用以表示 $\cos nx$ 的关于 $\cos x$ 的多项式的通项公式

段平安
重庆大学机械工程学院，重庆 (400044)
E-mail: dpa454499304@qq.com

摘　要：本文通过对怎样用 $\cos x$ 的多项式形式来表示 $\cos nx$ 这一有趣的问题进行了深入的研究，特别是对若干个多项式的每项系数的研究而总结出了一些重要的规律，并总结出了该多项式的通项公式，给出了该多项式的数学解析式，最后示例运用这些规律计算出当 n 分别为 9 和 10 的多项式。
关键词：余弦；三角函数；展开
中图分类号：O1-645

1 引言

三角函数（Trigonometric）是数学中属于初等函数中的超越函数的一类函数。它们的本质是任意角的集合与一个比值的集合的变量之间的映射。通常的三角函数是在平面直角坐标系中定义的，其定义域为整个实数域。另一种定义是在直角三角形中，但并不完全。现代数学把它们描述成无穷数列的极限和微分方程的解，将其定义扩展到复数系。它包含六种基本函数：正弦、余弦、正切、余切、正割、余割。由于三角函数的周期性，它并不具有单值函数意义上的反函数。三角函数在复数中有较为重要的应用。在物理学中，三角函数也是常用的工具。因此，三角函数是数理中十分重要的函数之一。本文要解决的就是有关余弦函数的一个问题，旨在找出用 $\cos x$ 的多项式来表示 $\cos nx$ 的一些规律。对于 $\cos nx$ 的展开，根据棣莫弗公式[1] $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 知：当 n 为正整数时，$\cos nx$ 一定可以用 $\cos x$ 的多项式形式来表示。为此，本文要解决的问题就是通过“找规律”的方法找到该多项式的通项形式。本文通过两角和的三角函数公式写出当 n 分别等于 2,3,4,5,6,7,8……时的 $\cos nx$ 所对应的多项式公式并将该多项式按 $\cos x$ 的升幂排列，然后对每一个多项式进行对比，研究，分析，从而总结出该多项式的一些规律并给出了该多项式的通项公式，明确定义了 $\cos x$ 的系数。最后，示例运用这些规律计算出当 n 分别为 9 和 10 的多项式。

2 “关于 $\cos x$ 的多项式”的通项公式

设 n 为正整数，记 S(n)为 $\cos nx$ 所对应的关于 $\cos x$ 的多项式。

根据两角和的三角函数公式

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

可以得到如下结果：（按 $\cos x$ 的升幂排列）

$$\cos 2x = -1 + 2\cos^2 x$$

$$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$$

$$\cos 4x = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x$$

$$\cos 5x = 5\cos x - 20\cos^3 x + 16\cos^5 x$$

$$\cos 6x = -1 + 18\cos^2 x - 48\cos^4 x + 32\cos^6 x$$

$$\cos 7x = -7\cos x + 56\cos^3 x - 112\cos^5 x + 64\cos^7 x$$

$$\cos 8x = 1 - 32\cos^2 x + 160\cos^4 x - 256\cos^6 x + 128\cos^8 x$$

本文通过对以上这些多项式的研究与分析，并将多项式中的每项系数看成是关于 n 的数列，根据等差数列与等比数例特点[3,5]及其公式[6]总结出 S(n)多项式应具有以下几个规律：

a. S(n)每项呈现正负交替；

b. 当 n 为奇数时，S(n)多项式中只含有$\cos x$的奇数次方项，当 n 为偶数时，S(n)多项式中只含有$\cos x$的偶数次方项；

c. 系数规律：

将多项式中的每项系数看成是关于 n 的数列，然后通过将数列函数化[2,4]的方法找到该多项式每项的通项为如下：

$$(-1)^{\frac{n-k}{2}} \frac{n\cdot(n+k-2)!!}{k!(n-k)!!}\cos^k x \qquad (1)$$

注：“$!$”表示阶乘；当m是自然数时，$m!$表示不超过m的所有正整数的乘积。如：$3! = 3\times2\times1 = 6$（另$0! = 1$）

“$!!$”表示双阶乘：当m是自然数时，$m!!$表示不超过m且与m有相同奇偶性的所有正整数的乘积。如：$6!! = 6\times4\times2 = 48$，$3!! = 3\times1 = 3$（另$0!! = 1$）

3 “关于$\cos x$的多项式”的一般表达式

本文根据（1）式，用以表示$\cos nx$的关于$\cos x$的多项式 S(n)的一般表达式可以写成如下形式：

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{n} g(n,k)\frac{n(n+k-2)!!}{k!(n-k)!!}\cos^k x \qquad (2)$$

式中$g(n,k)$的作用在于调节每一项值的正负和解决某些项的取舍问题。因此，通过对$\cos nx$所对应的多项式综合分析知，$g(n,k)$应具有以下特性：

（1）当 n 与 k 同时为奇数或者同时为偶数时，如果 n 与 k 的差能够被 4 整除，那么$g(n,k)$的函数值为 1，如果 n 与 k 的差不能被 4 整除，那么$g(n,k)$的值为-1

（2）当 n 与 k 其中一个为偶数而另一个为奇数时，$g(n,k)$的值为 0

于是：综合分析后，$g(n,k)$的解析式可以表示为如下形式：

$$g(n,k) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-k}{2}} & （当n与k奇偶性相同） \\ 0 & （当n与k奇偶性不同） \end{cases} \qquad (3)$$

为了更好的分析（2）与（3）式，因此将（2）（3）式进一步化成为如下形式：

$$\cos nx=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\dfrac{n\cdot(n+2k-2)!!}{(2k)!(n-2k)!!}\cos^{2k}x & \text{（当}n\text{为偶数）}\\ \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}(-1)^{\frac{n+1-2k}{2}}\dfrac{n\cdot(n+2k-3)!!}{(2k-1)!(n+1-2k)!!}\cos^{2k-1}x & \text{（当}n\text{为奇数）}\end{cases}$$

以上式子即为“关于$\cos x$的多项式”的“一般表达式”。

4 “一般表达式”的实际应用与意义

以下过程为运用“一般表达式”计算出当 n 等于 9 与 10 时的多项式的全过程，即$\cos 9x$以及$\cos 10x$的多项式。

（1）以下过程为运用上式计算出$\cos 9x$的多项式的全过程：

将 n=9 代入上式可得以下结果：

$$\cos 9x=\sum_{k=1}^{5}(-1)^{5-k}\frac{9\cdot(2k+6)!!}{(2k-1)!(10-2k)!!}\cos^{2k-1}x$$

进一步：

$$\cos 9x=\frac{9\times 8!!}{1!\times 8!!}\cos x-\frac{9\times 10!!}{3!\times 6!!}\cos^3 x+\frac{9\times 12!!}{5!\times 4!!}\cos^5 x-\frac{9\times 14!!}{7!\times 2!!}\cos^7 x+\frac{9\times 16!!}{9!\times 0!!}\cos^9 x$$

化简得：$\cos 9x$用$\cos x$的多项式形式表示为如下：

$$\cos 9x=9\cos x-120\cos^3 x+432\cos^5 x-576\cos^7 x+256\cos^9 x$$

（2）以下过程为计算出$\cos 10x$的全过程：将 n=10 代入上式可得以下结果：

$$\cos 10x=\sum_{k=0}^{5}(-1)^{5-k}\frac{10\cdot(2k+8)!!}{(2k)!(10-2k)!!}\cos^{2k}x$$

进一步：

$$\cos 10x=-\frac{10\times 8!!}{0!\times 10!!}+\frac{10\times 10!!}{2!\times 8!!}\cos^2 x-\frac{10\times 12!!}{4!\times 6!!}\cos^4 x+\frac{10\times 14!!}{6!\times 4!!}\cos^6 x-\frac{10\times 16!!}{8!\times 2!!}\cos^8 x+\frac{10\times 18!!}{10!\times 0!!}\cos^{10} x$$

化简得：$\cos 10x$用$\cos x$的多项式形式表示为如下：

$$\cos 10x=-1+50\cos^2 x-400\cos^4 x+1120\cos^6 x-1280\cos^8 x+512\cos^{10} x$$

因此，通过该一般解析式，可以简便而又快捷地将$\cos nx$写成只含有$\cos x$的多项式形式，在余弦等三角函数的有关 n 倍角公式的化简或者运算领域内具有使用价值。

5 结论

本文通过对已知的若干个$\cos nx$关于$\cos x$多项式的研究与分析总结出；$\cos nx$可以用关于$\cos x$的多项式来表示为如下：

$$\cos nx = \sum_{k=0}^{n} g(n,k) \frac{n(n+k-2)!!}{k!(n-k)!!} \cos^k x$$

其中：

$$g(n,k) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-k}{2}} & （当n与k奇偶性相同） \\ 0 & （当n与k奇偶性不同） \end{cases}$$

进一步化简如下“一般解析式”：

$$\cos nx = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^{\frac{n-2k}{2}} \frac{n \cdot (n+2k-2)!!}{(2k)!(n-2k)!!} \cos^{2k} x & （当n为偶数） \\ \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{\frac{n+1-2k}{2}} \frac{n \cdot (n+2k-3)!!}{(2k-1)!(n+1-2k)!!} \cos^{2k-1} x & （当n为奇数） \end{cases}$$

注：“!”表示阶乘，“!!”表示双阶乘。

参考文献

[1] 钟玉泉. 《复变函数论》[M]. 高等教育出版社，1987 第三版
[2] 张宏翀. 《运用函数与方程的观点研究数列》[J].《中学生数学》2007 年第 11 期
[3] 詹立波, 陈龙. 《等差数列与等比数例》[J]. 数学通讯, 2006, (22)
[4] 张钟谊. 《数列问题的函数处理》[J].《学习方法报》2007 年第 11 期
[5] 马文杰, 徐宇红. 《巧用等差、等比数列的基本性质解题》[J]. 数学通讯, 2005, (24)
[6] 侯万胜,白志峰.《六类特殊数列前 n 项和公式的新求法和推广》[J].延安教育学院学报.2003 年 02 期

General term formula of the polynomial of using cosx to express cosnx

Duan pingan

Chongqing University of Mechanical Engineering, Chongqing（400044）

Abstract

In this paper, I have made a in-depth study on how to use the polynomial of cosx to express cosnx, especially for regularity of coefficients of the polynomial and summed up some useful regularities about the polynomial and calculated the general analytic of the polynomial and found out the mathematical analytical expression. In addition, some examples are given to show the use of these regularities introduced for the polynomials where n is equal to 9 and 10, respectively.

Keywords: cosine;trigonometric function;expansion.

作者简介：

段平安，男，1987 年 5 月生，重庆大学机械工程学院本科在读,学习方向：机械电子工程。