任意相邻两个素数之间的最大距离公式

许作铭[1]， 罗贵文[2]， 孟德军[3]
1.辽宁大学科研处，沈阳（ 110036 ）
2.辽宁省轻工科学研究院，沈阳 （110036）
3.沈阳铁路局信息技术研究所，沈阳（110001）
E-mail: xzm9@163.com

摘要：本文通过利用素数分布理论，给出了估计任意相邻两个素数之间的最大距离公式，比waniec和Pintz在Riemann假设成立条件下得到的计算公式有效。

关键词：素数定理；素数分布；台阶系数；最大距离公式。
中国图书资料分类号：O156.4 **文献标识码**：A **文章编号**：

1．引言

如果 Riemann 假设成立，以 p_n 表第 n 个素数，那么，估计任意两个相邻素数之间的距离为：

$$p_{n+1} - p_n \prec\prec p_n^{1/2} \log p_n \tag{1-1}$$

目前最好的结果是由筛法得到的。首先 Iwaniec 和 Jutila （Arkiv Matematik,17(1979),167-176）证明了 $p_{n+1} - p_n \prec\prec p_n^{13/23-\varepsilon}$。

后来又稍有改进，Iwaniec 和 Pintz(Monatshefte Math.98(1984),115-143) 把 13/23 改进为 23/42。又进一步改进为 11/20-1/384。 （见[1]潘承洞，潘承彪，解析数论§30，675-676）

$$p_{n+1} - p_n \prec\prec p_n^{11/20-1/384} = d_1 \tag{1-2}$$

本文利用素数分布定理及其推论，得到了估计任意相邻两个素数之间的距离公式，效果较好。

2．台阶、台阶系数与素数分布定理

2.1 台阶素数与台阶系数

令

$$f(xe,) = \prod_{p \le p(xe,)} \frac{p-1}{p} \tag{2-1}$$

定义 1 我们把 $p(xe,)$ 称为台阶素数；$p(xe,-1)$ 为 $p(xe,)$ 前面的一个素数；$p(xe,1)$ 为 $p(xe,)$ 后面的一个素数。称 $f(xe,)$ 为素数的台阶系数。简称台阶系数。（2.1，2.2 见[2]许作铭等，沈阳师范大学学报（自然科学版）2006 第 24 卷第 4 期 388-391）

显然，台阶系数 $f(xe,)$ 具有以下性质：

（1） $f(xe,)$ 是非负有界函数 $0 \prec f(xe,) \le 0.5$ （2-2）

（2） $f(xe,)$ 是单调递减函数 $f(xe,1) \prec f(xe,) \prec f(xe,-1)$ （2-3）

（3） 当 $x \to \infty$ 时 $f(xe,) \to 0$ 渐近线 $f(xe,) = 0$ （2-4）

2.2 台阶的划分

定义 2 令 $\left[e^{1/f(xe,)}\right] = b(xe,)$ $b_k + 1 = a_{k+1}$ （2-5）

我们称 $b(xe,)$ 为 $p(xe,)$ 所在台阶的台阶尾数；$a(xe,1) = a_{k+1}$ 为 $p(xe,1)$ 所在台阶的台阶首数。

2.3 素数分布定理：

利用 $p(xe,)$ 筛法，命 $\pi(x)$ 为不超过 x 的素数个数， $f(xe,) = \prod_{p \le p(xe,)} \frac{p-1}{p}$ 则

$$h(x) \le \Pi_n^-(x) \le \pi(x) \le \Pi_n^+(x) \tag{2-6}$$

$$R(x) = \Pi_n^+(x) - \Pi_n^-(x) = o\left(\Pi_n^-(x)\right) = o\left(\Pi^-(x)\right) \quad (n\to\infty, x\to\infty) \tag{2-7}$$

（$\Pi_n^+(x)$、$\Pi_n^-(x)$ 的定义见[3]许作铭等， $p(xe,)$ 筛法与素数分布定理，中国科技论文在线，2006-11-13）

2.4 推论任意两个自然数 x_m 与 x_n 之间的素数个数计算公式

设 $x_m \in T_m$ $x_n \in T_n$ x_m ， $x_n \in N^+$ ； n ， $m \in N^+$ $n \ge m$

$$\Delta\pi(x) \ge \left[x_n f(x_n e,) - x_m f(x_m e,)\right] \quad （n \succ m \text{ 即不在同一台阶}） \tag{2-8}$$

$$\Delta\pi(x) \ge \left[x_n f(x_n e,) - x_m f(x_n e,-1)\right] \quad （n = m \text{ 即在同一台阶}） \tag{2-9}$$

3． 任意相邻两个素数之间的最大距离公式

设任一素数 p_n 为第 n 个素数， $p_n \in T_k$ $p_n \in P$ $k \in N^+$ 则 p_n 与其相邻的下一个素数 p_{n+1} 的最大距离

$$p_{n+1} - p_n \prec \left[\frac{1}{f(P_n e,1)} + \frac{p_n}{p_{(p_n e,)} - 1}\right] = \left[\frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k - 1}\right] \tag{3-1}$$

证明：如果任一素数 p_n 为第 n 个素数 $p_n \in T_k$ $p_n \in P$ $k \in N^+$ 则下一个素数为 $p_{n+1} \in T_k$ 或 $p_{n+1} \in T_{k+1}$ 即若不在一个台阶中，必定在相邻的下一个台阶中。

设相邻两个素数之间的距离为： $d = p_{n+1} - p_n$

（1） 当 p_{n+1}， $p_n \in T_k$， 时 $f(P_{n+1}e,) = f(P_n e,)$ 由（2-9）

$$\begin{cases} d = P_{n+1} - P_n \\ P_{n+1} f(P_{n+1}e,) - P_n f(P_n e,) \le 1 \end{cases} \qquad (d + p_n) f(p_n e,) - p_n f(p_n e,) \le 1$$

$$d \le \frac{1}{f(p_n e,)} + \frac{p_n f(p_n e,-1)\left(1-\frac{p_k-1}{p_k}\right)}{f(p_n e,-1)\frac{p_k-1}{p_k}} = \frac{1}{f_k} + \frac{p_n}{p_k-1} \prec \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k-1}$$

考虑其实际意义 $d \le \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,)-1}\right] = \left[\frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k-1}\right]$ (3-2)

(2) 当 $p_n \in T_k$， $p_{n+1} \in T_{k+1}$ 时 $f(p_{n+1}e,) = f(p_n e,1)$ 由 (2-8)

$$\begin{cases} d = p_{n+1} - p_n \\ p_{n+1} f(p_{n+1}e,) - p_n f(p_n e,) \le 1 \end{cases}$$

$$(d+p_n) f(p_{n+1}e,) - p_n f(p_n e,) \le 1$$

$$(d+p_n) f(p_n e,1) - p_n f(p_n e,) \le 1$$

$$d \le \frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n f(p_n e,)\left(1-\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}\right)}{f(p_n e,)\times\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}} \le \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_{k+1}-1} \prec \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k-1}$$

考虑其实际意义 $d \le \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,)-1}\right] = \left[\frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k-1}\right]$ (3-3)

由 (3-2)、(3-3)， 无论 P_n 与其相邻的下一个素数 P_{n+1} 是否在同一个台阶，恒有

$$d = p_{n+1} - p_n \le \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,)-1}\right] = \left[\frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k-1}\right]$$

成立。即从素数 p_n 到 $p_{n+1} = p_n + d \le p_n + \left[\frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{p(p_n e,)-1}\right]$ 之间至少存在一个素数。证毕。

4.结论：

在假设 Riemann 假设成立的条件下得到的公式（1-2）计算任意相邻两个素数之间最大距离，不如利用公式（3-1）计算更接近实际，而且 p_n 越大效果越明显。（见附录 2）

附录 1 已知第 15 个素数为 1327，试估计与其相邻的下一个素数之间的最大距离 d。

解：∵ $x = p_n = p_{15} = 1357$ 查表可知 $p(xe,) = 47$ $f(xe,1) = 0.136087034$

$$\therefore\ d = \left[\frac{1}{f(xe,1)} + \frac{p_n}{p(xe,)-1}\right] = \left[\frac{1}{0.136087034} + \frac{1327}{47-1}\right] = [36.20] = 36$$

即从 $p_n = 1327$ 到 $p_{n+1} \le p_n + d = 1327 + 36 = 1363$ 之间至少存在一个素数。实际上从素数 1327 到自然数 1363 之间只有一个素数 1361。

讨论：当 $p_n \succ 18039$，即不小于 51 台阶的任意素数 p_n，与其相邻的两个素数之间的最大距离公式：

$$d \le [p_n/(p_k-1)]$$

附录 2 利公式（3-1）与 Iwaniec-Pintz 公式估算“相邻两个素数之间的最大距离”比较表

T	$p(xe,)$	$f(xe,1)$	$x = p_n$	d	d_1	d_1/d	$d_1 - d$
5	11	0.191808192	97	14	12	0.86	-2
10	29	0.152852151	547	26	31	1.19	5
15	47	0.136087034	1229	34	49	1.44	15
29	109	0.114770042	5281	57	109	1.91	52
40	173	0.106643182	10663	71	160	2.25	89
55	257	0.09958273	21893	95	237	2.49	142
84	433	0.091543253	54001	135	389	2.88	253
113	617	0.086653885	100169	174	546	3.14	372
140	809	0.083428636	155921	204	695	3.41	491
244	1549	0.076137276	500831	336	1318	3.92	982
341	2293	0.072345899	998689	449	1923	4.28	1474
480	3413	0.068864284	2010733	603	2821	4.68	2218
706	5333	0.065337987	4416259	843	4339	5.15	3496
724	5479	0.065121589	4652353	864	4465	5.17	3601
1057	8447	0.06203060	10002007	1200	6789	5.66	5589
1492	12497	0.059471992	20100391	1625	9948	6.12	8323
2360	20983	0.05637877	50429573	2421	16459	6.80	14038
3316	30757	0.054284473	99999989	3269	23942	7.32	20673

附录 3　不大于 100000000 内任意两个相邻素数的最大距离的计算值与实际值比较表

T	$p(xe,)$	$f(xe,1)$	$x = p_n$	d	$p_n + d$	p_{n+1}	$p_{n+1} - p_n$	备注
5	11	0.1918082	89	14	103	97	8	100 以内
5	11	0.1918082	113	16	129	127	14	500 以内
13	41	0.1417194	887	29	916	907	20	1000 以内
15	47	0.1360870	1327	36	1363	1361	34	5000 以内
38	163	0.1078658	9551	68	9619	9587	36	10000 以内
52	239	0.1007547	19609	92	19701	19661	52	20000 以内
65	313	0.0962149	31397	111	31508	31469	72	10 万以内
140	809	0.0834286	155921	204	156125	156007	86	20 万以内
242	1531	0.0762355	492113	334	492447	492227	114	1 百万以内
396	2713	0.0707801	1357201	514	1357715	1357333	132	2 百万以内
724	5479	0.0651216	4652353	864	4653217	4652507	154	1 千万以内
1377	11411	0.0600459	17051707	1511	17053218	17051887	180	2 千万以内
2284	20183	0.0565871	47326693	2362	47329055	47326913	220	1 亿以内

参考文献 [1] 潘承洞，潘承彪， 解析数论基础，北京：科学出版社， 1997 年 8 月。

[2] 许作铭，罗贵文，筛法与与素数分的三组递推公式沈阳师范大学学报（自然科学版）2006 第 24 卷第 4 期，388-391。

[3] 许作铭，罗贵文， $p(xe,)$ 筛法与素数分布定理，中国科技论文在线，2006-11-13。

[4] 华罗庚， 数论导引，北京： 科学出版社， 1979 年。

[5] 潘承洞，潘承彪， 初等数论 第二版 ，北京：北京大学出版社， 2003 年 1 月。

Formula of maximum distance between any two adjoining prime number

Xu Zuo-ming[1] , Luo Gui-wen[2] Meng De-jun3

1. Scientific and Research Department of Liaoning University，Shenyang , PRC, 110036
2. Liaoning Light Industry Research Institute, Shenyang，PRC, 110036

3.Information technologyResearch institute of Shenyang Railroad Bureau,Shenyang,PRC,110001

Email: xzm9@163.com

Abstract: This article through the use prime number distribution theory, has given a formula of maximum distance between any two adjoining prime number, the formula which obtains under the Riemann supposition establishment condition is more effective than waniec and Pintz.

Key Words: Prime number theorem, Prime number distribution , Step coefficient, Formula of maximum distance.

CLC number: O156.4； **Document Code:** A

作者简介：许作铭（1953-），男，辽宁普兰店人，1982 年 1 月毕业于沈阳师范学院数学系。辽宁大学副教授，长期从事素数分布研究。