots n-1$），则有 $b_{i-1,j} = b_{i,j+1}$，又第 $i+1$ 行第 $j+1$ 列元素相等即

$b_{i,j+1}+\lambda_1 b_{i+1,j+1}=b_{i+1,j+2}+\lambda_1 b_{i+1,j+1}$，则有 $b_{i,j+1}=b_{i+1,j+2}$，依次推下去有：$b_{i-1,j}=b_{i,j+1}=b_{i+1,j+2}=\cdots$，由此可得：

$$b_{i,j}=b_{ks}(i-j=k-s) \qquad (1)$$

再考虑 A_3 和 A_4 的第一行相等即：$\lambda_1 b_{1j}=\lambda_1 b_{1j}+b_{1,j+1}(j=1,2\cdots n-1)$，于是有：

$$b_{1j}=0(j=2,3\cdots n) \qquad (2)$$

最后考虑 A_3 和 A_4 的最后一列相等即: $b_{i-1,n}+\lambda_1 b_{in}=\lambda_1 b_{in}$（$i=1,2,\cdots n$），于是有：

$$b_{in}=0(i=1,2\cdots n-1) \qquad (3)$$

结合（1），（2），（3）可得 $b_{ij}=0(i<j)$，再结合（1）我们可以得到与该若当标准型可交换矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & & & & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & & & \\ \vdots & a_4 & a_3 & a_2 & \ddots & & \\ a_{n-1} & & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$（$a_1,a_2,\cdots a_n$ 为任意复数）

同理我们可以得出与该种情况下若当标准型可交换矩阵构成的线性空间的维数也为 n。

（iv）由两个若当块构成的若当标准型。

该矩阵形式如下，并对其做分块为：

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_1 & & & & & & & \\ 1 & \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & 1 & \lambda_2 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

(设 λ_1 的重数为 i，λ_2 的重数为 j，则有 $i+j=n$）

并记 $J_1=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$，$J_2=\begin{bmatrix} \lambda_2 & & & \\ 1 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 则原矩阵可表示为：

$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$，对任意一个 n 阶矩阵 $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$ 也做如上的分块，记为 $\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$，利用分块矩阵的乘法则有：

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_1B_1 & J_1B_2 \\ J_2B_3 & J_2B_4 \end{bmatrix}=A_5$$

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1J_1 & B_2J_2 \\ B_3J_1 & B_4J_2 \end{bmatrix}=A_6$$

要使 $A_5=A_6$，则有 $J_1B_1=B_1J_1$，$J_1B_2=B_2J_2$，$J_2B_3=B_3J_1$，$J_2B_4=B_4J_2$，由前面的推导可知：

$$B_1=\begin{bmatrix} a_1 & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & \\ a_3 & a_2 & a_1 & & & \\ \vdots & a_3 & \ddots & \ddots & & \\ a_{i-1} & & \ddots & a_2 & a_1 & \\ a_i & a_{i-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}，\quad B_4=\begin{bmatrix} b_1 & & & & & \\ b_2 & b_1 & & & & \\ b_3 & b_2 & b_1 & & & \\ \vdots & b_3 & \ddots & \ddots & & \\ b_{j-1} & & \ddots & b_2 & b_1 & \\ b_j & b_{j-1} & \cdots & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}$$

下面求 B_2, B_3,根据 $J_1B_2=B_2J_2$ 有：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}_{i\times i}\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{ij} \end{bmatrix}_{i\times j}=\begin{bmatrix} \lambda_1d_{11} & \lambda_1d_{12} & \cdots & \lambda_1d_{1j} \\ d_{11}+\lambda_1d_{21} & d_{12}+\lambda_1d_{22} & \cdots & d_{1j}+\lambda_1d_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{i-1,1}+\lambda_1d_{i1} & d_{i-1,2}+\lambda_1d_{i2} & \cdots & d_{i-1,j}+\lambda_1d_{ij} \end{bmatrix}=A_7$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1j} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{ij} \end{bmatrix}_{i\times j}\begin{bmatrix} \lambda_2 & & & \\ 1 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}_{j\times j}=\begin{bmatrix} \lambda_2d_{11}+d_{12} & \cdots & \lambda_2d_{1,j-1}+d_{1j} & \lambda_2d_{1j} \\ \lambda_2d_{21}+d_{22} & \cdots & \lambda_2d_{2,j-1}+d_{2j} & \lambda_2d_{2j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_2d_{i1}+d_{i2} & \cdots & \lambda_2d_{i,j-1}+d_{ij} & \lambda_2d_{ij} \end{bmatrix}=A_8$$

下面分情况讨论：

①$\lambda_1\neq\lambda_2$，此时先比较 A_7 和 A_8 的最后一列可以得到 $d_{p,j}=0\ (p=1,\cdots i)$，又比较第一行，根据 $d_{1j}=0$，可得 $d_{1q}=0(q=1,2\cdots j)$，比较第二行，由于 $d_{2j}=0$，$d_{1q}=0(q=1,2\cdots j)$ 可得：$d_{2q}=0(q=1,2\cdots j)$。再根据得到的结果依次往下推则有：$d_{p,q}=0(p=1,2\cdots i,q=1,2\cdots j)$，即 $B_2=0$。同理可得 $B_3=0$。

综合上面的讨论可得与该种情况下矩阵可交换矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & & & & & & \\ a_2 & a_1 & & & & & & & & \\ \vdots & a_2 & a_1 & & & & & & & \\ a_{i-1} & & \ddots & \ddots & & & & & & \\ a_i & a_{i-1} & \cdots & a_2 & a_1 & & & & & \\ & & & & & a_{i+1} & & & & \\ & & & & & a_{i+2} & a_{i+1} & & & \\ & & & & & \vdots & a_{i+2} & a_{i+1} & & \\ & & & & & a_{n-1} & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{i+2} & a_{i+1} \end{bmatrix}$$ （$a_1, a_2, \cdots a_n$ 为任意复数）

由此，我们很容易得出：与该种情况下若当标准型可交换矩阵构成的线性空间的维数也为 n.

② $\lambda_1 = \lambda_2, B_1, B_4$ 形式不变，下面讨论此种情况下 B_2, B_3 的形式。

首先不妨设 $i < j$ ，按照上面（iii）的讨论方法：

A_7 中第 p 第 q 列的元素为 $d_{p-1,q} + \lambda_1 d_{pq}$ （$p = 2,3\cdots i, q = 1,2\cdots j$），第一行第 q 列的元素为：$\lambda_1 d_{1q}$ （$q = 1,2\cdots j$）。A_8 中第 p 行第 q 列的元素为 $d_{p,q+1} + \lambda_2 d_{pq}$ （$p = 1,2,,\cdots i, q = 1,2\cdots j-1$），第 j 列第 p 行的元素为：$\lambda_2 d_{p,j}$ （$p = 1,2,\cdots i$），要让 $A_7 = A_8$，则两矩阵第 p 行第 q 列元素相等即 $d_{p-1,q} + \lambda_1 d_{pq} = d_{p,q+1} + \lambda_2 d_{pq}$ （$p = 2,3\cdots i, q = 1,2\cdots j-1$），则有 $d_{p-1,q} = d_{p,q+1}$ 同上面的方法可得：$d_{p-1,q} = d_{p,q+1} = d_{p+1,q+2} = \cdots$，由此可得：

$$d_{pq} = d_{ks}(p - q = k - s) \tag{4}$$

再考虑 A_7 和 A_8 的第一行相等即：

$$\lambda_1 d_{1q} = d_{1,q+1} + \lambda_2 d_{1q} \quad (q = 1,2\cdots j-1) \tag{5}$$

即有：

$$d_{1q} = 0(q = 2,3,\cdots j) \tag{6}$$

再利用最后一列元素相等即 $d_{p-1,j} + \lambda_1 d_{p,j} = \lambda_2 d_{p,j} (p = 2,3\cdots i)$ 则有：

$$d_{p,j} = 0(p = 1,2,\cdots i-1) \tag{7}$$

结合（4），（6）可得：$d_{p,q} = 0(p < q)$，再根据（4）可以得到 B_2 的形式为:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & & & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_2 & \ddots & & & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1} & & \ddots & a_1 & & \vdots & & \vdots \\ a_i & a_{i-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{i \times j}$$ （$a_1, a_2, \cdots a_i$ 为任意复数）

再利用同样的方法讨论 B_3：

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 & & & \\ 1 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}_{j\times j} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1i} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{j1} & d_{j2} & \cdots & d_{ji} \end{bmatrix}_{j\times i} = \begin{bmatrix} \lambda_2 d_{11} & \lambda_2 d_{12} & \cdots & \lambda_2 d_{1i} \\ d_{11}+\lambda_2 d_{21} & d_{12}+\lambda_2 d_{22} & \cdots & d_{1i}+\lambda_2 d_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{j-1,1}+\lambda_2 d_{j1} & d_{j-1,2}+\lambda_2 d_{j2} & \cdots & d_{j-1,i}+\lambda_2 d_{ji} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1i} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{j1} & d_{j2} & \cdots & d_{ji} \end{bmatrix}_{j\times i} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}_{i\times i} = \begin{bmatrix} d_{12}+\lambda_1 d_{11} & d_{13}+\lambda_1 d_{12} & \cdots & d_{1i}+\lambda_1 d_{1,i-1} & \lambda_1 d_{1i} \\ d_{22}+\lambda_1 d_{21} & d_{23}+\lambda_1 d_{22} & \cdots & d_{2i}+\lambda_1 d_{2,i-1} & \lambda_1 d_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{j2}+\lambda_1 d_{j1} & d_{j3}+\lambda_1 d_{j2} & \cdots & d_{ji}+\lambda_1 d_{j,i-1} & \lambda_1 d_{ji} \end{bmatrix}$$

跟 B_2 一样，我们可以得到：

$$d_{pq} = d_{ks}(p-q=k-s) \qquad (8)$$

$$d_{pi} = 0(p=1,2\cdots j-1) \qquad (9)$$

$$d_{1q} = 0(q=2,3\cdots i) \qquad (10)$$

根据（8）和（10）可得：

$$d_{pq} = 0(p<q\text{且}q-p\le i-1) \qquad (11)$$

又根据（8）和（9）可得:

$$d_{pq} = 0(p\ge q\text{且}p-q\le j-i-1) \qquad (12)$$

最后综合（8），（11），（12）我们可以得到 B_3 的形式为：

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & & & & \\ a_2 & a_1 & & & \\ \vdots & a_2 & \ddots & & \\ a_{i-1} & & \ddots & a_1 & \\ a_i & a_{i-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{bmatrix}_{j\times i}$$

（$a_1,a_2,\cdots a_i$ 为任意复数）。

最后我们便可以得到与该若当标准型可交换矩阵的形式为：

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & c_1 & & & & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & & & c_2 & c_1 & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_i & \cdots & a_2 & a_1 & c_i & \cdots & c_2 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_1 & & & & & & \\ \vdots & & & \vdots & b_2 & b_1 & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & & & & \\ d_1 & & & & b_4 & b_3 & b_2 & \ddots & & & \\ d_2 & d_1 & & & \vdots & b_4 & \ddots & \ddots & b_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & b_{j-1} & & \ddots & b_3 & b_2 & b_1 & \\ d_i & \cdots & d_2 & d_1 & b_j & b_{j-1} & \cdots & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix}_{j\times i}$$

（$a_1,a_2,\cdots a_i,b_1,b_2\cdots b_j,c_1,c_2\cdots c_i,d_1,d_2\cdots d_i$ 为任意复数。）

我们可以得到该线性空间的维数为：$n+2i$ 也即：

$$n+2\min(i,j) \tag{13}$$

当$i=j$时，则有$J_1=J_2$,很容易可以得到其线性空间的维数为$2n$,也满足（13）式，所以此种情况下所求线性空间的维数为（13）式。

下面我们对一般的若当标准型进行讨论:

我们首先假设原标准型含有k个若当块，对其做如下分块:

$$\begin{bmatrix}
\begin{matrix}\lambda_1 & & & \\ 1 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_1\end{matrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \vdots & \begin{matrix}\lambda_2 & & & \\ 1 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_2\end{matrix} & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & \begin{matrix}\ddots & \\ \ddots & \ddots\end{matrix} & \vdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \begin{matrix}\lambda_k & & & \\ 1 & \lambda_k & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_k\end{matrix}
\end{bmatrix}$$

我们记$J_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix}$并设特征值$\lambda_i$的重数为$r_i$，我们有：$\sum_{i=1}^{k} r_i = n$。现在我们对任意一个$n$阶矩阵$B$做如上同样的分块[1]，记为：

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix}$$

利用分块矩阵的乘法[1]有：

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} J_1B_{11} & J_1B_{12} & \cdots & J_1B_{1k} \\ J_2B_{21} & J_2B_{22} & \cdots & J_2B_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ J_kB_{k1} & J_kB_{k2} & \cdots & J_kB_{kk} \end{bmatrix}=A_9$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11}J_1 & B_{12}J_2 & \cdots & B_{1k}J_k \\ B_{21}J_1 & B_{22}J_2 & \cdots & B_{2k}J_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{k1}J_1 & B_{k2}J_2 & \cdots & B_{kk}J_k \end{bmatrix}=A_{10}$$

要求$A_9=A_{10}$，比较A_9，A_{10}的形式，其对角线元素相等则有：$J_iB_{ii}=B_{ii}J_i(i=1,2\cdots k)$，根据前面的讨论我们可以得到$B_{ii}$的形式为：

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{r_i} & \cdots & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

再比较 A_9 和 A_{10} 中第 i 行第 j 列元素（$i \neq j$），有：$J_i B_{ij} = B_{ij} J_j$，由于 B_{ij} 在 $A_9 = A_{10}$ 的条件下只满足该唯一的一个等式，所以 B_{ij} 的形式只受 J_i, J_j 的影响。根据前面对由两个若当块形成的若当标准型的讨论，我们很容易得出 B_{ij} 的形式：

① $\lambda_i \neq \lambda_j$ 时： B_{ij} =0，

② $\lambda_i = \lambda_j$ 时， B_{ij} 的形式由 r_i, r_j 的大小决定。

当 $r_i < r_j$ 时 B_{ij} 的形式为：

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{r_i} & \cdots & a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

当 $r_i > r_j$ 时 B_{ij} 的形式为：

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{r_i} & \cdots & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

当 $r_i = r_j$ 时，的形式为：

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & a_1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{r_i} & \cdots & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

综合上面的结果，对任意一个若当标准型就可以写出与它可交换矩阵的具体形式。下面我们总结一下与任意若当标准型可交换矩阵构成的线性空间的维数。

根据前面的结论，在 B 的通式中， B_{ii} 中必含有 r_i 个无关的非零元，又根据 $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$，我们知道 B 中至少含有 n 个无关的非零元。$B_{i,j}(i \neq j)$ 中是否含有非零元主要与 λ_i, λ_j 是否相等有关，若 $\lambda_i \neq \lambda_j$，则 $B_{i,j} = 0$；若 $\lambda_i = \lambda_j$，则 $B_{i,j}$ 中含有 $\min(r_i, r_j)$ 个无关的非零元。

同理B_{ji}中也含有$\min(r_i,r_j)$个无关的非零元。由此，我们可以得出与任意若当标准型可交换矩阵构成的线性空间的维数为：

$$n+2\sum\min(r_i,r_j) \qquad (14)$$

r_i,r_j分别为特征值相同的若当块J_i,J_j的重数。

利用该公式我们计算一下与数量矩阵可交换矩阵的维数应为：

$$n+2C_n^2=n^2.$$

可见对于数量矩阵，该公式同样适用。

2.3 得出的结果

从上面的讨论我们可以得出：

定理 5 对于任意一个n阶矩阵，与它可交换矩阵构成的线性空间的维数满足下面的公式（14）。

利用该定理，我们很容易得出下面几个推论：

推论 1：对于任意一个n阶矩阵，若其若当标准型的所有若当块的特征值均不相等，那么与它可交换矩阵构成的线性空间的维数必为n.

推论 2： 对任意一个n阶矩阵，与它可交换矩阵构成的线性空间维数 r 必满足关系：$n\le r\le n^2$，当且仅当该矩阵的若当标准型满足推论 1 的条件时，左边的等号成立。

推论 3：与任意一个n阶矩阵可交换矩阵构成的线性空间的维数必与n同奇偶。

参考文献

[1] 王萼芳,石生明. 高等代数. 北京：高等教育出版社. 2003（3），162-326
[2] 陈景良. 特殊矩阵. 北京：清华大学出版社. 2001，305-314
[3] 张斌.关于矩阵可交换性的研究[硕士学位论文]. 成都：电子科技大学. 2008

Matrix interchangeability

Zhang Dongju, Li Weiwei
Mathematics and Applied Mathematics , China University of Mining, Jiangsu Xuzhou（221008）

Abstract
This article focused on the dimension of linear space which is constructed by the matrix exchangeable with a general matrix. Because each matrix is similar with a Jordan standard and the linear spaces which are constructed by the matrixes exchangeable with them are isomorphic, these two linear spaces have the same dimension. Therefore, this paper discussed the general Jordan standard to derive the dimension of linear space which is constructed by the matrix exchangeable with a general matrix. This has some results. Use of the results, the paper also discussed the dimension of linear space which is constructed by the matrix exchangeable with a 2- nilpotent matrix.

Keywords: Matrix;Commutation;Jordan standard;Linear space;2-nilpotent matrix