表偶数（≥6）为两个奇素数之和

许作铭[1] ， 罗贵文[2]
1.辽宁大学科研处，沈阳（ 110036 ）
2.辽宁省轻工科学研究院，沈阳 （110036）
E-mail: xzm9@163.com

摘要：本文通过利用一种新的筛法与台阶理论，得到了任意偶数 $x \geq 6$ 表为 “ 两个奇素数之和 ” 表法个数的显示公式或称Goldbach定理。应用本定理，能够有效地估计Goldbach素数的实际分布。

关键词：素数分布；台阶系数；筛法；Goldbach 素数；Goldbach 猜想。
中国图书资料分类号： 0156.4 **文献标识码：**A 文章编号：

1. 引言

1742 年 6 月 7 日，德国中学教师哥德巴赫（Goldbach）在给数学家欧拉（Euler）的通封信中，提出了这样两个推测：

（A） 每一个偶数≥6 都是两个奇素数之和。
（B） 每一奇数≥9 都是三个奇素数之和。

欧拉（Euler）在回复哥德巴赫（Goldbach）的信中表示，虽然我不能证明它们，但深信这些猜想是对的。上述两个推测就是至今仍未解决的 Goldbach 猜想。

显然，命题（B）是命题（A）的直接推论。因为命题（B）所指的奇数减 3 即为命题（A）所讨论的偶数。3 为奇素数，假若命题（A）得证，命题（B）就自然得以证明。因此，关键在于命题（A）的求证。

事实上，1937 年，前苏联数学家维诺格拉多夫（и.м.вИнорадов ）利用圆法和他创造的线形素变数三角和估计方法，证明了：存在常数 c_1，使得每一个大于 c_1 的奇数是三个奇素数之和。这就基本上解决了命题（B）或猜想（B）。这一结果通常称为 Goldbach вИнорадов 定理或三素数定理。因而，现在说到 Goldbach 猜想总是指命题（A）或猜想（A）。 （见[1]解析数论基础 § 20 353-358）

1966 年，我国数学家陈景润在经过多年潜心研究之后，成功地用筛法证明了“1＋2”，也就是存在一个正常数 c_2，使得每一个大于 c_2 的大偶数都是都可以表示成“一个素数与另一个素因子不超过 2 个的乘积之和”。 （见[2]王元，哥德巴赫猜想研究，306-347）

（c） $$p_x(1,2) \geq 0.67\frac{c_2 x}{\log^2 x}$$ 其中： $$c_2 = \prod_{\substack{p|x \\ p>2}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

迄今为止，“ 1+2 ” 定理仍然是这一研究领域的最佳成果。

长期以来，作者考察了一千亿以内 Goldbach 素数在 12 万多个台阶或区间的变化情况，

得到了表偶数为两个奇素数之和的显示公式。应用该公式计算任何偶数 $x \ge 6$ 的 Goldbach 素数表示法个数，可以较好的反映 Goldbach 素数的实际分布。（$p(xe,)$ 筛法及台阶的概念见[3] 许作铭等，沈阳师范大学学报（自然科学版）2006 第 24 卷 第 4 期 ，388-391）

2. Goldbach 素数的台阶系数与 $p(xe,)$ 筛法 3

定义 1 我们把构成偶数 x （$p_m, x-p_m=p_i$）为两个奇素数之和的素数称为 Goldbach 素数。

定义 2 $p(xe,)$ 筛法 3：为了比较第一个 X 区间的数字个数与诸 X 区间的数字个数平均值，根据定义将正整数 x 乘以 2，3，5，7⋯ $p(xe,)$ 其数值达到 $x\prod_{p\le p(xe,)} p$。对于每个 $\prod_{p\le p(xe,)} p$ 区间，首先将 2,3，5，7，⋯⋯ $p(xe,)$ 及其合数筛去。再将以这些素数为模与 x 同余的数全部筛去。这种筛法称为 $p(xe,)$ 筛法 3。

在每个 $\prod_{p\le p(xe,)} p$ 区间中剩余的数字个数为 ： （同余的概念见[4]基础数论，30-47）

$$\frac{1}{4}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\le p(xe,)}}(p-2) \qquad (2\text{-}1)$$

x 个 $\prod_{p\le p(xe,)} p$ 剩余数字的个数为

$$\frac{x}{4}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\le p(xe,)}}(p-2) \qquad (2\text{-}2)$$

每个 X 区间数字个数并不相同，但每个 X 区间数字个数的平均值为

$$\frac{x}{4}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p} \qquad (2\text{-}3)$$

命

$$xg(xe,) = x\frac{1}{4}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p} \qquad (2\text{-}4)$$

则

$$g(xe,) = \frac{1}{2}\prod_{p=2}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p} \qquad (2\text{-}5)$$

定义 3 我们把 $g(xe,)$ 称为 Goldbach 素数的台阶系数。把 $xg(xe,)$ 称为 Goldbach 素数的诸 X 区间数字对数平均值。

对于第一个 X 区间来讲，经过上述筛分后有一个数 1 有可能被筛去，如果 1 不能筛去，

再将 1 和对应的二个数字筛去。该区间 Goldbach 素数的对数用 $p_x(3)$ 表示。将已被筛去的那些 Goldbach 素数保留下来，用 $p_x(-3)$ 表示。显然第一个 X 区间的 Goldbach 素数以 $x/2$ 为对称轴前后二个数字相加，均等于偶数 x。Goldbach 素数对数（或表示法个数）用 $D(x)$ 或 $p_x(1,1)$ 表示：

$$D(x) = p_x(3) + p_x(-3) \tag{2-6}$$

Goldbach 素数的台阶系数 $g(xe,)$ 具有以下性质：

（1） $g(xe,)$ 是非负有界函数 $\quad 0 \prec g(xe,) \le 0.25$ （2-7）

（2） $g(xe,)$ 是单调递减函数 $\quad g(xe,1) \prec g(xe,) \prec g(xe,-1)$ （2-8）

(3) 当 $x \to \infty$ 时 $g(xe,) \to 0$ 渐近线 $g(xe,) = 0$ （2-9）

定义 4 我们把偶数 x 的 Goldbach 素数对数（或称表示法个数） $D(x)$ 与 x 的比值称为 Goldbach 素数的实际分布密度，简称分布密度。用 $g^*(xe,)$ 表示。

$$g^*(xe,) = \frac{D(x)}{x} \tag{2-10}$$

3. “任何偶数 $x \ge 6$ 为两个奇素数之和”表示法个数显示公式的引理

3.1 引理 1 Goldbach 素数系数与孪生素数系数的关系

Goldbach 素数系数与孪生素数的台阶系数的关系是：对任意偶数 $x \in T_n, n \ge 2$

当 $k = 1: g_k = w_k$ ； 当 $k = 2,3,4,......$ $\quad g_k = \frac{1}{2} c_x w_k$ （3-1）

其中 $c_x \succ 0$ 代表与 x （除素因子 2 以外，不大于其台阶素数的素因子）有关的常数。

证明：对任意偶数 $x \in T_k$ 即 $x \in [a_k, b_k]$ 由正整数因子分解唯一性定理（或称算术基本定理，见[4] U-dudley §2 10-21）

$$x = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times p_3^{e_3} \times ... \times p_k^{e_k} \times ... \times p_m^{e_m}, \quad p_1 \prec p_2 \prec p_3 \prec ... \prec p_k \prec ... \prec p_m \tag{3-2}$$

其中： $e_1 \ge 1, \quad e_i \ge 0 \quad i=2,3,4,..... \quad m \ge k$。

根据 $p(xe,)$ 筛法 2 $\quad w_k = w(b_k e,) = \frac{1}{2} \prod_{\substack{p \le 3 \\ p \le p(b_k e,)}} \frac{p-1}{p} \prod_{\substack{p \succ 3 \\ p \le p(b_k e,)}} \frac{p-2}{p}$

根据 $p(xe,)$ 筛法 3 $\quad g_k = g(b_k e,) = \frac{1}{2} \prod_{p=2} \frac{p-1}{p} \prod_{\substack{p \succ 2 \\ p|x \\ p \le p(b_k e,)}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{\substack{p \succ 2 \\ p \le p(b_k e,)}} \frac{p-2}{p}$

（1） $p \le p(xe,)$ ：x 当且仅当被 2 整除

当 $n=1$ 时 $w_1=\frac{1}{2}\times\frac{2-1}{2}=\frac{1}{4}$； $g_1=\frac{1}{2}\times\frac{2-1}{2}=\frac{1}{4}$

当 $n=2$ 时 $w_2=w_1\times\frac{3-1}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$； $g_2=g_1\times\frac{3-2}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}=\frac{1}{2}w_2$；

当 $n=3$ 时 $w_3=w_2\times\frac{5-2}{5}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$； $g_3=g_2\times\frac{5-2}{5}=\frac{1}{12}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{20}=\frac{1}{2}w_3$；

当 $n=k$ 时 $w_k=w_{k-1}\times\frac{p_k-2}{p_k}$； $g_k=g_{k-1}\times\frac{p_k-2}{p_k}=\frac{1}{2}w_k$。 (3-3)

实际上，当 $p\le p(xe,)$ x 当且仅当被 2 整除时其 Goldbach 素数系数最小，从第 2 台阶起仅仅是孪生素数系数的二分之一。

（2） $p\le p(xe,)$：x 当且仅当被 2×3 整除时

当 $n=1$ 时 $w_1=\frac{1}{2}\times\frac{2-1}{2}=\frac{1}{4}$； $g_1=\frac{1}{2}\times\frac{2-1}{2}=\frac{1}{4}$

当 $n=2$ 时 $w_2=w_1\times\frac{3-1}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$； $g_2=g_1\times\frac{3-2}{3}\times\frac{3-1}{3-2}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}=w_2$；

当 $n=3$ 时 $w_3=w_2\times\frac{5-2}{5}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$； $g_3=g_2\times\frac{5-2}{5}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{15}=w_3$；

当 $n=k\ge 2$ 时 $w_k=w_{k-1}\times\frac{p_k-2}{p_k}$； $g_k=g_{k-1}\times\frac{p_k-2}{p_k}=w_k$。 (3-4)

（3） $p\le p(xe,)$：x 当且仅当被 2×5 整除时

当 $n=1$ 时 $w_1=\frac{1}{2}\times\frac{2-1}{2}=\frac{1}{4}$； $g_1=\frac{1}{2}\times\frac{2-1}{2}=\frac{1}{4}$

当 $n=2$ 时 $w_2=w_1\times\frac{3-1}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$； $g_2=g_1\times\frac{3-2}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$；

当 $n=3$ 时 $w_3=w_2\times\frac{5-2}{5}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$； $g_3=g_2\times\frac{5-2}{5}\times\frac{5-1}{5-2}=\frac{1}{12}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{15}=\frac{2}{3}w_3$；

当 $n=4$ 时 $w_4=w_3\times\frac{7-2}{7}=\frac{1}{10}\times\frac{5}{7}=\frac{1}{14}$； $g_4=g_3\times\frac{7-2}{7}=\frac{1}{15}\times\frac{5}{7}=\frac{1}{21}=\frac{2}{3}w_4$；

当 $n=k\ge 3$ 时 $w_k=w_{k-1}\times\frac{p_k-2}{p_k}$； $g_k=g_{k-1}\times\frac{p_k-2}{p_k}=\frac{2}{3}w_k$。 (3-5)

（4） $p\le p(xe,)$：x 当且仅当被 2×3×5 整除时

当 $n=1$ 时 $w_1=\frac{1}{2}\times\frac{2-1}{2}=\frac{1}{4}$； $g_1=\frac{1}{2}\times\frac{2-1}{2}=\frac{1}{4}$

当 $n=2$ 时 $w_2=w_1\times\frac{3-1}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$； $g_2=g_1\times\frac{3-2}{3}\times\frac{3-1}{3-2}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$；

当 $n=3$ 时 $w_3=w_2\times\frac{5-2}{5}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$； $g_3=g_2\times\frac{5-2}{5}\times\frac{5-1}{5-2}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{15}=\frac{4}{3}w_3$；

当 $n=4$ 时 $w_4 = w_3 \times \frac{7-2}{7} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{14}$； $g_4 = g_3 \times \frac{7-2}{7} = \frac{2}{15} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{21} = \frac{4}{3} w_4$；

当 $n=k \ge 3$ 时 $w_k = w_{k-1} \times \frac{p_k - 2}{p_k}$； $g_k = g_{k-1} \times \frac{p_k - 2}{p_k} = \frac{4}{3} w_k$ 。 (3-6)

实际上在第 3 台阶中这是最大的 Goldbach 素数系数。

(1) 对任意偶数 x $x \in T_k$ ：凡是满足 $p \le p(xe,)$ 的素数因子共有 $m+1$ 个

$$p_1 \prec p_{l_1} \prec p_{l_2} \prec p_{l_3} \prec \ldots\ldots \prec p_{l_m} \tag{3-7}$$

当计算到 p_{l_m} 台阶时：

$$g_{l_m} = \frac{1}{2} w_{l_m} \frac{p_{l_1}-1}{p_{l_1}-2} \times \frac{p_{l_2}-1}{p_{l_2}-2} \times \frac{p_{l_3}-1}{p_{l_3}-2} \times \cdots \times \frac{p_{l_m}-1}{p_{l_m}-2} = \frac{1}{2} \prod_{\substack{p \succ 2 \\ p|x \\ p \le p(xe,)}} \frac{p-1}{p-2} w_{l_m} = \frac{1}{2} c_x w_{l_m} \tag{3-8}$$

$$g_k = \frac{1}{2} c_x w_k \qquad c_x = \prod_{\substack{p \succ 2 \\ p|x \\ p \le p(xe,)}} \frac{p-1}{p-2}$$

其中 $c_x \succ 0$ 代表与 x（除素因子 2 以外，不大于其台阶素数的素因子）有关的常数。证毕。

3.2 引理 2 每个台阶中 Goldbach 素数系数的个数

设 $x \in T_k$ 则该台阶 Goldbach 素数的台阶系数个数为 2^{k-1}。 (3-9)

证明： Goldbach 素数的台阶系数与素数的台阶系数以及孪生素数的台阶系数不同。素数与孪生素数的台阶系数每个台阶只有一个。而 Goldbach 素数系数在每个台阶中的数量有如下规律：

T_1: $g_1 = 0.25$ 只有一个 Goldbach 素数系数 $C_1^1 C_0^0 = 1$。

T_2 ： 有 2 个 Goldbach 素数系数，即当且仅当 $p_1 p_2 \big| x$， $p_3 \le p \le p(xe,)$ $p \dagger x$ $g_2 = \frac{1}{6}$；

当且仅当 $p_1 \big| x$ $p_2 \le p \le p(xe,)$ $p \dagger x$ $g_2 = \frac{1}{12}$； $C_1^1 C_1^0 + C_1^1 C_1^1 = 2$

T_3 ：有 4 个 Goldbach 素数系数，即当且仅当 $p_1 p_2 \big| x$， $p_3 \le p \le p(xe,)$ $p \dagger x$ （以下简记 2，3）

① 2 ： $g_3 = \frac{1}{20}$；② 2，3： $g_3 = \frac{1}{10}$；③ 2，5： $g_3 = \frac{1}{15}$；④ 2，3，5： $g_3 = \frac{2}{15}$

$$C_1^1 C_2^0 + C_1^1 C_2^1 + C_1^1 C_2^2 = (1+1)^2 = 4$$

T_4 ： 有 8 个 Goldbach 素数系数：

① 2： $g_4=\frac{1}{28}$；② 2，7：$g_4=\frac{3}{70}$； ③ 2，3：$g_4=\frac{1}{14}$； ④ 2，3，7：$g_4=\frac{3}{35}$；

⑤ 2，5 $g_4=\frac{1}{21}$；⑥ 2，5，7：$g_4=\frac{2}{35}$； ⑦ 2，3，5 $g_4=\frac{2}{21}$；⑧ 2，3，5，7：$g_4=\frac{4}{35}$

$$C_1^1C_3^0+C_1^1C_3^1+C_1^1C_3^2+C_1^1C_3^3=(1+1)^3=8 \tag{3-10}$$

当 $x\in T_k$ 时，台阶素数 $P(xe,)=p_k$ 由二项式定理不难证明第 k 个台阶的 Goldbach 素数系数 g_k 的个数具有

$$C_1^1C_{k-1}^0+C_1^1C_{k-1}^1+C_1^1C_{k-1}^2+\ldots\ldots+C_1^1C_{k-1}^{k-1}=(1+1)^{k-1}=2^{k-1} \qquad k=1,2,3,4,\ldots \tag{3-11}$$

其中最大的 Goldbach 素数系数为 当且仅当 $p_1\times p_2\times p_3\times\ldots\times p_k\mid x$， $p\le p(xe,)$ $k\ge2$：

$$\max(g_k)=\max(g(b_ke,))=\frac{1}{2}\prod_{p=2}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\succ2\\p\mid x\\p\le p(b_ke,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ2\\p\le p(b_ke,)}}\frac{p-2}{p}$$
$$=\frac{1}{4}\times2\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\frac{10}{9}\times\ldots\times\frac{p_k-1}{p_k-2}\prod_{\substack{p\succ2\\p\le p(b_ke,)}}\frac{p-2}{p} \tag{3-12}$$

其中最小的 Goldbach 素数系数为 当且仅当 $p_1\mid x$， $p_2\le p\le p(xe,)$ $p\dagger x$ $k\ge2$ 时

$$\min(g_k)=\min(g(b_ke,))=\frac{1}{2}\prod_{p=2}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\succ2\\p\mid x\\p\le p(b_ke,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ2\\p\le p(b_ke,)}}\frac{p-2}{p}=\frac{1}{4}\prod_{\substack{p\succ2\\p\le p(b_ke,)}}\frac{p-2}{p} \tag{3-13}$$

尽管每个台阶的数字个数逐渐增加，Goldbach 素数系数也在成倍增加。从第 4 台阶起存在暂且不用的 Goldbach 素数系数，但在此以后台阶中的偶数在计算时需要使用此系数。证毕。

3.3 引理 3 Goldbach 素数对数的下确界 $D^-(x)$ 与诸 X 区间数字对数平均值的关系

对任意 $x\in T_n$ 即 $x\in[a_n,b_n]$ 命 $n\le50$： $h(x)=[xg(xe,)-1]=[xg_n-1]$； $n\ge51$ $h(x)=xg_n$。

$n\le3$: $D_n^-(x)=D_{n-1}^-(b_{n-1})+[(x-b_{n-1})g_n-0.5]$ $4\le n\le999$: $D_n^-(x)=D_{n-1}^-(b_{n-1})+[\left(x-b_{n-1}-\frac{n}{3}\right)g_n]$

$$1000\le n\le9999: D_n^-(x)=D_{n-1}^-(b_{n-1})+[\left(x-b_{n-1}-\frac{n}{5}\right)g_n]$$
$$10000\le n: D_n^-(x)=D_{n-1}^-(b_{n-1})+[\left(x-b_{n-1}-\frac{n}{7}\right)g_n]$$

则 $$h_n(x)\le\prod{}_n^-(x) \tag{3-14}$$

证明：（1）对任意 $x\in T_n$ 即 $x\in[a_n,b_n]$ 显然当 $n\le3$ $h_n(x)\le\prod{}_n^-(x)$

（2）当 $4 \le n \le 999$ $D_n^-(x) = D_3^-(b_3) + \sum_{k=4}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] + \left[\left(x - b_{n-1} - \frac{n}{3}\right)g_n\right]$

$$\ge \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] + \left[\left(x - b_{n-1} - \frac{n}{3}\right)g_n\right]$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] + \left(x - b_{n-1} - \frac{n}{3}\right)g_n - 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] - \left(b_{n-1}g_n + \frac{n}{3}g_n + 1\right) + xg_n \ge xg_n$$

（3）当 $1000 \le n \le 9999$

$$D_n^-(x) = D_{999}^-(b_{999}) + \sum_{k=1000}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{5}\right)g_k\right] + \left[\left(x - b_{n-1} - \frac{n}{5}\right)g_n\right]$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] + \left[\left(x - b_{n-1} - \frac{n}{3}\right)g_n\right]$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] + \left(x - b_{n-1} - \frac{n}{3}\right)g_n - 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] - \left(b_{n-1}g_n + \frac{n}{3}g_n + 1\right) + xg_n \ge xg_n$$

（4）当 $10000 \le n$

$$D_n^-(x) = D_{9999}^-(b_{9999}) + \sum_{k=10000}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{7}\right)g_k\right] + \left[\left(x - b_{n-1} - \frac{n}{7}\right)g_n\right]$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] + \left[\left(x - b_{n-1} - \frac{n}{3}\right)g_n\right]$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] + \left(x - b_{n-1} - \frac{n}{3}\right)g_n - 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k - b_{k-1} - \frac{k}{3}\right)g_k\right] - \left(b_{n-1}g_n + \frac{n}{3}g_n + 1\right) + xg_n \ge xg_n$$

因此，对任意 $x \in T_n$ 即 $x \in [a_n, b_n]$ 恒有 $$D_n^-(x) \ge xg_n \qquad (3\text{-}15)$$

成立。引理 3 证毕。

3.4．引理 4 对 Goldbach 素数对上、下确界的误差估计

对任意 $x \in T_n$ 命：

$n \le 12$：$D_n^+(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left((b_k - b_{k-1})g_k + 0.5\right) + \left((x - b_{n-1})g_n + 0.5\right) = D_{n-1}^+(b_{n-1}) + \left((x - b_{n-1})g_n + 0.5\right)$

$n \ge 13$：$D_n^+(x) = D_{12}^+(b_{12}) + \sum_{k=13}^{n-1}(b_k - b_{k-1})g_k + (x - b_{n-1})g_n = D_{n-1}^+(b_{n-1}) + (x - b_{n-1})g_n$

则 $R(x)=D_n^{+}(x)-D_n^{-}(x)=o\left(D_n^{-}(x)\right)=o\left(D^{-}(x)\right)\quad (n\to\infty时，x\to\infty)$ (3–16)

其中：(1) $x=p_1^{e_1}\times p_2^{e_2}\times\ldots\times p_n^{e_n}\times\ldots\times p_r^{e_r}$，$e_1\geq 1$，当 $k\geq 2$: $e_k\geq 0$，$r\geq n$。
其中

(2) $\left(p_{m},x-p_m=p_i\right)$ p_m p_i 为奇素数。p 为素数 $p(xe,)$ 为台阶素数。

(3) $g_n=g(xe,)=\frac{1}{2}\prod_{p=2}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\leq p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\leq p(xe,)}}\frac{p-2}{p}$

证明：设 $y=g(x)=g(xe,)=g_k$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的分段函数，

$$y=g(x)=g(xe,)=\begin{cases} g_1=\frac{1}{4} & b_0=0 \quad x\in N \quad [b_0,b_1] \\ g_k \quad k\geq 2 & x\in N^{+} \quad [b_{k-1},b_k] \end{cases} \tag{3-17}$$

显然，$y=g(x)$ 在 $[b_{k-1},b_k]$ 上为正的单调有界函数。

对任意 $x\in T_n$ 即 $x\in\left[a_{n,}b_n\right]$ 由算术基本定理知 x 可以唯一的表示成为

$x=p_1^{e_1}\times p_2^{e_2}\times\ldots\times p_n^{e_n}\times\ldots\times p_r^{e_r}$ $e_1\geq 1$，当 $k\geq 2$: $e_k\geq 0$，$r\geq n$

根据 Goldbach 素数的台阶系数 $g_n=g(xe,)=\frac{1}{2}\prod_{p=2}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\leq p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\leq p(xe,)}}\frac{p-2}{p}$

及 Goldbach 素数的上、下确界的计算公式：

$$D_n^{+}(x)=D_{12}^{+}(b_{12})+\sum_{k=13}^{n-1}(b_k-b_{k-1})g_k+(x-b_{n-1})g_n=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})g_k+(x-b_{n-1})g_n+6$$

$$D_n^{-}(x)=D_{n-1}^{-}(b_{n-1})+[\left(x-b_{n-1}-\frac{n}{7}\right)g_n]=\sum_{k=1}^{3}\left[(b_k-b_{k-1})g_k-0.5\right]+\sum_{k=4}^{999}\left[\left(b_k-b_{k-1}-\frac{k}{3}\right)g_k\right]+$$
$$+\sum_{k=1000}^{9999}\left[\left(b_k-b_{k-1}-\frac{k}{5}\right)g_k\right]+\sum_{k=10000}^{n-1}\left[\left(b_k-b_{k-1}-\frac{k}{7}\right)g_k\right][\left(x-b_{n-1}-\frac{n}{7}\right)g_n]$$

当 $k=n\geq 10000$ 时 设：$R(x)=D_n^{+}(x)-D_n^{-}(x)$ (3-18)

则 $$R(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})g_k+(x-b_{n-1})g_n+6-D_{n-1}^{-}(b_{n-1})-[\left(x-b_{n-1}-\frac{n}{3}\right)g_n]$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})g_k+(x-b_{n-1})g_n+8-\sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(b_k-b_{k-1}-\frac{k}{3}\right)g_k\right]-[\left(x-b_{n-1}-\frac{n}{3}\right)g_n]$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})g_k+(x-b_{n-1})g_n+8-\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k-b_{k-1}-\frac{k}{3}\right)g_k-\left(x-b_{n-1}-\frac{n}{3}\right)g_n+n$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{3}g_k+\frac{n}{3}g_n+n+8=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3}g_k+n+8\prec\prec\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}k+n+8=\frac{1}{12}\frac{(1+n)n}{2}+n+8=\frac{n^2}{24}+\frac{25n}{24}+8$$

即 $$R(x)\prec\prec\frac{n^2}{24}+\frac{25n}{24}+8 \tag{3-19}$$

由素数分布定理引理 2 （见[5] 许作铭，罗贵文，科技论文在线，200611-282）对任意偶数 $x \ge 6 \in T_n$ 即 $x \in [a_n, b_n]$ ：$n \le x^{15/32}$ 于是

$$R(x) \prec\prec \frac{n^2}{24} + \frac{25n}{24} + 8 \le \frac{\left(x^{15/32}\right)^2}{24} + \frac{25\left(x^{15/32}\right)}{24} + 8 = \frac{x^{15/16}}{24} + \frac{25\left(x^{15/32}\right)}{24} + 8$$

由 3.3 引理 3 对任意偶数 $x \ge 6 \in T_n$ 即 $x \in [a_n, b_n] \ge 51$ ： $D_n^-(x) \ge x g_n$

$$\frac{R(x)}{D_n^-(x)} \le \frac{\frac{n^2}{24} + \frac{25n}{24} + 8}{D_n^-(x)} \le \frac{\frac{\left(x^{15/32}\right)^2}{24} + \frac{25\left(x^{15/32}\right)}{24} + 8}{x g_n} = \frac{x^{15/16}}{24 x g_n} + \frac{25\left(x^{15/32}\right)}{24 x g_n} + \frac{8}{x g_n} \tag{3-20}$$

$$= \frac{1}{24 x^{1/16} g_n} + \frac{25}{24 x^{17/32} g_n} + \frac{8}{x g_n}$$

由于 $|g(xe,)| \le 0.25$ 因此当 $n \to \infty, x \to \infty$

$$24 x^{1/16} g_n \to \infty \quad ; \quad 24 x^{17/32} g_n \to \infty \quad ; \quad x g_n \to \infty \text{。} \tag{3-21}$$

$$\text{即} \frac{1}{24 x^{1/16} g_n} \to 0 \quad ; \quad \frac{25}{24 x^{17/32} g_n} \to 0 \quad ; \quad \frac{8}{x g_n} \to 0 \text{。} \tag{3-22}$$

根据极限运算法则：有限个无穷小量之和仍然为无穷小量。$\frac{R(x)}{D^-(x)} \to 0 \quad (x \to \infty)$ （3-23）

$$\text{即 } R(x) = o\left(D_n^-(x)\right) = o\left(D^-(x)\right) \qquad (n \to \infty, x \to \infty) \tag{3-24}$$

引理 4 得证。

4.结论：

根据以上四个引理，采用证明孪生素数定理的办法即可得到：**任何偶数 $x \ge 6$ 都可以表为两个奇素数之和的显示公式即 Goldbach 定理：**

利用 $p(xe,)$ 筛法 3，对任意偶数 $x \ge 6 \in T_n$ $g_n = g(xe,) = \frac{1}{2} \prod_{p=2} \frac{p-1}{p} \prod_{\substack{p \succ 2 \\ p|x \\ p \le p(xe,)}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{\substack{p \succ 2 \\ p \le p(xe,)}} \frac{p-2}{p}$

则 $$h(x) \le D_n^-(x) \le D(x) \le D_n^+(x)$$

$$R(x) = D_n^+(x) - D_n^-(x) = o\left(D_n^-(x)\right) = o\left(D^-(x)\right) \qquad (n \to \infty\text{时，} x \to \infty)$$

其中：（1） $x = p_1^{e1} \times p_2^{e2} \times \ldots \times p_n^{en} \times \ldots \times p_r^{er}$ ，$e_1 \ge 1$，当 $k \ge 2$: $e_k \ge 0$ ，$r \ge n$。

（2） $(p_m, x - p_m = p_i)$ p_m p_i 为奇素数。p 为素数 $p(xe,)$ 为台阶素数。

（3） T_n 表示第 n 个台阶，b_k 表示第 k 个台阶的尾数，$b_0 = 0$。

(4) $n \le 12$: $D_n^+(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left((b_k - b_{k-1})g_k + 0.5\right) + \left((x - b_{n-1})g_n + 0.5\right) = D_{n-1}^+(b_{n-1}) + \left((x - b_{n-1})g_n + 0.5\right)$

$n \ge 13$: $D_n^+(x) = D_{12}^+(b_{12}) + \sum_{k=13}^{n-1}(b_k - b_{k-1})g_k + (x - b_{n-1})g_n = D_{n-1}^+(b_{n-1}) + (x - b_{n-1})g_n$

(5) $n \le 3$: $D_n^-(x) = D_{n-1}^-(b_{n-1}) + [(x - b_{n-1})g_n - 0.5]$

$4 \le n \le 999$: $D_n^-(x) = D_{n-1}^-(b_{n-1}) + [\left(x - b_{n-1} - \frac{n}{3}\right)g_n]$

$1000 \le n \le 9999$: $D_n^-(x) = D_{n-1}^-(b_{n-1}) + [\left(x - b_{n-1} - \frac{n}{5}\right)g_n]$

$10000 \le n$: $D_n^-(x) = D_{n-1}^-(b_{n-1}) + [\left(x - b_{n-1} - \frac{n}{7}\right)g_n]$

(6) $n \le 50$ ： $h(x) = [xg(xe,) - 1] = [xg_n - 1]$ ； $n \ge 51$ ： $h(x) = xg_n$ 。

Goldbach定理表明：任何偶数 $x \ge 6$ 都可以表为两个奇素数之和，同时也容易证明大偶数表为Goldbach素数表示法的个数是无限的。

致谢：作者对中国人民大学信息学院许作良教授、葫芦岛渤海船舶职业技术学院杜吉佩教授、连云港淮海工学院姜殿玉教授、辽宁大学数学系毕建行教授张金霞教授以及沈阳铁路局信息技术研究所孟德军工程师等同志给予的大力帮助，表示衷心的感谢。

附录 1 计算例题

例 1 利用 $p(xe,)$ 筛法 3 将 100 筛分，筛分后比较第 1 个 X 区间与诸 X 区间数字对数的平均值。

解： $x = 100 \in T_5$ $p(xe,) = p_5 = 11$

(1) $\frac{x}{2}\prod_{p \le p(xe,)} p = \frac{100}{2} \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 115500$; (2) $\prod_{p \le p(xe,)} p = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$;

(3) 将2及2的合数筛去剩余数字对数 $\frac{x}{2} \times (2-1) \prod_{p_2 \le p \le p(xe,)} p = \frac{100}{2} \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 57750$；

(4) 将3及其合数筛去,同时将与3同余$100 \equiv 1(\mathrm{mod}3)$的数字也筛去 $57750 \times \frac{2}{3} = 38500$

(5) 将5及其合数筛去,同时将与5同余$100 \equiv 0(\mathrm{mod}5)$的数字也筛去 $19250 \times \frac{1}{5} = 3850$

(6) 将7及其合数筛去,$100 \equiv 2(\mathrm{mod}7)$同时将与7同余的数字也筛去 $15400 \times \frac{2}{7} = 4400$

(7) 将11及其合数筛去,$100 \equiv 1(\mathrm{mod}11)$同时将与11同余的数字也筛去 $11000 \times \frac{2}{11} = 2000$

(8) 对于诸 X 区间 ，剩余数字 231000/2 -57750-38500-3850-4400-2000=9000

$$= \frac{x}{2}\prod_{p=2}(2-1)\prod_{\substack{p\geq 3\\ p\leq p(xe,)\\ p|x}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\leq p(xe,)\\ p\geq 3}}(p-2)=50(2-1)(3-2)(5-2)(7-2)(11-2)(5-1)/(5-2)=9000$$

诸 X 区间剩余数字对数平均值 $\frac{9000}{2310} = \frac{x}{2}\prod_{p=2}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\geq 3\\ p\leq p(xe,)\\ p|x}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\leq p(xe,)\\ p\geq 3}}\frac{p-2}{p} = 3.896;$

显然，第1个X区间 $[1,100]$ 经筛分后剩余4对 $4+2 \geq 3.896 = xg(xe,)$ 事实上，当$x \in T_{50}$以后，经过筛分设第1个X区间剩余数字的对数用m表示，则

$$m \succ xg(xe,)$$

例 2 试计算 10000000000 的 Goldbach 素数对表示法个数，并计算其实际分布密度。

解：查表可知：$10000000000 \in T_{34430}$， $g_{34430} = 0.00166018625$ ， $b_{34429} = 9999678774$ ，

$D^{-}_{34429}(b_{34429}) = 18095103$ ， $D^{+}_{34429}(b_{34429}) = 18273632.5$。

(1) 由 3-3 引理 3 $h(x) = xg_n$ $h(10000000000) = 10000000000 \times 0.00166018625 = 16601862.5$ 偶数 10000000000 表为两个奇素数之和表示法的个数（即 Goldbach 素数对数）至少为 16601863。

(2) 由 Goldbach 定理 $D^{-}_{34430}(x) = D^{-}_{34429}(b_{34429}) + \left[\left(x - b_{34429} - \frac{34430}{7}\right) \times g_{34430}\right]$

$$D^{+}_{34430}(x) = D^{+}_{34429}(b_{34429}) + (x - b_{34429}) \times g_{34430}$$

$$D^{-}_{34430}(10000000000) = D^{-}_{34429}(9999678774) + \left[\left(10000000000 - 9999678774 - \frac{34430}{7}\right) \times 0.001660186\right]$$

$$= 18095103 + [306307.4286 \times 0.001660186]$$

$$= 18095103 + [190.52529] = 18095103 + 190 = 18095293$$

$$D^{+}_{34430}(10000000000) = D^{+}_{34429}(9999678774) + (10000000000 - 9999678774) \times 0.001660186$$

$$= 18273632.48 + 533.83 = 18274166.31$$

因此 $18095628 \leq D(x) \leq 18274166$

(3) 实际上 $D(x) = 18200488$ $g^{*}(xe,) = \frac{D(x)}{x} = \frac{18200488}{10000000000} = 0.0018200488$ 显然，实际分布密度大于理论分布密度（即 Goldbach 素数的台阶系数）。

例 3 试计算 30030000 的 Goldbach 素数对表示法个数，并计算其实际分布密度。

解：查表可知：30030000 $\in T_{1822}$，$g_{1822}=0.008636835$，$b_{1821}=30022944$，

$D^{-}_{1821}\left(b_{1821}\right)=291489$ $D^{+}_{1821}\left(b_{1821}\right)=296461.10$

(1) 由 5-3 引理 3 $h\left(x\right)=xg_{n}$ $h\left(30030000\right)=30030000\times 0.008636835=259364.2$；

(2) 由 Goldbach 定理 $D^{-}_{1822}\left(x\right)=D^{-}_{1821}\left(b_{1821}\right)+\left[\left(x-b_{1821}-\frac{1822}{5}\right)\times g_{1822}\right]$

$$D^{+}_{1822}\left(x\right)=D^{+}_{1821}\left(b_{1821}\right)+\left(x-b_{1821}\right)\times g_{1822}$$

$$D^{-}_{1822}\left(30030000\right)=291489+\left[\left(30030000-30022944-\frac{1822}{5}\right)\times 0.008636835\right]=291546$$

$$D^{+}_{1822}\left(30030000\right)=296461.1+\left(30030000-30022944\right)\times 0.008636835=296461.1+60.94=296522.04$$

(3) 实际上 $D\left(30030000\right)=294266$ $g^{*}\left(xe,\right)=\frac{D(x)}{x}=\frac{D(30030000)}{30030000}=\frac{294266}{30030000}=0.009799068$

显然，实际分布密度大于 Goldbach 素数的台阶系数。

附录 2-1：关于素数分布、孪生素数分布、Goldbach 素数分布的渐近线与台阶理论

(1) $\sigma_{n}\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k}-b_{k-1}\right)f_{k}+\left(x-b_{n-1}\right)f_{n}$ 其中：$f\left(xe,\right)=\prod_{p\le p(xe,)}\frac{p-1}{p}$

(2) $\sigma_{n}\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k}-b_{k-1}\right)w_{k}+\left(x-b_{n-1}\right)w_{n}$ 其中：$w(xe,)=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\le 3\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\succ 3\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p}$

(3) $\sigma_{n}\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k}-b_{k-1}\right)g_{k}+\left(x-b_{n-1}\right)g_{n}$ 其中：$g\left(xe,\right)=\frac{1}{2}\prod_{p=2}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p|x\\ p\le p(xe,)\\ p\succ 2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\ p\succ 2}}\frac{p-2}{p}$

(4) $\left[e^{\frac{1}{f(xe,)}}\right]=b\left(xe,\right)$ 或 $\left[e^{\frac{1}{f_{k}}}\right]=b_{k}$，$b_{k}+1=a_{k+1}$

附录 3-1　偶数 $x \ge 6$ 的 Goldbach 素数表示法个数及其分布情况一览表

T	$p(xe,)$	x	$g(xe,)$	$D^-(x)$	$D(x)$	$D^+(x)$
14	43	1000	0.017757161	17	27	33
38	163	10000	0.010375371	116	127	145
113	617	100000	0.006632293	752	810	833
244	1549	500000	0.005109483	2894	3052	3084
341	2293	1000000	0.004611232	5212	5402	5496
751	5701	5000000	0.003698407	20762	21290	21550
1057	8447	10000000	0.003387731	37912	38807	39160
2350	20897	50000000	0.002800776	156161	158467	159380
3316	30757	100000000	0.002593999	288389	291400	293557
4701	45317	200000000	0.002409243	533871	538290	542491.73
7472	75853	500000000	0.002193892	1209650	1219610	1227357.46
10624	112067	1000000000	0.002049607	2252898	2274205	2283490.14
15125	165397	2000000000	0.001919080	4210117	4238417	4259287.64
24156	275207	5000000000	0.001764839	9645506	9703556	9745551.48
34430	406381	10000000000	0.001660186	18095628	18200488	18274165.78
49143	599281	20000000000	0.001564570	34009137	34204396	34336142.74
78798	1002583	50000000000	0.001450351	78522374	79004202	79269999.55
112766	1478909	100000000000	0.001372057	148160893	148192856	149578965.92
1041	8293	9699690	0.011173189	122469	124180	125291.70
2070	18059	38798760	0.009471026	412558	415478	419123.10
2536	22699	58198140	0.009046248	589634	593605	598412.14
3266	30197	96996900	0.008550753	925981	931793	938838.89
4629	44533	193993800	0.007941138	1712374	1723190	1734745.80
6571	65777	387987600	0.007394152	3176110	3196222	3216039.55
9339	97007	775975200	0.006901993	5903397	5945546	5976022.45
15193	166273	2017535520	0.006300085	13959447	14037095	14104647.57
21655	244129	4035071040	0.005911433	26120332	26261709	26372165.57
30850	359837	8070142080	0.005557670	48965435	49219052	49418792.43
49364	602197	20175355200	0.005136712	112688630	113287153	113714564.95
70543	888427	40350710400	0.004849269	212137458	213330307	214076219.34
100921	1311223	80701420800	0.004585276	400034747	402408141	403737214.29
108678	1421291	93117024000	0.004533471	456100209	458847239	460336009.32
15	47	1318	0.012751153	15	26	31.64
40	173	10814	0.007599454	86	102	117.21
120	659	114074	0.004866692	615	689	696.19
341	2293	1000256	0.003458424	3863	4010	4125.30
1057	8447	10010368	0.002540798	28337	29124	29399.20

附录 3-2 偶数 $x \geq 6$ 的 Goldbach 素数表示法个数及其分布情况一览表

T	$p(xe,)$	x	$g(xe,)$	$D^{-}(x)$	$D(x)$	$D^{+}(x)$
2350	20897	50014208	0.002100582	116871	118542	119567.34
3316	30757	99960842	0.001945499	215819	219027	220093.92
3845	36229	134217728	0.001884802	280384	283746	285642.39
5454	53507	268435456	0.001752584	519796	525236	528564.46
7746	78989	536870912	0.001633814	965945	975685	980971.35
11016	116663	1073741824	0.001526702	1800200	1817111	1825583.31
15685	172217	2147483648	0.001429792	3365210	3390038	3406031.48
22354	252667	4294967296	0.001346836	6300568	6341424	6369731.99
31851	373007	8589934592	0.001261745	11816949	11891654	11938528.69
45449	550351	17179869184	0.001188616	22202122	22336060	22422084.72
64933	811997	34359738368	0.001121665	41786567	42034097	42193052.31
92871	1197631	68719476736	0.001060216	78778981	79287664	79541729.58
110955	1453201	96921780224	0.001031588	107965807	108671116	109012713.33
13	41	900	0.037246727	40	48	55.98
37	157	9000	0.021008516	229	242	261.39
107	587	90000	0.013530807	1431	1471	1524.54
324	2143	900000	0.009364015	9690	9853	10055.88
1003	7937	9000000	0.006865230	69642	70619	71494.63
3145	28879	90000000	0.005247864	526925	531538	534934.10
5770	56909	300000000	0.004620370	1535451	1547388	1556153.66
8196	84061	600000000	0.004308974	2852414	2874881	2889409.80
10070	105533	900000000	0.004141183	4102767	4132595	4154994.79
18608	207661	3000000000	0.003696842	12156529	12224533	12280655.50
26513	305029	6000000000	0.003472745	22772270	22899781	22991325.81
32621	382979	9000000000	0.003350970	32902964	33076258	33212958.17
60547	752789	30000000000	0.003024849	98493048	99039834	99402678.68
86581	1110433	60000000000	0.002858241	185603121	186693890	187327479.47
106780	1394149	90000000000	0.002767086	269086070	270719498	271604184.19
15	47	1296	0.025502305	37	49	54.96
39	167	10368	0.015376673	185	204	219.85
103	563	82944	0.010290305	990	1064	1073.89
1001	7927	8957952	0.005151519	51903	52920	53406.90
3241	29927	95551488	0.003910280	416296	419548	422980.96
3649	34147	120932352	0.003811874	512947	517209	520921.42
5174	50417	241864704	0.003543147	949839	957882	963492.77

附录 3-3 偶数 $x \geq 6$ 的 Goldbach 素数表示法个数及其分布情况一览表

T	$p(xe,)$	x	$g(xe,)$	$D^{-}(x)$	$D(x)$	$D^{+}(x)$
7348	74507	483729408	0.003301711	1763377	1776380	1787400.71
10447	109903	967458816	0.003084230	3282759	3308036	3325028.20
14872	162289	1934917632	0.002887525	6133024	6172512	6201292.45
21196	239689	3869835264	0.002709066	11476441	11541426	11593252.72
30198	351529	7739670528	0.002546635	21513918	21632756	21721771.70
43081	518981	15479341056	0.002398392	40403574	40633580	40783972.93
61537	766021	30958682112	0.002262730	76014199	76448659	76724063.36
88000	1130267	61917364224	0.002138257	143257874	144111040	144600597.62
108533	1419247	92876046339	0.002070147	207705648	208986177	209664368.08
4967	48259	223092870	0.008198888	2031452	2044847	2057632.67
7053	71249	446185740	0.007637989	3768926	3792532	3815902.89
10026	105023	892371480	0.007132969	7010679	7059485	7096375.20
14271	154981	1784742960	0.006676347	13092712	13163556	13231174.10
22793	258211	4461857400	0.006137031	29972688	30127120	30258886.25
25015	285949	5354228880	0.006037519	35356006	35536922	35689474.40
32479	381071	8923714800	0.005771336	56201824	56489147	56719662.35
46349	562403	17847429600	0.005437359	105577798	106126639	106538490
66222	829463	35694859200	0.005131573	198689075	199787782	200500859
81633	1041701	53542288800	0.004964511	287842606	289511362	290482670
94720	1223941	71389718400	0.004850870	374562775	376771207	378017919
106310	1387427	89237148000	0.004765397	459538164	462283628	463799006

参考文献

[1] 潘承洞，潘承彪， 解析数论基础，北京：科学出版社， 1997 年 8 月。

[2] 王元， 哥德巴赫猜想研究，哈尔滨： 黑龙江教育出版社， 1987 年 11 月。

[3] 许作铭，罗贵文，素数分布的三组递推公式及其应用，沈阳师范大学学报（自然科学版）2006 第 24 卷 第 4 期 ，388-391。

[4] U.Dudley，基础数论， 上海：上海科学技术出版社， 1986 年 9 月。

[5] 许作铭，罗贵文，筛法与素数分布定理，科技论文在线，200611-282，2006 年 11 月 13 日。

[6] 高等数学 ， 同济大学数学教研室主编 ，北京： 高等教育出版社， 1996 年 12 月。

[7] 潘承洞，潘承彪， 初等数论 第二版 ，北京：北京大学出版社， 2003 年 1 月。

[8] 哥德巴赫猜想与素数辐射法 陈抗战 ，陈岗，西北工业大学出版社 2003 年 6 月

Any even number can be expressed as the sum of two add spriems

Xu Zuo-ming[1] , Luo Gui-wen[2]

1. Scientific and Research Department of Liaoning University，Shenyang , PRC, 110036
2. Liaoning Light Industry Research Institute, Shenyang，PRC, 110036

Email: xzm9@163.com

Abstract: In the research prime number distributed process, this article through established one kind of new sieve method and the stair theory, obtained about the prime number distribution three group of recurrence formula: The recurrence formula is not bigger than x the prime number integer and the twin prime integer. Method of portrayal integer recurrence formula that any even number not less than 6 can be expressed as the sum of two odd primes. Using this recurrence formula, can estimate effectively the prime number(Including twin prime, Goldbach prime number) actual distribution.

Key Words: Prime number distribution , Step coefficient, Sieve method, Goldbach prime number，Goldbach Hypothesis.

CLC number: O156.4； **Document Code:** A

作者简介：1.许作铭（1953-），男，辽宁普兰店人，1982 年 1 月毕业于沈阳师范学院数学系。辽宁大学副教授，长期从事素数分布研究。024-62202282