计算孪生素数的一个新公式

许作铭[1] ，罗贵文[2] ，巴向前[3]
1.辽宁大学科研处，沈阳（ 110036 ）
2.辽宁省轻工科学研究院，沈阳 （110036）
3.辽宁大学教务处，沈阳（ 110036 ）
E-mail: xzm9@163.com

摘要：本文通过创立一种新的筛法，得到并证明了计算孪生素数的一个新公式或称孪生素数定理。估计孪生素数的实际分布，应用孪生素数定理比应用Harday-Littlewood猜想有效。

关键词：素数分布；孪生素数；台阶系数；筛法；孪生素数猜想。

中国图书资料分类号：O156.1 O156.4 **文献标识码**：A

1. 引言

自从 1849 年波林那克提出孪生素生猜想（the conjecture of twin primes）以来。一直吸引着众多的数学家及数学爱好者孜孜以求地钻研.早在 20 世纪初,德国数学家兰道就推测孪生素数有无穷多.1919 年,挪威数学家布隆仿照欧拉的方法,求所有孪生素数的倒数和:

$$B=(1/3+1/5)+(1/5+1/7)+(1/11+1/13)+...$$

如果能证明这个和比任何数都大,就证明了孪生素数有无穷多个了.这个想法很好,可是事实却违背了布隆的意愿.他证明了这个倒数和是一个有限数,现在这个常数就被称为布隆常数:B=1.90216054...布隆还发现,对于任何一个给定的整数 m,都可以找到 m 个相邻素数,其中没有一个孪生素数.

孪生素数猜想还有一个更强的形式，由英国数学家 Hardy 和 Littlewood 于 1923 年提出，现在通常称为 Hardy-Littlewood 猜想或强孪生素数猜想。这一猜想不仅提出孪生素数有无穷多组，而且还给出其渐近分布形式为：

$$\pi_2(x) \approx 2c\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \qquad \pi_2(x) \ge \frac{2cx}{(\ln x)^2} \text{ 其中 } c=\prod_{p\ge3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \approx 0.66016118158468695739278121100145...$$

1966 年，中国数学家陈景润在这方面得到最好的结果：存在无穷多个素数 p，使 p+2 是不超过两个素数之积。（见[1]陈景润，初等数论，7-10）

本文通过创造一种新的方法—— $p(xe,)$ 筛法，得到并证明了孪生素数定理。计算不大于 x 的孪生素数的数目 $Z(x)$ 比应用 Harday-Littlewood 猜想有效。例如计算不大于 1160 的孪生素数对的数目：利用孪生素数定理：$39 \le Z(1160) \le 53$，$\sigma_{14}=45.50$；利用 Harday-Littlewood 猜想：$31 \le \pi_2(1160)$=50，实际上 $Z(1160)$=41。计算不大于 1000053941 的孪生素数对的数目：利用孪生素数定理：$3422712 \le Z(1000053941) \le 3428068$，$\sigma_{10624}=3425391.72$；利用 Harday-Littlewood 猜想：$3075994 \le \pi_2(1160)$=3425474，实际上 $Z(1000053941)=$=3424680。Harday-Littlewood 猜想值有时大于实际数，有时小于实际数，因此既不能作为上确界更不能

作为下确界。

2． $p(xe,)$筛法 2

2.1 素数的台阶系数与台阶尾数的关系

$$\left[e^{1/f(xe,)}\right]=b(xe,) \qquad (2\text{-}1)$$

$f(xe,)=\prod_{p\le p(xe,)}\frac{p-1}{p}$ 为素数的台阶系数， $p(xe,)$为台阶素数，$b(xe,)$为台阶尾数。（见[2] 许作铭等沈阳师范大学学报 2006 24 卷 第 4 期 388-391）

2.2 $p(xe,)$筛法 2

定义1 $p(xe,)$筛法 2 将正整数 x 逐次乘以 2,3,5,..... $p(xe,)$，其数值达到 $x\prod_{p\le p(xe,)}p$。然后将其分成若干个个数相等的 X 区间，其数量为 $\prod_{p\le p(xe,)}p$ 个。首先将 2，3 及其合数筛去。然后把位于数列$\{5+6k\}$ （$k\in N$）之中，5，7，11，13⋯ $p(xe,)$及其合数全部筛去，再将这些素数和合数加 2 的那些数字也全部筛去。将$\{1+6k\}$ （$k\in N$）之中，5，7，11，13，17 直到 $p(xe,)$及其合数全部筛去，再将这些素数和合数减 2 的那些数全部筛去。这种筛法叫做 $p(xe,)$ 筛法 2 或∏P 筛法 2。

经过上述筛分后，在每个 $\prod_{p\le p(xe,)}p$ 中剩余数字对数为 $\frac{1}{6}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\ p\succ 3}}(p-2)$ 。x 个 $\prod_{p\le p(xe,)}p$ 区间数字对数为 $\frac{x}{6}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\ p\succ 3}}(p-2)$ 。平均每一个 X 区间数字对数为

$$\frac{x}{6}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\ p\succ 3}}\frac{p-2}{p}=\frac{x}{2}\prod_{\substack{p\le 3\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\ p\succ 3}}\frac{p-2}{p}$$

$$\frac{x}{2}\prod_{\substack{p\le 3\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\ p\succ 3}}\frac{p-2}{p}=xw(xe,)$$

则
$$w(xe,)=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\le 3\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\succ 3\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p} \qquad (2\text{-}2)$$

定义 2 我们把 $w(xe,)$称为孪生素数（或双生素数）的台阶系数。把 $xw(xe,)$称为孪生素数的诸 X 区间数字对数平均值。

对于第一个 X 区间来讲，经过上述筛分后，剩余的数字除 1 以外全部为孪生素数，故将 1 筛去。第一个 X 区间孪生素数的对数用 $p_x(2)$表示。将已被筛去的那些孪生素数保留下来，

称为保留的孪生素数，用 $p_x(-2)$ 表示。

第一个 X 区间全部的孪生素数用 $Z(x)$ 表示。显然 $Z(x)=p_x(2)+p_x(-2)$ (2-3)

孪生素数的台阶系数 $w(xe,)$ 具有以下性质：

(1) $w(xe,)$ 是非负有界函数 $0 \prec w(xe,) \le 0.25$ (2-4)

(2) $w(xe,)$ 是单调递减函数 $w(xe,1) \prec w(xe,) \prec w(xe,-1)$ (2-5)

(3) 当 $x \to \infty$ 时 $w(xe,) \to 0$ 渐近线 $w(xe,) = 0$ (2-6)

定义 3 我们把每个台阶中实际孪生素数对数与该台阶数字个数的比值称为素数在该台阶中孪生素数的平均分布密度。简称分布密度。用 $w^*(xe,)$ 表示。显然第 k 个台阶的分布密度为： $w^*(xe,) = \frac{z(b_k)-z(b_{k-1})}{b_k-b_{k-1}}$ (2-7)

例 1 利用筛法 2 将 100 筛分，筛分后比较第 1 个 X 区间与诸 X 区间数字对数的平均值。

解： $x = 100 \in T_5$ $p(xe,) = p_5 = 11$

(1) $\frac{x}{2}\prod_{p \le p(xe,)} p = \frac{100}{2} \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 115500;$ (2) $\prod_{p \le p(xe,)} p=2\times3\times5\times7\times11=2310;$

(3) 将2、3及其合数筛去剩余数字对数 $\frac{1}{2}x\prod_{p \le p_2}(p-1)\prod_{5 \le p \le p(xe,)} p=\frac{100}{2}(2-1)(3-1)\times5\times7\times11=38500$；

(4) 将 $\{5+6k\}$ k=0,1,2,3,...中5,7,11及其合数筛去，同时将5,7,11及其合数加2的数字也筛去；

将 $\{1+6k\}$ k=0,1,2,3,...中5,7,11及其合数筛去，同时将5,7,11及其合数减2的数字也筛去；

(5) 对于诸 X 区间 ，剩余数字 $\frac{x}{2}\prod_{p \le 3}(p-1)\prod_{5 \le p \le p(xe,)}(p-2)$=50(2-1)(3-1)(5-2)(7-2)(11-2)=13500

诸 X 区间剩余数字平均值 $\frac{13500}{2310} = \frac{x}{2}\prod_{p \le 3}\frac{p-1}{p}\prod_{5 \le p \le p(xe,)}\frac{p-2}{p} = 5.844;$

显然，第1个X区间 $[1,100]$ 经筛分后剩余5对，即第1个X区间双生素数对数 $5+3 \ge 5.844=xw(xe,)$

事实上，当 $x \in T_8$ 以后，若筛分后第1个 X 区间剩余数字的对数用m表示，则 $m \succ xw(xe,)$

3 不超过 x 的孪生素数对数的计算公式

3.1 引理 1 对 $z(x)$ 的上确界 $z^+(x)$ 的估计

命： $n \le 50: z_n^+(x) = Ceiling\sum_{k=1}^{n-1}((b_k-b_{k-1})w(xe,),1)+Ceiling((x-b_{n-1})w(xe,),1)$

$= z_{n-1}^+(b_{n-1}) + Ceiling((x-b_{n-1})w_n,1)$

$n \ge 51: z_n^+(x) = z_{50}^+(b_{50}) + Ceiling\sum_{k=51}^{n-1}((b_k-b_{k-1})w(xe,)-0.25,1)+Ceiling((x-b_{n-1})w(xe,)-0.25,1)$

$= z_{n-1}^+(b_{n-1}) + Ceiling((x-b_{n-1})w_n-0.25,1)$ (3-1)

则 $z(x) \le z^{+}(x)$ (3-2)

证明：(1) 当 $k=1$ $x \in T_1$ [1，7] 令 $b_0 = 0$ $z_0^{+} = 0$

$z^{+}(x) = z_1^{+}(x) = Ceiling(xw_{1,}1) = Ceiling(0.25x,1)$ ；$z_1^{+}(x) = z_1^{+}(a_1) = z_1^{+}(1) = Ceiling(0.25\times1,1) = 1$

$z_1^{+}(x) == z_1^{+}(2) = Ceiling(2\times0.25,1) = 1$ ； $z_1^{+}(3) = Ceiling(3\times0.25,1) = 1$

$z_1^{+}(4) = Ceiling(4\times0.25,1) = 1$ ；$z_1^{+}(5) = Ceiling(5\times0.25,1) = 2$ ； $z_1^{+}(6) = Ceiling(6\times0.25,1) = 2$ ；

$z_1^{+}(x) = z_1^{+}(b_1) = z_1^{+}(7) = Ceiling(7\times0.25,1) = 2$ ； $z(a_1) = z(1) = 0$ ；$z(2) = 0$ ；$z(3) = 0.5 = z(4) = 0.5$ ；

$z(5) = 1$ ；$z(6) = z(b_1) = z(7) = 2$ 显然：任取 $x \in T_1$ $z(x) \le z_1^{+}(x)$

(2) 当 $k=2$ $x \in T_2$ [8，20] 令 $z_2^{+}(x) = Ceiling\left(z_2^{+}(b_1)+(x-b_1)w_2,1\right) = Ceiling\left(2+(x-7)\times\frac{1}{6},1\right)$

$z_2^{+}(a_2) = z_2^{+}(8) = Ceiling\left(2+(8-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 3$ ； $z_2^{+}(9) = Ceiling\left(2+(9-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 3$

$z_2^{+}(10) = Ceiling\left(2+(10-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 3$ ； $z_2^{+}(11) = Ceiling\left(2+(11-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 3$

$z_2^{+}(12) = Ceiling\left(2+(12-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 3$ ； $z_2^{+}(13) = Ceiling\left(2+(13-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 3$

$z_2^{+}(14) = Ceiling\left(2+(14-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 4$ ； $z_2^{+}(15) = Ceiling\left(2+(15-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 4$

$z_2^{+}(16) = Ceiling\left(2+(16-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 4$ ； $z_2^{+}(17) = Ceiling\left(2+(17-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 4$

$z_2^{+}(18) = Ceiling\left(2+(18-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 4$ ； $z_2^{+}(19) = Ceiling\left(2+(19-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 4$

$z_2^{+}(b_2) = z_2^{+}(20) = Ceiling\left(2+(20-7)\times\frac{1}{6},1\right) = 5$。

$z(a_2) = z(8) = 2$ ； $z(9) = 2$ ； $z(10) = 2$ ； $z(11) = 2.5$ ； $z(12) = 2.5$ ； $z(13) = 3$ ；

$z(14) = z(15) = z(16) = 3$ ；$z(17) = z(18) = 3.5$ ；；$z(19) = 4$ ； $z(b_2) = z(20) = 4$。

显然，对任意 $x \in T_2$ 有 $z(x) \le z_2^{+}(x)$ 容易验证 当 $n \le 50$ $x \in T_n$ 时恒有 $z(x) \le z_n^{+}(x)$

(3) 当 $n = 51$ $z_{51}^{+}(x) = Ceiling\left(z_{50}^{+}(b_{50})+(x-b_{50})w_n-0.25,1\right) = Ceiling\left(350+(x-18039)w_n-0.25,1\right)$

$z_{51}^{+}(a_{51}) = z_{51}^{+}(1840) = Ceiling\left(350+(18040-18039)\times0.013637898-0.25,1\right) = 350$

$z_{51}^{+}(b_{51}) = z_{51}^{+}(18817) = Ceiling\left(350+(18817-18039)\times0.013637898-0.25,1\right) = 361$

$z(a_{51}) = z(18040) = 315$ $z(b_{51}) = z(18817) = 325$ $z(a_{51}) = z(18040) \le z_{51}^{+}(1840) = 350$

$z(b_{51}) = z(18817) \le z_{51}^{+}(b_{51}) = z_{51}^{+}(18817) = 361$ 容易验证 对任意 $x \in T_{51}$ 时恒有 $z(x) \le z_{51}^{+}(x)$

（4）假设 当 $k=n\ge 51$ 对任意 $x\in T_n$ 即 $x\in [a_n,b_n]$，关系式

$$z_n^+(x)=Ceiling\left(z_{n-1}^+(b_{n-1})+(x-b_{n-1})w_n-0.25,1\right)$$

$$=Ceiling\left(z_{50}^+(b_{50})+\sum_{k=51}^{n-1}Ceiling((b_k-b_{k-1})w_k-0.25,1)+(x-b_{n-1})w_n-0.25,1\right) \quad (3\text{-}3)$$

$z(x)\le z_n^+(x)$ 恒成立

当 $k=n+1$ $x\in T_{n+1}$ $[a_{n+1},b_{n+1}]$

对（3-3）$x=b_n$ $z_n^+(b_n)=Ceiling\left(z_{n-1}^+(b_{n-1})+(b_n-b_{n-1})w_n-0.25,1\right)$

$$=Ceiling\left(z_{50}^+(b_{50})+\sum_{k=51}^{n-1}Ceiling((b_k-b_{k-1})w_k-0.25,1)+(b_n-b_{n-1})w_n-0.25,1\right)$$

$$=Ceiling\left(z_{50}^+(b_{50})+\sum_{k=51}^{n}Ceiling((b_k-b_{k-1})w_k-0.25,1),1\right)$$

$$z_{n+1}^+(x)=Ceiling\left(z_{50}^+(b_{50})+\sum_{k=51}^{n}Ceiling((b_k-b_{k-1})w_k-0.25,1)+(x-b_n)w_{n+1}-0.25,1\right)$$

$$=Ceiling\left(z_n^+(b_n)+(x-b_n)w_{n+1}-0.25,1\right)$$

$z_{n+1}^+(x)=Ceiling\left(z_n^+(b_n)+(x-b_n)w_{n+1}-0.25,1\right)$ $z(x)\le z_{n+1}^+(x)$

因此，根据归纳法原理当 $k=n\ge 51$ 时 对任意 $x\in T_n$ 即 $x\in [a_n,b_n]$ 恒有

$z(x)\le z_n^+(x)$。 引理 2 证毕。

3.2 引理 2 对 $z(x)$ 的下确界 $z^-(x)$ 的估计

对任意 $x\in T_n$ 即 $x\in [a_n,b_n]$ 命

$$n\le 50：z_n^-(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w\left(xe,\right)\right]+\left[(x-b_{n-1})w(xe,)\right]=z_{n-1}^-\left(b_{n-1}\right)+\left[(x-b_{n-1})w_n\right] \quad (3\text{-}4)$$

$$n\ge 51：\begin{aligned}z_n^-(x)&=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w\left(xe,\right)+0.25\right]+\left[(x-b_{n-1})w(xe,)+0.25\right]\\&=z_{n-1}^-\left(b_{n-1}\right)+\left[(x-b_{n-1})w_n+0.25\right]\end{aligned} \quad (3\text{-}5)$$

则 $$z^-(x)\le z(x) \quad (3\text{-}6)$$

证明：（1）当 $k=1$ $x\in T_1$ [1，7] 令 $b_0=0$ $z_0^-=0$

$z^-(x)=z_1^-(x)=[xw_1]=[0.25x]$ ； $z_1^-(x)=z_1^-(a_1)=z_1^-(1)=[0.25\times1]=0$ ；

$z_1^-(x)==z_1^-(2)=[2\times0.25]=0$ ； $z_1^-(3)=[3\times0.25]=0$ ； $z_1^-(4)=[4\times0.25]=1$ ；

$z_1^-(5)=[5\times0.25]=1$ ； $z_1^-(6)=[6\times0.25]=1$ ； $z_1^-(x)=z_1^-(b_1)=z_1^-(7)=[7\times0.25]=1$ ；

$z(a_1)=z(1)=0$ ；$z(2)=0$ ；$z(3)=z(4)=0.5$ ；$z(5)=1.5$ ；$z(6)=1.5$ ；$z(b_1)=z(7)=2$

显然： 对任意 $x\in T_1$ $z_1^-(x)\le z(x)$

（2）当 $k=2$ $x\in T_2$ [8，20] 令 $z_2^-(x)=\left[z_2^-(b_1)\right]+\left[(x-b_1)w_2\right]=1+\left[(x-7)\times\frac{1}{6}\right]$

$z_2^-(a_2)=z_2^-(8)=1+\left[(8-7)\times\frac{1}{6}\right]=1$ ； $z_2^-(9)=1+\left[(9-7)\times\frac{1}{6}\right]=1$ ； $z_2^-(10)=1+\left[(10-7)\times\frac{1}{6}\right]=1$ ；

$z_2^-(11)=1+\left[(11-7)\times\frac{1}{6}\right]=1$ ； $z_2^-(12)=1+\left[(12-7)\times\frac{1}{6}\right]=1$ ； $z_2^-(13)=1+\left[(13-7)\times\frac{1}{6}\right]=2$ ；

$z_2^-(14)=1+\left[(14-7)\times\frac{1}{6}\right]=2$ ； $z_2^-(15)=1+\left[(15-7)\times\frac{1}{6}\right]=2$ ； $z_2^-(16)=1+\left[(16-7)\times\frac{1}{6}\right]=2$ ；

$z_2^-(17)=1+\left[(17-7)\times\frac{1}{6}\right]=2$ ； $z_2^-(18)=1+\left[(18-7)\times\frac{1}{6}\right]=2$ ； $z_2^-(19)=1+\left[(19-7)\times\frac{1}{6}\right]=3$ ；

$z_2^-(b_2)=z_2^-(20)=1+\left((20-7)\times\frac{1}{6}\right)=3$。 $z(a_2)=z(8)=2$ ；$z(9)=2$ ；$z(10)=2$ ；$z(11)=2.5$ ；

$z(12)=2.5$ ；$z(13)=3$ ；$z(14)=z(15)=z(16)=3$ ；$z(17)=z(18)=3.5$ ；$z(19)=z(b_2)=z(20)=4$

显然，对任意 $x\in T_2$ 有 $z_2^-(x)\le z(x)$ 可以验证 $n\le 50$ 时对任意 $x\in T_n$ 恒有 $z_2^-(x)\le z(x)$。

（3） $n\ge 51$ ：当 $n=51$ 时∵ $b_{50}=18039$ $z_{50}^-(b_{50})=z_{50}^-(18039)=300$ $w_{51}=0.013637898$

∴ $z_{51}^-(x)=z_{50}^-(b_{50})+\left[(x-b_{50})w_{51}+0.25\right]=300+\left[(x-18039)\times 0.013637898+0.25\right]$

$a_{51}=b_{50}+1=18039+1=18040$ $z_{51}^-(a_{51})=300+\left[(18040-18039)\times 0.013637898+0.25\right]=300$

$b_{51}=18817$ $z_{51}^-(b_{51})=300+\left[(18817-18039)\times 0.013637898+0.25\right]=310$

∵ $z(a_{51})=z(18040)=315$ $z(b_{51})=z(18817)=325$

∴ $z_{51}^-(a_{51})\le z(a_{51})$ $z_{51}^-(b_{51})\le z(b_{51})$ 可以验证对任意 $x\in T_{51}$ 即 $x\in$ $[a_{51},b_{51}]$ 恒有

$$z_{51}^-(x)\le z(x)$$

（4）假设 当 $k=n\ge 51$ 对任意 $x\in T_n$ 即 $x\in$ $[a_n,b_n]$，关系式

$$z_n^-(x)=z_{n-1}^-(b_{n-1})+\left[(x-b_{n-1})w_n+0.25\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{50}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k\right]+\sum_{k=51}^{n-1}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+0.25\right]+\left[\left((x-b_{n-1})w_n\right)+0.25\right] \quad (3\text{-}7)$$

$z_n^-(x)\le z(x)$ 恒成立

当 $k=n+1$ $x\in T_{n+1}$ $[a_{n+1},b_{n+1}]$ 对（3-7） $x=b_n$

$$z_n^-(b_n)=z_{n-1}^-(b_{n-1})+\left[(b_n-b_{n-1})w_n+0.25\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{50}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k\right]+\sum_{k=51}^{n-1}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+0.25\right]+\left[\left((b_n-b_{n-1})w_n\right)+0.25\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{50}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k\right]+\sum_{k=51}^{n}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+0.25\right]$$

$$z_{n+1}^{-}(x)=\sum_{k=1}^{50}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k\right]+\sum_{k=51}^{n-1}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+0.25\right]+$$
$$+\left[\left(b_n-b_{n-1}\right)w_n+0.25\right]+\left[(x-b_n)w_{n+1}+0.25\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{50}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k\right]+\sum_{k=51}^{n}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+0.25\right]+\left[(x-b_n)w_{n+1}+0.25\right]$$
$$=z_n^{-}(b_n)+\left[(x-b_n)w_{n+1}+0.25\right]$$

$$z_{n+1}^{-}(x)=z_n^{-}(b_n)+\left[(x-b_n)w_{n+1}+0.25\right] \qquad z_{n+1}^{-}(x)\le z(x)$$

因此，根据归纳法原理当 $k=n\ge 51$时 对任意 $x\in T_n$ 即 $x\in [a_n,b_n]$ 恒有

$z_n^{-}(x)\le z(x)$。 引理 2 证毕。

3.3 引理 3 下确界与诸 X 区间平均值的关系

对任意 $x\in T_n$ 即 $x\in [a_n,b_n]$ 命 $h(x)=\left[xw(xe,)\right]=\left[xw_n\right]$ (3-8)

则 $h_n(x)\le z_n^{-}(x)$ (3-9)

证明： 当 $n\le 50$ ：显然 $h_n(x)\le z_n^{-}(x)$ 当 $n\ge 51$ ：

$$z_n^{-}(x)=z_{n-1}^{-}(x)+\left[(x-b_{n-1})w_n+0.25\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{50}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k\right]+\sum_{k=51}^{n-1}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+0.25\right]+\left[\left((x-b_{n-1})w_n\right)+0.25\right]$$
$$\ge\sum_{k=1}^{50}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k\right]+\sum_{k=51}^{n-1}\left[\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+0.25\right]+\left((x-b_{n-1})w_n\right)-1$$
$$\ge\sum_{k=1}^{50}\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k-50+\sum_{k=51}^{n-1}\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k-(n-1-50)+\left((x-b_{n-1})w_n\right)-1$$
$$\ge\sum_{k=1}^{50}\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+\sum_{k=51}^{n-1}\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+\left(x-b_{n-1}\right)w_n-n$$
$$\ge\sum_{k=1}^{50}\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+\sum_{k=51}^{n-1}\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+\left(x-b_{n-1}\right)w_n$$
$$=\sum_{k=1}^{50}\left(b_k-b_{k-1}\right)w_k+\left(b_{n-1}-b_{n-2}\right)w_{n-1}+\left(b_{n-2}-b_{n-3}\right)w_{n-2}+\dots\left(b_{51}-b_{50}\right)w_{51}+\left(x-b_{n-1}\right)w_n$$
$$=\left(b_{n-1}-b_{n-2}\right)w_{n-1}+\left(b_{n-2}-b_{n-3}\right)w_{n-2}+\dots+\left(b_2-b_1\right)w_2+\left(b_1-b_0\right)w_1+xw_n-b_{n-1}w_n$$
$$=\left(w_{n-1}-w_n\right)b_{n-1}+\left(w_{n-2}-w_{n-1}\right)b_{n-2}+\left(w_{n-3}-w_{n-2}\right)b_{n-3}+\dots+\left(w_2-w_3\right)b_2+\left(w_1-w_2\right)b_1+xw_n$$

$\succ\succ xw_n\ge\left[xw_n\right]=h_n(x)$ 即 $h_n(x)\le z_n^{-}(x)$ 。引理 3 证毕。

3.4 孪生素数定理

利用 $p(xe,)$ 筛法2， 命 $z(x)$ 为不超过 x ，形如$\left(p_m,p_m-2\right)$的素数对数，

$$w_n = w(b_n e,) = \frac{1}{2} \prod_{\substack{p \le 3 \\ p \le p(b_n e,)}} \frac{p-1}{p} \prod_{\substack{p \succ 3 \\ p \le p(b_n e,)}} \frac{p-2}{p}$$ 则

$$z_n^-(x) \le z(x) \le z_n^+(x) \tag{3-10}$$

其中：$R(x) = z_n^+(x) - z_n^-(x) = o\left(z_n^-(x)\right) = o\left(z^-(x)\right) = o\left(xw(xe,)\right) \quad (n\to\infty, x\to\infty)$ (3-11)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{z^+(x)}{z^-(x)} = 1 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{z(x)}{z^-(x)} = 1 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{z^+(x)}{z(x)} = 1 \tag{3-12}$$

证明：设 $y = w(x) = w(xe,) = w_k$ 是定义在$[0,+\infty)$上的分段函数，

$$y = w(x) = w(xe,) = \begin{cases} w_1 = 0.25 & b_0 = 0 \quad x \in N \quad [b_0, b_1] \\ w_k \quad k \ge 2 & x \in N^+ \quad [b_{k-1}, b_k] \end{cases} \tag{3-13}$$

显然，$y = w(x)$在$[b_{k-1}, b_k]$上为正的单调有界函数。

由 3.1 引理 1、3.2 引理 2、3.3 引理 3，当$n \le 50$ 时，对任意 $x \in T_k$ $x \in \left[a_k, b_k\right]$，恒有

$$z_n^-(x) \le z(x) \le z_n^+(x)$$

(1) $n \ge 51$：设 $R(x) = z_n^+(x) - z_n^-(x)$

$$R(x) = z_{50}^+(b_{50}) + Ceiling\sum_{k=51}^{n-1}((b_k - b_{k-1})w(xe,) - 0.25, 1) + Ceiling((x - b_{n-1})w(xe,) - 0.25, 1) -$$

$$-\sum_{k=1}^{50}\left[\left(b_k - b_{k-1}\right)w(xe,)\right] - \sum_{k=51}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1}\right)w(xe,) + 0.25\right] - \left[(x - b_{n-1})w(xe,) + 0.25\right]$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1})w(xe,) + (x - b_{n-1})w(xe,) + n - \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1})w(xe,) + n - (x - b_{n-1})w(xe,) = 2n$$

由素数分布引理 2 对任意 $x \in T_n$ 有$n \le \sqrt{x}$ （见[3]许作铭，罗贵文 200611-282）

因此 $$R(x) \le 2\sqrt{x} \tag{3-14}$$

由 3.3 引理 3 $xw_n \le z_n^-(x)$

$$\frac{R(x)}{z_n^-(x)} = \frac{z_n^+(x) - z_n^-(x)}{z_n^-(x)} \le \frac{2n}{z_n^-(x)} \le \frac{2\sqrt{x}}{xw(xe,)} = \frac{2}{\sqrt{x}w(xe,)} \tag{3-15}$$

显然， 由于 $|\, w(xe,)| \le 0.25$ 当 $n\to\infty$ $x\to\infty$ $\sqrt{x}w(xe,) \to \infty$

$$\frac{R(x)}{z_n^-(x)} = \frac{z_n^+(x) - z_n^-(x)}{z_n^-(x)} \le \frac{2}{\sqrt{x}w(xe,)} \to 0 \tag{3-16}$$

$$R(x) = o\left(z_n^-(x)\right) = o\left(z^-(x)\right) \quad (n\to\infty, x\to\infty) \tag{3-17}$$

$$z_n^-(x) \le z(x) \le z_n^+(x)$$

即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{z^+(x)}{z^-(x)} = 1$ 根据极限存在准则 I $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{z^+(x)}{z(x)} = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{z(x)}{z^-(x)} = 1$ (3-18)

定理得证。

3.5 推论 1：孪生素数是无限的。

证明：假设a 和a -2 为已知最大的孪生素数，（$a \ge 7 = p_4$）又设 不大于a的孪生素数个数共有m个。即$z(a) = m$，显然$m \le a$

由于素数是无限的，因此，总有一个素数b满足

$$b \succ 2a$$

令$n = b^2$，根据孪生素数定理，不超过$n = b^2$的孪生素数：

$$z(b^2) \ge b^2 w(b^2 e,) - 1 \ge [b] \succ 2a \succ a \ge z(a) = m$$

亦即不超过b^2的孪生素数对数不少于 2a个，该 2a个孪生素数的最大者用c，$c-2$表示，则

$$c \succ 2a$$

从而证明有比m更多的孪生素数，有比a 和a -2 更大的孪生素数。根据反证法原理，孪生素数是无限的。即无论孪生素数a 和a -2 多么大，总存在着比a 和a -2 更大的孪生素数。证毕。

例 2 试估算不大于 100000 的孪生素数对的数，并计算孪生素数在该台阶的实际分布密度。

解 ： 100000 $\in T_{113}$ 查 表 可 知 $w_{113} = 0.009948440$ $b_{113} = 100863$ $b_{112} = 98997$

$z_{112}^{-}(b_{112}) = 1191$ $z_{112}^{+}(b_{112}) = 1271$ $z(b_{112}) = z(98997) = 1216$ $z(b_{113}) = z(100863) = 1230$

(1) $z_{113}^{-}(100000) = z_{112}^{-}(b_{112}) + \left[(100000 - 98997) \times 0.009948440 + 0.25\right] = 1191 + [10.228] = 1201$

$z_{113}^{+}(100000) = Ceiling\left(z_{112}^{+}(b_{112}) + (100000 - 98997) \times 0.009948440 - 0.25, 1\right) = Ceiling(1271 + 9.978 - 0.25, 1) = 1281$

因此 $1201 \le z(x) \le 1281$， 实际上 $z(x) = 1224$

(2) $\because \Delta b(xe,) = b_{113} - b_{112} = 1866$

$$\Delta z(x) = z(b_{113}) - z(b_{112}) = z(100863) - z(98997) = 1230 - 1216 = 14$$

$\therefore w^*(xe,) = \dfrac{\Delta z(x)}{\Delta b(xe,)} = \dfrac{14}{1866} = 0.007502680$ 显然，孪生素数在该台阶的实际分布密度小于该台阶系数（理论上预测的分布密度）。

例 3 求$x = 80001156183$孪生素数对数，并计算其分布密度。

解：查表可知$x \in T_{100466}$ $b_{100466} = 80001156183$，$b_{100465} = 79999616897$，$w_{100466} = 0.002094832$，$z_{100465}^{-}(b_{100465}) = 182828646$，$z_{100465}^{+}(b_{100465}) = z_{100465}^{+}(79999616897) = 182878804$ 根据孪生素数定理

$$z_{100466}^{+}(800011566183) = Ceiling\left(z_{100465}^{+}(b_{100465}) + (80001156183 - 79999616897) \times 0.002094832 - 0.25, 1\right)$$

$$= Ceiling(182878804 + 1539286 \times 0.002094832 - 0.25, 1)$$

$$= Ceiling(182878804 + 3224.5455 - 0.25, 1) = 182882029$$

$$z_{100466}^{-}(800011566183) = z_{100465}^{-}(b_{100465}) + Floor\left((80001156183 - 79999616897) \times 0.002094832 + 0.25, 1\right)$$

$$= 182828646 + Floor(1539286 \times 0.002094832 + 0.25, 1)$$

$$= 182828646 + Floor\left(3224.5455 + 0.25, 1\right) = 182828646 + 3324 = 182831870$$

因此 $182831870 \le z\left(80001156183\right) \le 182882029$ ；

$$z\left(80001156183\right) = 182858359 \qquad z\left(79999616897\right) = 182855153$$

$$w*\left(xe,\right) = \frac{\Delta z}{\Delta b} = \frac{182858359 - 182855153}{80001156183 - 79999616897} = \frac{3206}{1539286} = 0.002082784$$

4 结论：

计算不大于 x 的孪生素数对数，应用本定理比Hardy-Littlewood猜想给出的公式更简捷有效；孪生素数定理及其推论证明了孪生素数猜想。若 σ_n 为孪生素数渐近分布曲线，则

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k-1}\right)w_k + \left(x - b_n\right)w_n$$

表1利用孪生素数定理与Harday-Littlewood猜想计算孪生素数个数比较一览表

T	x	σ_n	$\pi_2(x)$	$z_n^-(x)$	$z(x)$	$z_n^+(x)$	Harday-L
5	100	9.99	6.23	8	8	13	14
14	1000	41.23	27.67	35	35	49	46
38	10000	208.18	155.64	189	205	227	214
113	100000	1240.25	996.11	1185	1224	1281	1249
341	1000000	8235.08	6917.46	8069	8169	8333	8248
1057	10000000	58731.96	50822.14	58205	58980	59016	58754
3316	100000000	440326.45	389107.00	438657	440312	441147	440368
10624	1000000000	3425225.9	3074425.7	3419865	3424506	3427859	3425308
34430	10000000000	27411239.3	24902848	27393985	27412679	27419739	27411417
112766	100000000000	224368440	205808662	224311967	224376048	224396279	224368865

附表 2　利用孪生定理计算不大于 x 的孪生素数对数目及其分布情况表

T	$x = b(xe,)$	$w(xe,)$	$[xw]$	$z_n^-(x)$	$z(x)$	$z_n^+(x)$	$\Delta z(x)$	$\Delta b(xe,)$	$w^*(xe,)$
5	123	0.058441558	7	9	10.0	14	2.0	44	0.045454545
14	1160	0.026635741	30	39	41.0	53	6.0	176	0.034090909
38	10049	0.015563057	156	190	207	228	8.0	553	0.014466546
113	100863	0.009948440	1003	1209	1230.0	1290	14.0	1866	0.007502680
341	1000955	0.006916848	6923	8142	8180.0	8344	48	6013	0.007982704
1057	10010752	0.005081597	50870	58500	59039.0	59061	101	19085	0.005292114
3316	100019446	0.003890998	389175	439549	440391.0	441226	240	59886	0.004007614
10624	1000053941	0.003074411	3074577	3422712	3424680.0	3428053	618	184911	0.003342148
34430	10000245380	0.002490279	24903404	27403261	27413315.0	27420451	1395	566606	0.002462082
49143	20000703191	0.002346856	46938763	51493558	51510773.0	51518133	1903	791595	0.002404007
78798	50000828878	0.002175527	108778140	118887099	118905476.0	118926442	2708.	1228597	0.002204140
100466	80001156183	0.002094832	167589001	182826471	182858359.0	182882014	3206	1539286	0.002082784
112766	100000861504	0.002058085	205810257	224333608	224376048.0	224398318	3522	1712644	0.002056469

参考文献

[1] 陈景润，初等数论，北京：科学出版社，1978 年 12 月。

[2] 许作铭，罗贵文，素数分布的三组递推公式及其应用，沈阳师范大学学报（自然科学版）2006 第 24 卷 第 4 期 ，388-391。

[3] 许作铭，罗贵文，筛法与素数分布定理，科技论文在线，200611-282，2006 年 11 月 13 日。

[4] 潘承洞，潘承彪， 解析数论基础， 第二版 ，北京：科学出版社， 1997 年 8 月。

[5] 华罗庚， 数论导引，北京： 科学出版社， 1979 年。

[6] 高等数学 ， 同济大学数学教研室主编 ，北京： 高等教育出版社， 1996 年 12 月。

[7] 潘承洞，潘承彪， 初等数论 第二版 ，北京：北京大学出版社， 2003 年 1 月。

[8] U.Dudley，基础数论， 上海：上海科学技术出版社， 1986 年 9 月。

Calculates the twin prime a new formula

Xu Zuo-ming[1] , Luo Gui-wen[2]，Ba Xiang-qian3

1. Scientific and Research Department of Liaoning University，Shenyang , PRC, 110036
2. Liaoning Light Industry Research Institute, Shenyang，PRC, 110036
3. Teaching Affairs section of Liaoning University，Shenyang , PRC, 110036

Abstract: This article through establishes one kind of new sieve method, Obtained and had proven a computation twin prime new formula or called the twin prime theorem. . Estimated the twin prime the actual distribution, the application twin prime theorem than applies the Harday-Littlewood suspicion to be more effective.

Key Words: Prime number distribution , Twin prime,Step coefficient, Sieve method, Twin prime suspicion.

CLC number: O156.1 O156.4； **Document Code:** A

作者简介：1.许作铭（1953-），男，辽宁普兰店人，1982 年 1 月毕业于沈阳师范学院数学系。辽宁大学副教授，长期从事素数分布研究。024-62202282