简论哥德巴赫猜想与 *n* 生素数猜想的分布规律

张春山
辽河油田博士后科研工作站，辽宁盘锦（124010）
E-mail: zcshan123@126.com

摘 要：本文在自然级数拆分的基础上，研究了偶数的分类、分拆问题，揭示了各类偶数与其分拆的对应规律，进而应用所定义的素数分布的均值公式和相关的整数恒等式，化求和为求积，首次推导出了哥德巴赫猜想及 n 生素数猜想分布的渐近式，准确地描述了其分布规律。

关键词：偶数，素数，级数，猜想，渐近式

1．引 言

关于哥德巴赫猜想和 n 生素数猜想的分布问题，人们已经进行了深入的研究与探索，并取得了重大的成就。但由于对其本质和规律缺乏深刻的认识和全面的掌握，迄今为止，除 Hardy-Littlewood 猜想之外，还没有一个完整、准确的表述结果。本文以全新的思路尝试研究并初步解决了上述问题。

2．等差级数的拆分问题

2.1 自然级数拆分问题

命D_k为连续的素数之积，即

$$D_k = \prod_{k\geq 0} p_k \tag{1}$$

式中：p_0=2，p_1=3，p_2=5，… …

若 $D_k \leq N \leq 2(D_{k+1}-1)$，先列下所有不大于偶数 N 之自然数：

1，2，3，4，5，6，… …N。

陆续分离：

（i） 2，4，6，8，10，… …即 2 起之一切偶数；

（ii） 3，9，15，21，27，… …即 3 起之一切 3 的倍数；

（iii） 5，25，35，55，65，… …即 5 起之一切 5 的倍数… …

注意到第一次分离后余者乃一公差为 2 的等差级数：

1，3，5，7，9，… …。

而第二次分离后余者为：1，5，7，11，13，17，19，23，… …。

却不是等差级数。但如果将其重新排列，可得到 2 个公差为 6 的等差级数：

1，7，13，19，25，… …

5，11，17，23，29，… …

第三次分离后余者为：

1，7，11，13，17，19，23，29，31，37，… …。

如果将其重新排列，可得到 8 个公差为 30 的等差级数：

1，31，61，… …；11，41，71，… …

7，37，67，……；17，47，77，……

13，43，73，……；23，53，83，……

19，49，79，……；29，59，89，……

依此类推，当一切p_k的倍数分离出去后，余者均可排列为首项与公差D_k互素的等差级数，其数目可由欧拉函数计算，即

$$\varphi(D_k)=\prod_{k\geq 0}(p_k-1) \tag{2}$$

2.2 原级数 1+2m 的拆分

注意到自然级数是首项、公差均为 1 的等差级数，故根据前述，当所有的偶数从自然级数中分离出去后，所得到的结果可以看成是将自然级数拆分为与其等价的两个等差级数 $1+2m$ 和 $2+2M$（m、M 均为自然数），这里分别定义为奇原级数和偶原级数，统称为原级数。而其它首项不大于公差的所有等差级数皆可视为这两个原级数的子集，称为这两个原级数的次生等差级数。特别地，对于首项不同而公差相等的等差级数则称为同次等差级数。

一般地，原级数 $1+2m$可以拆分为d个与之等价的同次等差级数l_i+2dm（$l_i<2d$）。这里l_i为首项，d称为拆分因子，任取大于 1 的自然数，$2d$为公差。在这d个同次等差级数中，首项与公差互素的总是有φ（$2d$）个，非互素的总是有[d-φ（$2d$）]个。

若 d 取连续的奇素数之积，命

$$d=d_k=\prod_{k\geq 1}p_k \tag{3}$$

式中：$p_1=3$，$p_2=5$，$p_2=7$，……。

则当 $k=1$ 和 $k=2$ 时，按照 **1.1**，可直接得到原级数 $1+2m$ 的同次等差级数：

$1+6m$，$5+6m$；$3+6m$。

和 $1+30m$，$7+30m$，$13+30m$，$19+30m$；$11+30m$，$17+30m$，$23+30m$，$29+30m$；$3+30m$，$9+30m$，$15+30m$，$21+30m$，$27+30m$，$5+30m$，$25+30m$。

根据上述，当 $k=1$ 时，共得到 3 个与 $1+2m$ 等价的同次等差级数。其中：首项与公差互素的一类有 2 个，非互素的一类有 1 个。当 $k=2$ 时，共得到 15 个与 $1+2m$ 等价的同次等差级数。其中：首项与公差互素的一类有 8 个，非互素的一类有 7 个。

一般地，当$d=d_k$时，总共可以得到d_k个与 $1+2m$等价的同次等差级数。其中：首项与公差互素的一类有φ（D_k）个，非互素的一类有[d_k-φ（D_k）]个。

2.3 原级数 2+2M 的拆分

与原级数 $1+2m$的拆分相对应，当$d=d_k$时，原级数 $2+2M$也可拆分为d_k个与之等价的同次等差级数L_j+2d_kM（$L_j\leq 2d_k$）。这里L_j为首项，$2d_k$为公差。

注意到首项不大于 $2d_k$的偶数也为d_k个，故当$k=1$ 和$k=2$ 时，其拆分结果分别为

$2+6M$， $4+6M$， $6+6M$。

和 $2+30M$， $4+30M$， $6+30M$， $8+30M$，$10+30M$，$12+30M$，$14+30M$，$16+30M$，$18+30M$，$20+30M$，$22+30M$，$24+30M$，$26+30M$，$28+30M$，$30+30M$。

依此类推，当$d=d_k$时，总共可得到d_k个与 2+2M 等价的同次等差级数，即将全体偶数分成了d_k类。

3．偶数分拆问题

3.1 分拆定义

对于任一偶数 N，若 $x+y=N$，x、y 均为奇数，且 $x\geq3$，$y\geq3$，则$(x，y)$定义为该偶数的一个哥德巴赫分拆，以下简称分拆。

3.2 对应规律

根据定义，原级数 2+2M 的分拆之集合可表为（1+2m，1+2m），即原级数 2+2M 与 1+2m 之间存在着确定的对应关系。

按照前述，当$d=d_k$时，原级数 2+2M被分成了d_k类偶数，原级数 1+2m则被拆分为d_k个与之等价的同次等差级数，故上述任一类偶数L_j+2d_kM的分拆之集合皆可表为若干个（l+2m，l+2m）的子集l_i+2d_km，即两个原级数的同次等差级数之间存在着确定的对应关系。

当k=1 时，如果从原级数 1+2m的拆分所得到的 3 个等差级数中任取 2 个进行组合，共有 6 种结果；当k=2 时，从得到的 15 个等差级数中任取 2 个进行组合，共有 120 种结果。明显地，这些等差级数之组合即为上述各类偶数所对应的分拆（见表 1）。注意到 1 不是素数，为符合上述的拆分规律，表 1 中以D_k+1 补位。

在各类偶数所对应的分拆中，首项不等的 2 个同次等差级数定义为全分拆，首项相等的则定义为半分拆。就其包含的素数数目而言，表 1 中第Ⅰ、Ⅱ列中的分拆显然具有换算性，即 1 个全分拆可以换算为 2 个半分拆，相应地，1 个半分拆可以换算为 0.5 个全分拆。一般地，当$d=d_k$时，如果从原级数 1+2m的拆分所得到的d_k个等差级数中任取 2 个进行组合，总共可以得到$[d_k（d_k+1）]/2$ 个分拆。其中，全分拆为$[d_k（d_k—1）]/2$ 个，半分拆为d_k个。如果将所有的半分拆换算成全分拆，这d_k类偶数对应的全分拆总数为$d_k^2/2$ 个。其中，前两列为$\varphi^2（D_k）/2$ 个，后三列为$[d_k^2-\varphi^2（D_k）]/2$ 个。

如果将所有的全分拆换算成半分拆，这d_k类偶数对应的半分拆总数为d_k^2个。其中，前两列为$\varphi^2（D_k）$个，后三列为$[d_k^2-\varphi^2（D_k）]$个。

从表 1 中可以看出，尽管各类偶数所对应的分拆数相等，但在各列中的分拆数却并不一定相等，由此决定了这d_k类偶数的性质存在着明显的差异。

综上所述，对于任一类偶数来说，上述方法在将所有与其无关的素数及合数分开的同时，也将与其相关的绝大部分素数及合数分开。

本文以后所提及的分析，如不特别说明，均指表 1 中第Ⅰ、Ⅱ列换算后的全分拆或半分拆；所提及的等差级数均指首项与公差互素的同次等差级数。

表 1　哥德巴赫分拆对应规律

类别	N	等差级数首项（l_i, l_i'）				
		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
	M≥1	（k=1，公差为 6）				
1	2+6M		（ 7，7）	（ 5，3）		
2	4+6M		（ 5，5）	（ 7，3）		
3	6+6M	（ 7，5）		（ 3，3）		
	M≥1	（k=2，公差为 30）				
1	2+30M	（19，13）	（31，31）	（29，3）	（27，5）、（25，7）、（23，9） （21，11）、（17，15）	
2	4+30M	（23，11）	（17，17）	（13，3）	（29，5）、（27，7）、（21，13） （19，15）	（25，9）
3	6+30M	（29，7）、（23，13） （19，17）		（ 3，3） （31，5）	（25，11）	（21，15） （27，9）
4	8+30M	（31，7）	（19，19）	（ 5，3）	（29，9）、（27，11）、（25，13） （23，15）、（21，17）	
5	10+30M	（29，11）、（23，17）		（ 5，5）	（ 7，3）、（31，9）、（27，13） （21，19）	（25，15）
6	12+30M	（31，11）、（29，13） （23，19）		（ 7，5）	（ 9，3）、（25，17）	（27，15） （21，21）
7	14+30M	（31，13）	（ 7，7）	（11，3）	（ 9，5）、（29，15）、（27，17） （25，19）、（23，21）	
8	16+30M	（29，17）	（23，23）	（13，3） （11，5）	（ 9，7）、（31，15）、（27，19）	（25，21）
9	18+30M	（31，17）、（11，7） （29，19）		（13，5）	（15，3）、（25，23）	（ 9，9） （27，21）
10	20+30M	（31，19）、（13，7）		（17，3）	（15，5）、（11，9）、（29，21） （27，23）	（25，25）
11	22+30M	（29，23）	（11，11）	（19，3） （17，3）	（15，7）、（13，9）、（31，21）	（27，25）
12	24+30M	（17，7）、（31，23） （13，11）		（19，3）	（21，3）、（29，25）	（15，9） （27，27）
13	26+30M	（19，7）	（13，13）	（23，3）	（21，5）、（17，9）、（15，11） （29，27）、（31，25）	
14	28+30M	（17，11）	（29，29）	（23，5）	（25，3）、（21，7）、（19，9） （15，13）（31，27）	
15	30+30M	（23，7）、（19，11） （17，13）、（31，29）			（27，3）、（25，5）	（21，9） （15，15）

4．哥德巴赫猜想问题

4.1 命题

凡大于 4 之偶数必为二奇素数之和[1]。

4.2 P（1+1）（N）- N 之对应关系

当N不太大时，其所包含的素数对$P_{（1+1）}$（N）是容易计算的。如果绘制出$P_{（1+1）}$（N）－N的散点图，则从中至少可以看出：1、当偶数N连续变化时，与其对应的素数对的变化是极不规则的，但总体上有随其增大而增大的趋势；2、对于相邻的 3 个偶数，被 3 整除的偶数包含的素数对最多，而另外 2 个则相对较少；3、能被 15 整除的偶数，其包含的素数对相对则更多。

4.3 P（1+1）（N）与分拆之对应关系

从表 1 中可以看出：当 k=1 时，在原级数 2+2M 拆分成的 3 类偶数中，不能被 3 整除的 2 类偶数各对应 0.5 个全分拆或 1 个半分拆；而能被 3 整除的 1 类偶数对应 1 个全分拆或 2 个半分拆。当 k=2 时，在原级数 2+2M 拆分成的 15 类偶数中，不能被 3、5 整除的 8 类偶数皆对应 1.5 个全分拆或 3 个半分拆;单纯被 5 整除的 2 类偶数皆对应.2 个全分拆或 4 个半分拆;单纯被 3 整除的 4 类偶数皆对应 3 个全分拆或 6 个半分拆；而被 15 整除的 1 类偶数则对应 4 个全分拆或 8 个半分拆。

比较 **3.2** 可知，$P_{（1+1）}$（N）与偶数N所对应的全分拆数或半分拆数成正比关系。

4.4 分拆数

在 2+2M被分成的d_k类偶数中，其全分拆数和半分拆数α_{1k}、α'_{1k}皆是可求的。对于本文所关心的问题，设对应分拆数最多的 1 类和最少的$\varphi(D_k)$类偶数的全分拆数分别为$\alpha_{1k\max}$、$\alpha_{1k\min}$，即可推出

$$\alpha_{1k\max}=\frac{1}{2}\varphi(D_k) \tag{4}$$

$$\alpha_{1k\min}=\frac{1}{2}\prod_{k\geq1}(p_k-2) \tag{5}$$

根据全分拆与半分拆之间的换算关系，显然有

$$\alpha'_{1k\max}=\varphi(D_k) \tag{6}$$

$$\alpha'_{1k\min}=\prod_{k\geq1}(p_k-2) \tag{7}$$

需要注意的是，α_{1k}或α'_{1k}不能按表 1 中给出的分拆数直接推导，而必须继续拆分方可得到正确的结果。例如对于表 1 中的第 5 类偶数，当 k≥3 时，其全分拆数应为

$$\alpha_{1k}=\frac{2}{3}\prod_{k\geq1}(p_k-2)$$

而非

$$\alpha_{1k}=\frac{1}{4}\varphi(D_k)$$

4.5 等差级数直角坐标系

在平面直角坐标系中的第Ⅰ象限内，任一确定的偶数 N 对应的所有奇数对皆分布在直线 $x+y=N$ 上。一般地，这些奇数对可以分为素数对、合数对及混合数对三类。若不重复计，则在 $y\geq x$ 或 $y\leq x$ 的限定条件下，分布在直线 $y=x$ 的上方或下方（包括该直线）。

根据两个原级数 $2+2M$ 和 $1+2m$ 对应关系，可建立一平面直角坐标系。同理，任一类偶数 N 与其对应的各个分拆中的等差级数同样可分别建立平面直角坐标系。在这样的坐标系中，任一偶数对应的皆为奇数对。

对于任一类偶数 N，按其全分拆中的等差级数虽可建立 α_{1k} 个直角坐标系，但奇数对的分布显然不能满足上述的限定条件。

注意到对于确定的偶数 N 皆为各个全分拆中两个等差级数的各个元素逆序相加之和，这里将 $[l_i, N/2]$、$[l_i', N/2]$ 和 $[N/2, N-l_i']$、$[N/2, N-l_i]$ 分别定义为该两个等差级数的上半区间和下半区间。如果将该两个等差级数的上半区间或下半区间的所有元素进行交换，则构成两个半分拆，由此可建立 α_{1k}' 个平面直角坐标系，这时奇数对的分布自然满足上述的限定条件。

4.6 全分拆中等差级数中素数分布的均值公式

当 $d=d_k$ 时，在对 $1+2m$ 的拆分总共得到 $\varphi(D_k)$ 个首项与公差互素的同次等差级数中，可构成素数对的素数总数为

$$\pi_G(N)=\pi(N-p_k)-\pi(p_k) \tag{8}$$

据此可定义上述各等差级数中素数分布的均值公式

$$\overline{\pi}_G(N)=\frac{\pi_G(N)}{\varphi(D_k)} \tag{9}$$

鉴于该式的应用有一定的局限性，本文将针对具体问题再行定义。

考虑到在上述等差级数中奇次方数的分布是相对均匀的，对素数分布的影响不大；而偶次方数在合数出现次序上的优先性是导致素数分布不均匀的主要因素。

注意到当 k=1 时，首项为 7 的等差级数包含偶次方数；当 k=2 时，首项为 19、31 的等差级数包含偶次方数。据此可将首项与公差互素的等差级数分为两类，即含偶次方数的为一类，不含偶次方数的为一类。就其所包含的素数数目的平均值而言，前者一般不大于后者。

设这两类等差级数的数目分别为 β_k、β_k'，即可推出

$$\beta_k=\frac{1}{2^k}\varphi(D_k) \tag{10}$$

$$\beta_k'=\varphi(D_k)-\beta_k \tag{11}$$

设其包含素数的平均值分别为 $\overline{\pi}_{\min}(N)$、$\overline{\pi}_{\max}(N)$，即有

$$\overline{\pi}_{\max}(N)-\overline{\pi}_{\min}(N)=\frac{1}{\beta_k}\pi(\sqrt{N}) \tag{12}$$

$$\beta_k'\overline{\pi}_{\max}(N)+\beta_k\overline{\pi}_{\min}(N)=\pi_G(N) \tag{13}$$

式中：$\pi(\sqrt{N})$ 表示大于 p_k 而小于 N 的偶次方数之集合。

由式（12)、(13）可得

$$\overline{\pi}_{\max}(N)=\frac{1}{\varphi(D_k)}[\pi_G(N)+\pi(\sqrt{N})] \tag{14}$$

根据上述，对于对应全分拆数最多的 1 类偶数，注意到其全分拆中共有 β_k 个含偶次方数的等差级数，据此可推出其素数分布的均值公式为

$$\overline{\pi}_G(N)=\frac{(2\alpha_{1k\max}-\beta_k)\overline{\pi}_{\max}(N)+\beta_k\overline{\pi}_{\min}(N)}{2\alpha_{1k\max}} \tag{15}$$

$$=\frac{\pi_G(N)}{\varphi(D_k)}$$

相应地，在对应全分拆数最少的 $\varphi(D_k)$ 类偶数中，注意到其全分拆中最多的同样有 β_k 个含偶次方数的等差级数，命

$$\pi_g(N)=\pi_G(N)-\pi(\sqrt{N})\left[\prod_{k\geq1}\frac{p_k-1}{p_k-2}-1\right]$$

可推出其素数分布的均值公式为

$$\overline{\pi}_g(N)=\frac{(2\alpha_{1k\min}-\beta_k)\overline{\pi}_{\max}(N)+\beta_k\overline{\pi}_{\min}(N)}{2\alpha_{1k\min}} \tag{16}$$

$$=\frac{\pi_g(N)}{\varphi(D_k)}$$

4.7 哥德巴赫猜想上、下界近似式

根据表 1 中的各类偶数 N 与其对应的任一个全分拆中等差级数的关系，均可推出如下的整数恒等式

$$P_{(1+1)i}(N)=\pi_i(N)+\pi_i'(N)-n_i+Q_i \tag{17}$$

式中：n_i 为全分拆中等差级数诸元素所构成的奇数对的总数，Q_i 为所构成的合数对数目，$\pi_i(N)$、$\pi_i'(N)$ 分别为全分拆中两个等差级数在区间[l_i，N-l_i']和[l_i'，N-l_i]内素数的数目。

为解决$P_{（1+1）}$（N）的计算问题，不妨将式（17）式变形为

$$P_{(1+1)i}(N)\sim\frac{\pi_i(N)\pi_i'(N)-[n_i-\pi_i(N)-Q_i][n_i-\pi_i'(N)-Q_i]}{n_i-Q_i} \tag{18}$$

尽管式(18)中的Q_i是无法计算的，但可以将分母展开为级数形式并直接应用其主项

$$P_{(1+1)i}(N)\sim\frac{\pi_i(N)\pi_i'(N)}{n_i} \tag{19}$$

近似地计算$P_{（1+1）i}$（N）。

一般地，若计算某一偶数N所包含的素数对$P_{（1+1）}$（N），只须将与其对应的各个全分拆按式（19）计算后求和即可。注意到任一类偶数N如果包含素数对，其绝大多数存在第Ⅰ、Ⅱ列的分拆中，而第III列的全分拆中包含的素数对相对较少，故当N较大时可忽略不计。

对于任一类偶数N，当$d=d_k$时，与其对应的各个全分拆中等差级数所有元素构成的奇数对总数由下式计算

$$n_i = \left[\frac{N - L_j}{D_k} \right] \tag{20}$$

考虑到n_i是基本相等的，式（20）可以简化为

$$n \approx N / D_k \tag{21}$$

对于哥德巴赫猜想的上界，运用式（19）进行求和运算，并注意到式（4）、（15）、（21）得

$$\begin{aligned} P_{(1+1)\max}(N) &\sim \sum_{i=1}^{\alpha_{1k\max}} \frac{\pi_i(N)\pi_i'(N)}{n_i} \\ &\approx \frac{\alpha_{1k\max} D_k}{\varphi^2(D_k)} \cdot \frac{\pi_G^2(N)}{N} \\ &= C_{1k} \frac{\pi_G^2(N)}{N} \end{aligned} \tag{22}$$

式中：
$$C_{1k} = \prod_{k \ge 1} \left\{ 1 + \frac{1}{p_k - 1} \right\}$$

特别地，当$N = D_{k+1}$时，可以有

$$P_{(1+1)\max}(N) \approx \frac{\pi_G^2(N)}{2\varphi(D_{k+1})} \tag{23}$$

对于哥德巴赫猜想的下界，同样运用式（19）进行求和运算，并注意到式（5）、（16）、（21）得

$$\begin{aligned} P_{(1+1)\min}(N) &\sim \sum_{i=1}^{\alpha_{1k\min}} \frac{\pi_i(N)\pi_i'(N)}{n_i} \\ &\approx \frac{\alpha_{1k\min} D_k}{\varphi^2(D_k)} \cdot \frac{\pi_g^2(N)}{N} \\ &= C_{2k} \frac{\pi_g^2(N)}{N} \end{aligned} \tag{24}$$

式中：
$$C_{2k} = \prod_{k \ge 1} \left\{ 1 - \frac{1}{(p_k - 1)^2} \right\} = 0.66016\ldots\ldots$$

C_{2k}即 Hardy-Littlewood 猜想中的孪生素数常数C_2。

4.8 半分拆中等差级数中素数分布的均值公式

当$d = d_k$时，在对原级数 1+2m 拆分所得到的$\varphi(D_k)$个同次等差级数在半区间[l_i，N/2]、[N/2，N-l_i']或[l_i'，N/2]、 [N/2，N-l_i]内可构成素数对的素数总数分别为

$$\pi_{1G}(N/2)=\pi(N/2)-\pi(p_k) \tag{25}$$

$$\pi_{2G}(N/2)=\pi(N-p_k)-\pi(N/2) \tag{26}$$

按照 **3.6**，可推出

$$\overline{\pi}_{1\max}(N/2)=\frac{1}{\varphi(D_k)}[\pi_{1G}(N/2)+\pi_1(\sqrt{N/2})] \tag{27}$$

$$\overline{\pi}_{2\max}(N/2)=\frac{1}{\varphi(D_k)}[\pi_{2G}(N/2)+\pi_2(\sqrt{N/2})] \tag{28}$$

式中：$\pi_1(\sqrt{N/2})$、$\pi_2(\sqrt{N/2})$ 分别为各等差级数在上述两个半区间内的偶次方数之集合。

对于对应半分拆数最多的 1 类偶数，据此可分别推出其素数分布均值公式为

$$\overline{\pi}_{1G}(N/2)=\frac{\pi_{1G}(N/2)}{\varphi(D_k)} \tag{29}$$

$$\overline{\pi}_{2G}(N/2)=\frac{\pi_{2G}(N/2)}{\varphi(D_k)} \tag{30}$$

对于对应半分拆数最少的 $\varphi(D_k)$ 类偶数，分别命

$$\pi_{1g}(N)=\pi_{1G}(N/2)-\pi_1(\sqrt{N/2})\left[\prod_{k\geq1}\frac{p_k-1}{p_k-2}-1\right]$$

$$\pi_{2g}(N)=\pi_{2G}(N/2)-\pi_2(\sqrt{N/2})\left[\prod_{k\geq1}\frac{p_k-1}{p_k-2}-1\right]$$

可分别推出其素数分布均值公式为

$$\overline{\pi}_{1g}(N/2)=\frac{(\alpha'_{1k\min}-\beta_k)\overline{\pi}_{1G\max}(N/2)+\beta_k\overline{\pi}_{1G\min}(N/2)}{\alpha'_{1k\min}}=\frac{\pi_{1g}(N/2)}{\varphi(D_k)} \tag{31}$$

$$\overline{\pi}_{2g}(N/2)=\frac{(\alpha'_{1k\min}-\beta_k)\overline{\pi}_{2G\max}(N/2)+\overline{\pi}_{2G\min}(N/2)}{\alpha'_{1k\min}}=\frac{\pi_{2g}(N/2)}{\varphi(D_k)} \tag{32}$$

4.9 哥德巴赫猜想上、下界渐近式

根据表 1 中的所有偶数 N 与其对应的各个半分拆中等差级数的关系，同样可推出如下的整数恒等式

$$P_{(1+1)i}(N)=\pi_i(N/2)+\pi'_i(N/2)-n_i+Q_i \tag{33}$$

式中：n_i 为半分拆中的等差级数的所有元素构成的奇数对的总数，Q_i 为所构成的合数对数目，$\pi_i(N/2)$、$\pi'_i(N/2)$ 分别为半分拆中两个等差级数在区间[l_i，N/2]、[l'_i，N/2]或[N/2，

N-l_i']、[N/2，N-l_i]内素数的数目。

按照 **3.7**，由式（33）可得到下列的变型式和近似式

$$P_{(1+1)i}(N) \sim \frac{\pi_i(N/2)\pi_i'(N/2) - [n_i - \pi_i(N/2) - Q_i][n_i - \pi_i'(N/2) - Q_i]}{n_i - Q_i} \tag{34}$$

$$P_{(1+1)i}(N) \sim \frac{\pi_i(N/2)\pi_i'(N/2)}{n_i} \tag{35}$$

对于任一类偶数N，当d=d_k时，与其对应的各个分拆中等差级数构成的奇数对由下式计算

$$n_i = \left[\frac{N - L_j}{2D_k}\right] \tag{36}$$

考虑到n_i是基本相等的，式（36）可以简化为

$$n \approx N/2D_k \tag{37}$$

对于哥德巴赫猜想的上界，运用式（35）进行求和运算，并注意到式（6）、(29)、(30)、(37）得

$$\begin{aligned} P_{(1+1)\max}(N) &\sim \sum_{i=1}^{\alpha_{1k\max}'} \frac{\pi_i(N/2)\pi_i'(N/2)}{n_i} \\ &\approx 2 \cdot \frac{\alpha_{1k\max}' D_k}{\varphi^2(D_k)} \cdot \frac{\pi_{1G}(N/2)\pi_{2G}(N/2)}{N} \\ &= 4C_{1k} \frac{\pi_{1G}(N/2)\pi_{2G}(N/2)}{N} \end{aligned} \tag{38}$$

特别地，当$N = D_{k+1}$时，可以有

$$P_{(1+1)\max}(N) \approx \frac{2\pi_{1G}(N)\pi_{2G}(N)}{\varphi(D_{k+1})} \tag{39}$$

对于哥德巴赫猜想的下界，运用式（35）进行求和运算，并注意到式（7）、(31)、(32)、(37）得

$$\begin{aligned} P_{(1+1)\min}(N) &\sim \sum_{i=1}^{\alpha_{1k\min}'} \frac{\pi_i(N/2)\pi_i'(N/2)}{n_i} \\ &\approx 2 \cdot \frac{\alpha_{1k\min}' D_k}{\varphi^2(D_k)} \cdot \frac{\pi_{1g}(N/2)\pi_{2g}(N/2)}{N} \\ &= 4C_{2k} \frac{\pi_{1g}(N/2)\pi_{2g}(N/2)}{N} \end{aligned} \tag{40}$$

式（38)、(40）的计算结果较式（22)、(24）更为准确一些。

5. 广义孪生素数猜想问题

5.1 命题

若存在无穷多个素数 p，使得 p+2t（t≠0）亦为素数。这里，2t 称为孪差。当 t=1 时，此

即孪生素数猜想。

5.2 原级数 1+2m 与孪差 2t 的拆分问题

若 $D_k \le N-2t \le 2(D_{k+1}-1)$，则当 $d=d_k$ 时，奇原级数 1+2m 拆分结果与 **1.2** 相同；孪差 2t 的拆分结果与 **1.3** 相同。

5.3 偶数分拆问题

5.3.1 分拆定义

表 2 广义孪生素数分拆对应规律

序号	2t	等差级数首项（l_i, l_i'） I	II	III	IV
	M≥0	（k=1，公差为 6）			
1	2+6M	（7，5）		（5，3）、（9，7）	
2	4+6M	（11，7）		（7，3）、（13，9）	
3	6+6M	（11，5）、（13，7）		（9，3）	
	M≥0	（k=2，公差为 30）			
1	2+30M	（13，11）、（19，17） （31，29）	（5，3） （7，5）	（9，7）、（11，9）、（15，13）、（17，15）、（21，19） （23，21）、（25，23）、（29，27）、（33，31）	（27，25）
2	4+30M	（11，7）、（17，13） （23，19）	（7，3）	（9，5）、（13，9）、（15，11）、（19，15）、（21，17） （27，23）、（29，25）、（31，27）、（33，29）、（35，31）	（25，21）
3	6+30M	（13，7）、（17，11） （19，13）、（23，17） （29，23）、（37，31）	（11，5）	（9，3）、（25，19）、（21，13）、（31，25）	（15，9） （21，15） （27，21） （33，27）
4	8+30M	（19，11）、（31，23） （37，29）	（11，3） （13，5）	（15，7）、（17，9）、（21，13）、（23，15）、（25，17） （27，19）、（29，21）、（35，27）、（39，31）	（33，25） （27，9）
5	10+30M	（17，7）、（23，13）、 （29，19）、（41，31）	（13，3）	（15，5）、（19，9）、（21，11）、（27，17）、（31，21） （33，23）、（37，27）、（39，29）	（25，15） （35，25）
6	12+30M	（19，7）、（23，11） （29，17）、（31，19） （41，29）、（43，31）	（17，5）	（15，3）、（25，13）、（35，23）、（37，25）	（21，9） （27，15） （33，21） （39，27）
7	14+30M	（31，17）、（37，23） （41，29）	（17，3） （19，5）	（21，7）、（23，9）、（25，11）、（27，13）、（29，15） （33，19）、（41，27）、（45，31）	（35，21） （39，25）
8	16+30M	（23，7）、（29，13） （47，31）	（19，3）	（21，5）、（27，11）、（31，15）、（33，17）、（35，19） （37，21）、（39，23）、（41，25）、（43，27）、（45，29）	（25，9）
9	18+30M	（29，11）、（31，13） （37，19）、（41，23） （47，29）、（49，31）	（23，5）	（21，3）、（25，7）、（35，17）、（27，19） （43，25）	（27，9） （33，15） （39，21） （45，27）

10	20+30*M*	（31，11）、（37，17） （43，23）、（49，29）	（23，3）	（25， 5）、（27， 7）、（29， 9）、（33， 3）、（39，19） （41，21）、（47，27）、（51，31）	（35，15） （45，25）
11	22+30*M*	（29， 7）、（41，19） （53，31）		（25， 3）、（27， 5）、（31， 9）、（33，11）、（35，13） （37，15）、（39，17）、（43，21）、（45，23）、（47，25） （49，27）、（51，29）	
12	24+30*M*	（31， 7）、（37，13） （41，17）、（43，19） （47，23）、（53，29）	（29，5）	（27， 3）、（35，11）、（49，25）、（31，55）	（33， 9） （39，15） （45，21） （51，27）
13	26+30*M*	（37，11）、（43，17） （49，23）	（29，3） （31，5）	（33， 7）、（39，13）、（41，15）、（45，19）、（47，21） （27，53）、（29，55）、（31，57）	（35， 9） （51，25）
14	28+30*M*	（41，13）、（47，19） （59，31）	（31，3）	（33， 5）、（35， 7）、（37， 9）、（39，11）、（43，15） （49，21）、（51，23）、（53，25）、（57，29）	（53，25） （55，27）
15	30+30*M*	（37， 7）、（41，11） （43，13）、（47，17） （49，19）、（53，23） （59，29）、（61，31）		（33， 3）、（35， 5）	（39， 9） （45，15） （51，21） （55，25） （57，27）

对于任一偶数 N，若 $y=x-2t$，x、y 均为奇数，且 $x\geq3$，$y\geq3$，则(x, y)定义为该偶数的一个广义孪生素数分拆，以下简称分拆。

5.3.2 对应规律

当k=1 时，注意到$t\leq d_k$、且 1 不是素数，以D_k+1 补位后从原级数 1+2m的拆分得到的 3 个等差级数中任取 2 个按孪差 2、4、6 进行组合，可得到 9 个全分拆。当k=2 时，从原级数 1+2m的拆分得到 15 个等差级数按孪差 2、4、6、…、28、30 进行组合，可得到 225 个全分拆。

明显地，这些等差级数之组合即为偶数 N 所对应的分拆（见表 2）。

当$d=d_k$时，如果从原级数 1+2m的拆分所得到的d_k个同次等差级数中任取 2 个按上述方法进行组合，总共可以得到d_k^2个全分拆。其中：第 I 列的全分拆为φ^2（D_k）个，后四列为[d_k^2-φ^2（D_k）]个。

本文以后所提及的全分拆，如不特别说明，均指表 2 中第 I 列的全分拆。

5.4 P[2t]（N）- N 之对应关系

广义孪生素数$P_{[2t]}$（N）与偶数N之对应关系可参照 **3.2**。

5.5 P[2t]（N）与分拆之对应关系

观察表 2 并参照 **3.3**，即知$P_{[2t]}$（N）与偶数N所对应的全分拆数成正比关系。

5.6 分拆数

在对孪差 2t拆分所得到的d_k类偶数中，对于对应全分拆最多的 1 类和最少的$\varphi(D_k)$类偶

数，设其全分拆数分别为$\alpha_{2k\max}$、$\alpha_{2k\min}$，可推出

$$\alpha_{2k\max}=\varphi(D_k) \tag{41}$$

$$\alpha_{2k\min}=\prod_{k\geq 1}(p_k-2) \tag{42}$$

5.7 等差级数中素数分布的均值公式

根据 **4.2**，当$d=d_k$时，任一类偶数 N 所对应的全分拆中的等差级数按 $y=x-2t$ 分成两组，在这两组等差级数中可构成广义孪生素数的素数数目分别为

$$\pi_T(N)=\pi(N-2t)-\pi(p_k) \tag{43}$$

$$\pi'_T(N)=\pi(N)-\pi(2t) \tag{44}$$

按照 **3.6** 可推出

$$\overline{\pi}_{\max}(N)=\frac{1}{\varphi(D_k)}[\pi_T(N)+\pi(\sqrt{N})] \tag{45}$$

$$\overline{\pi}'_{\max}(N)=\frac{1}{\varphi(D_k)}[\pi'_T(N)+\pi(\sqrt{N})] \tag{46}$$

对于包含广义孪生素数最多的一类偶数，注意到与其对应的全分拆中的两组等差级数各有β_k个包含偶次方数，据此可分别推出其全分拆中等差级数素数分布的均值公式为

$$\overline{\pi}_T(N)=\frac{(\alpha_{2k\max}-\beta_k)\overline{\pi}_{\max}(N)+\beta_k\overline{\pi}_{\min}(N)}{\alpha_{2k\max}} \tag{47}$$

$$=\frac{\pi_T(N)}{\varphi(D_k)}$$

$$\overline{\pi}'_T(N)=\frac{(\alpha_{2k\max}-\beta_k)\overline{\pi}_{\max}(N)+\beta_k\overline{\pi}_{\min}(N)}{\alpha_{2k\max}} \tag{48}$$

$$=\frac{\pi'_T(N)}{\varphi(D_k)}$$

对于包含广义孪生素数最少的$\varphi(D_k)$类偶数，注意到与其对应全分拆中的一组等差级数最多有β_k个包含偶次方数，而另一组不包含偶次方数，命

$$\pi_{2t}(N)=\pi_T(N)-\pi(\sqrt{N})\left[\prod_{k\geq 1}\frac{p_k-1}{p_k-2}-1\right]$$

可分别推出其均值公式为

$$\overline{\pi}_{2t}(N)=\frac{(\alpha_{2k\min}-\beta_k)\overline{\pi}_{\max}(N)+\beta_k\overline{\pi}_{\min}(N)}{\alpha_{2k\min}} \tag{49}$$

$$=\frac{\pi_{2t}(N)}{\varphi(D_k)}$$

$$\overline{\pi}'_{2t}(N)=\overline{\pi}'_{\max}(N) \tag{50}$$

$$=\frac{1}{\varphi(D_k)}[\pi_T'(N)+\pi(\sqrt{N})]$$

当 t=1 时，综合式（43）、（44），并注意到两组等差级数中共有 β_k 个包含偶次方数，命

$$\pi_2(N)=\pi_T(N)-\pi(\sqrt{N})\left[\frac{1}{2}\prod_{k\geq 1}\frac{p_k-1}{p_k-2}-1\right]$$

可推出其均值公式为

$$\bar{\pi}_2(N)=\frac{(2\alpha_{2k\min}-\beta_k)\bar{\pi}_{\max}(N)+\beta_k\bar{\pi}_{\min}(N)}{2\alpha_{2k\min}} \quad (51)$$

$$=\frac{\pi_2(N)}{\varphi(D_k)}$$

5.8 渐近式

根据表 2 中任一类偶数与其分拆中等差级数的对应关系，亦可推出如下的整数恒等式

$$P_{[2t]i}(N)=\pi_i(N)+\pi_i'(N)-n_i+Q_i \quad (52)$$

式中：n_i为全分拆中的两个等差级数所有元素构成的广义孪生奇数的总数，Q_i为所构成的广义孪生合数对的数目，$\pi_i(N)$、$\pi_i'(N)$ 分别为在区间[l_i，N-2t]、[2t，N]内素数的数目。

按照 **3.7**，由式（52）可得到下列的变型式和近似式

$$P_{[2t]i}(N)\sim\frac{\pi_i(N)\pi_i'(N)-[n_i-\pi_i(N)-Q_i][n_i-\pi_i'(N)-Q_i]}{n_i-Q_i} \quad (53)$$

$$P_{[2t]i}(N)\sim\frac{\pi_i(N)\pi_i'(N)}{n_i} \quad (54)$$

若计算某一偶数N所包含的广义孪生素数$P_{[2t]}$（N），只须将与其对应的各个全分拆按式（54）计算后求和即可。注意到任一类偶数N如果包含$P_{[2t]}$（N），其绝大多数存在第 I 列的分拆中，而第 II 列的分拆中包含的广义孪生素数相对较少，故当N较大时可忽略不计。

对于任一类偶数N，当d=d_k时，与其对应的各个分拆中等差级数构成的广义孪生奇数的总数由下式计算

$$n_i=\left[\frac{N-L_j}{D_k}\right] \quad (55)$$

式中：$L_j=l_{max}$，l_{max}为偶数N对应的全分拆中两个等差级数的首项之较大者。

考虑到n_i是基本相等的，式（55）可以简化为

$$n\approx N/D_k \quad (56)$$

对于包含广义孪生素数最多的一类偶数，运用式（54）进行求和运算并注意到式（41）、（47）、（48）、（56）得

$$P_{[T]\max}(N)\sim\sum_{i=1}^{\alpha_{2k\max}}\frac{\pi_i(N)\pi_i'(N)}{n_i} \quad (57)$$

$$\approx \frac{\alpha_{2k\max} D_k}{\varphi^2(D_k)} \cdot \frac{\pi_T(N)\pi'_T(N)}{N}$$

$$= 2C_{1k}\frac{\pi_T(N)\pi'_T(N)}{N}$$

对于包含广义孪生素数最少的偶数，同样运用式（54）进行求和运算并注意到式（42）、（49）、（50）、（56）得

$$P_{[2t]}(N) \sim \sum_{i=1}^{\alpha_{2k\min}} \frac{\pi_i(N)\pi'_i(N)}{n_i} \tag{58}$$

$$\approx \frac{\alpha_{2k\min} D_k}{\varphi^2(D_k)} \cdot \frac{\pi_{2t}(N)\pi'_{2t}(N)}{N}$$

$$= 2C_{2k}\frac{\pi_{2t}(N)\pi'_{2t}(N)}{N}$$

特别地，对于孪生素数猜想，按照上述并注意到式（51），可推出

$$P_{[2]}(N) \approx 2C_{2k}\frac{\pi_2^2(N)}{N} \tag{59}$$

根据上述，对于广义孪生素数来说，其分拆数是随 t 的变化而变化的；即使分拆系数相同，其素数分布的均值公式也不尽相同。

对比表 1、表 2 可知：哥德巴赫全分拆数（第Ⅰ、Ⅱ列）与广义孪生素数全分拆数（第Ⅰ列）之比为 1:2；哥德巴赫分拆的偶数分类受 N 本身控制，对应的既有全分拆，也有半分拆，广义孪生素数分拆的偶数分类则受孪差 $2t$ 控制，对应的皆为全分拆；另外在平面直角坐标系中，前者分布在直线 $x+y=N$ 上，后者则分布在直线 $y=x-2t$ 上。

6. 三生素数猜想问题

6.1 命题

存在无穷多个素数 p，使得 $p+2$、$p+6$ 亦为素数。

6.2 分拆数

当 $k=2$ 时，根据孪生素数只能在等差级数 $11+30m$，$13+30m$；$17+30m$，$19+30m$；$29+30m$，$31+30m$ 中产生，可知除（5，7；11）之外，三生素数只能在（$11+30m$，$13+30m$；$17+30m$）和（$17+30m$，$19+30m$；$23+30m$）中产生。

当 $k\geq 2$ 时，可推出其分拆数为

$$\alpha_{3k} = \prod_{k\geq 2}(p_k - 3) \tag{60}$$

6.3 素数分布的均值公式

注意到任一偶数 N 所对应的分拆包含的等差级数中，共有 $\beta_k/2$ 个包含偶次方数，命

$$\pi_3(N)=\pi_T(N)-\pi(\sqrt{N})\left[\frac{1}{3}\prod_{k\ge 2}\frac{p_k-1}{p_k-3}-1\right]$$

可推出其均值公式为

$$\overline{\pi}_3(N)=\frac{(3\alpha_{3k}-\beta_k/2)\overline{\pi}_{\max}(N)+(\beta_k/2)\overline{\pi}_{\min}(N)}{3\alpha_{3k}} \quad (61)$$

$$=\frac{\pi_3(N)}{\varphi(D_k)}$$

6.4 渐近式

若用 $P_{(3)}(N)$ 表示小于偶数 N 的三生素数的数目，则根据任一类偶数 N 与其各个分拆中等差级数的对应关系，均可推出如下的整数恒等式

$$P_{(3)i}(N)=P_{[2]i}(N)+\pi_i(N)-n_i+Q_i \quad (62)$$

式中：n_i 为三生奇数的总数，Q_i 为三生合数的数目，$P_{[2]i}(N)$、$\pi_i(N)$ 分别为在各自所在区间内孪生素数和素数的数目。

按照 **3.7**，由式（62）可得到下列的变型式和近似式

$$P_{(3)i}(N)\sim\frac{P_{[2]i}(N)\pi_i(N)-[n_i-P_{[2]i}(N)-Q_i][n_i-\pi_i(N)-Q_i]}{n_i-Q_i} \quad (63)$$

$$P_{(3)i}(N)\sim\frac{P_{[2]i}(N)\pi_i(N)}{n_i} \quad (64)$$

对于任一类偶数N，当$d=d_k$时，与其对应的各个分拆中等差级数所有元素构成的三生奇数的总数由下式计算

$$n_i=\left[\frac{N-L_j}{D_k}\right] \quad (65)$$

式中：$L_j=l_{max}$，l_{max}为分拆中三个等差级数的首项之最大者。

考虑到 n_i 是基本相等的，式（63）可以简化为

$$n\approx N/D_k \quad (66)$$

运用式（64）进行求和运算，并注意到式（60)、(61)、(66）得

$$P_{(3)}(N)\sim\sum_{i=1}^{\alpha_{3k}}\frac{P_{[2]i}(N)\pi_i(N)}{n_i} \quad (67)$$

$$\approx\frac{\alpha_{3k}D^2{}_k}{\varphi^3(D_k)}\cdot\frac{\pi_3^3(N)}{N^2}$$

$$=C_{3k}\frac{\pi_3^3(N)}{N^2}$$

式中：
$$C_{3k}=2\prod_{k\ge1}\left\{1+\frac{1}{p_k-1}\right\}^2\cdot\prod_{k\ge2}\left\{1-\frac{2}{p_k-1}\right\}$$

7. 四生素数猜想问题

7.1 命题

存在无穷多个素数 p，使得 p+2、p+6、p+8 亦为素数。

7.2 分拆数

当 k=2 时，根据孪生素数只能在等差级数 11+30m，13+30m；17+30m，19+30m；29+30m，31+30m 中产生（见表 2），可知除（5，7；11，13）之外，四生素数只能在（11+30m，13+30m；17+30m，19+30m）中产生。

当 k≥2 时，可推出其分拆数为

$$\alpha_{4k}=\prod_{k\ge2}(p_k-4) \tag{68}$$

7.3 素数分布的均值公式

注意到任一偶数 N 所对应的分拆包含的等差级数中，共有 $\beta_k/2$ 个包含偶次方数，命

$$\pi_4(N)=\pi_T(N)-\pi(\sqrt{N})\left[\frac{1}{4}\prod_{k\ge2}\frac{p_k-1}{p_k-4}-1\right]$$

可推出其均值公式为

$$\overline{\pi}_4(N)=\frac{(4\alpha_{4k}-\beta_k/2)\overline{\pi}_{\max}(N)+(\beta_k/2)\overline{\pi}_{\min}(N)}{4\alpha_{4k}} \tag{69}$$
$$=\frac{\pi_4(N)}{\varphi(D_k)}$$

7.4 渐近式

若用 $P_{(4)}(N)$ 表示小于 N 的四生素数的数目，则根据任一类偶数 N 与其各个分拆中等差级数的对应关系，均可推出如下的整数恒等式

$$P_{(4)i}(N)=P_{[2]i}(N)+P'_{[2]i}(N)-n_i+Q_i \tag{70}$$

式中：n_i 为四生奇数的总数，Q_i 为四生合数的数目，$P_{[2]i}(N)$、$P'_{[2]i}(N)$ 分别为在各自所在区间内孪生素数的数目。

按照 **3.7**，由式（70）可得到下列的变型式和近似式

$$P_{(4)i}(N)\sim\frac{P_{[2]i}(N)P'_{[2]i}(N)-[n_i-P_{[2]i}(N)-Q_i][n_i-P'_{[2]i}(N)-Q_i]}{n_i-Q_i} \tag{71}$$

$$P_{(4)i}(N)\sim\frac{P_{[2]i}(N)P'_{[2]i}(N)}{n_i} \tag{72}$$

对于任一类偶数N，当$d=d_k$时，与其对应的各个分拆中等差级数所有元素构成的四生奇数的总数由下式计算

$$n_i = \left\lceil \frac{N - L_j}{D_k} \right\rceil \tag{73}$$

式中：$L_j = l_{max}$，l_{max}为四生素数分拆中 4 个等差级数的首项之最大者。

考虑到n_i是基本相等的，式（73）可以简化为

$$n \approx N / D_k \tag{74}$$

运用式（72）进行求和运算，并注意到式（68）、（69）、（74）得

$$\begin{aligned} P_{(4)}(N) &\sim \sum_{i=1}^{\alpha_{4k}} \frac{P_{[2]i}(N)P'_{[2]i}(N)}{n} \\ &\approx \frac{\alpha_{4k} D^3{}_k}{\varphi^4(D_k)} \cdot \frac{\pi_4^4(N)}{N^3} \\ &= C_{4k} \frac{\pi_4^4(N)}{N^3} \end{aligned} \tag{75}$$

式中：
$$C_{4k} = 4\prod_{k\geq 1}\left\{1+\frac{1}{p_k - 1}\right\}^3 \cdot \prod_{k\geq 2}\left\{1-\frac{3}{p_k - 1}\right\}$$

8．其它 n（n≤8）生素数猜想问题

鉴于 n 生素数猜想分布渐近式的推导方法及过程与前述基本相同，这里直接给出命题、分拆数、素数分布均值公式的分子部分、相关的渐近式及系数表达式。当然，下面的命题与现有的 n 生素数定义虽然有所不同，但其推导方法并没有本质上的区别。

8.1 命题

存在无穷多个素数p，使得p+2、p+6、p+8、p+12 亦为素数；表为$P_{(5)}$（N）。

存在无穷多个素数p，使得p+2、p+6、p+8、p+12、p+18 亦为素数；表为$P_{(6)}$（N）。

存在无穷多个素数p，使得p+2、p+6、p+8、p+12、p+18、p+20 亦为素数；表为$P_{(7)}$（N）。

存在无穷多个素数p，使得p+2、p+6、p+8、p+12、p+18、p+20、p+26 亦为素数；表为$P_{(8)}$（N）。

8.2 渐近式

$$\alpha_{5k} = \prod_{k\geq 3}(p_k - 5) \tag{76}$$

$$\pi_5(N) = \pi_T(N) - \pi(\sqrt{N})\left[\frac{4}{5}\prod_{k\geq 3}\frac{p_k - 1}{p_k - 5} - 1\right]$$

$$P_{(5)} \approx C_{5k}\frac{\pi_5^5(N)}{N^4} \tag{77}$$

式中：
$$C_{5k}=2\prod_{k\ge1}\left\{1+\frac{1}{p_k-1}\right\}^4\cdot\prod_{k\ge3}\left\{1-\frac{4}{p_k-1}\right\}$$

$$\alpha_{6k}=\prod_{k\ge3}(p_k-6) \tag{78}$$

$$\pi_6(N)=\pi_T(N)-\pi(\sqrt{N})\left[\frac{2}{3}\prod_{k\ge3}\frac{p_k-1}{p_k-6}-1\right]$$

$$P_{(6)}\approx C_{6k}\frac{\pi_6^6(N)}{N^5} \tag{79}$$

式中：
$$C_{6k}=4\prod_{k\ge1}\left\{1+\frac{1}{p_k-1}\right\}^5\cdot\prod_{k\ge3}\left\{1-\frac{5}{p_k-1}\right\}$$

$$\alpha_{7k}=\prod_{k\ge4}(p_k-7) \tag{80}$$

$$\pi_7(N)=\pi_T(N)-\pi(\sqrt{N})\left[\frac{48}{7}\prod_{k\ge4}\frac{p_k-1}{p_k-7}-1\right]$$

$$P_{(7)}\approx C_{7k}\frac{\pi_7^7(N)}{N^6} \tag{81}$$

式中：
$$C_{7k}=\frac{4}{3}\prod_{k\ge1}\left\{1+\frac{1}{p_k-1}\right\}^6\cdot\prod_{k\ge4}\left\{1-\frac{6}{p_k-1}\right\}$$

$$\alpha_{8k}=\prod_{k\ge4}(p_k-8) \tag{82}$$

$$\pi_8(N)=\pi_T(N)-\pi(\sqrt{N})\left[6\prod_{k\ge4}\frac{p_k-1}{p_k-8}-1\right]$$

$$P_{(8)}\approx C_{8k}\frac{\pi_8^8(N)}{N^7} \tag{83}$$

式中：
$$C_{8k}=\frac{8}{3}\prod_{k\ge1}\left\{1+\frac{1}{p_k-1}\right\}^7\cdot\prod_{k\ge4}\left\{1-\frac{7}{p_k-1}\right\}$$

综上所述，有

$$\alpha_{nk}=\prod_{p_k\phi n}(p_k-n) \tag{84}$$

$$\overline{\pi}_n(N)=\frac{\pi_n(N)}{\varphi(D_k)} \tag{85}$$

$$P_{(n)}\approx C_{nk}\frac{\pi_n^n(N)}{N^{n-1}} \tag{86}$$

式中：
$$C_{nk}=2^{n-1}\prod_{p_k\ge3}\left\{1+\frac{1}{p_k-1}\right\}^{n-1}\cdot\frac{\prod_{p_k\phi n}(p_k-n)}{\prod_{p_k\ge3}(p_k-1)}$$

需要指出的是，其素数分布的均值公式$\overline{\pi}_n(N)$需要具体定义。

9．结论与讨论

9.1 所推导的相关渐近式对哥德巴赫猜想及 n 生素数猜想分布的拟合程度是相当准确的。

9.2 全面揭示了哥德巴赫猜想与广义孪生素数猜想分布的对应规律，扩充并深化了原有的认识。

9.3 哥德巴赫猜想、广义孪生素数猜想的分布规律按偶数 N 或孪差 $2t$ 的类别有不同的渐近式或系数表达式。

9.4 由表 1 可知，本文基本解决了余新河数学猜想问题。

9.5 本文所推导的孪生素数分布渐近式与 Hardy-Littlewood 猜想是有一定的差异的。

9.6 当取极限时，n生素数猜想渐近式中的系数C_{nk}为有限常数，而其主项部分则随n的增大而迅速减少，即知其分布越来越稀疏。

9.7 关于余项的估计的问题，可否将式（16）的分子简化为

$$\pi_g(N)=\pi(N)-\pi(\sqrt{N})\prod_{k\geq 1}\frac{p_k-1}{p_k-2}$$

这里$\pi(\sqrt{N})$定义为不大于 N 的偶次方数之集合，同时将式（21）做进 1 法圆整处理，C_{2k}取 0.66016 计算，则式（24）的结果更为精确，其它则依此类推。

9.8 对于“1+2”问题，当 $N\geq 12$ 时，可推出其下界的渐近式：$P_{(1+2)\min}\approx\overline{\pi}_G(N)-2P_{(1+1)\max}$。

参考文献

[1]华罗庚，《数论导引》，北京，科学出版社，1979.88.

A brief discussion about the law of apparition of Goldbach's conjecture and *n*-derivated prime number's conjecture

Zhang Chunshan
Post Doctor Scientific Research Working Station of Liaohe Oilfield, Panjin, Liaoning (124010）

Abstract
Based on the splitting of natural series, the classification and partition of even numbers are researched in this paper to disclose the rule of correspondence between all kinds of even numbers and their partitions in order that summation can be changed into integration by using the defined mean value formula for the distribution of prime numbers and the related identical equation for whole numbers. The asymptotic formula for the distribution of Goldbach's conjecture and *n*-derivated prime number's conjecture is derived for the first and the law of apparition is described accurately.
Keywords: even number　prime number　series　conjecture　asymptotic formula

作者简介：张春山，男，1955 年 4，高级工程师，主要从事科研管理工作；业余爱好：数论。