关于 Fibonacci 数中含有形如$4p+1$的素因子

马玉林
辽宁工程技术大学力学与工程学院，辽宁阜新（123000）
Email: hxwyaoyao@163.com

摘　要：本文将用初等数学的方法证明下标素数 p 为何值的情况下，Fibonacci 数 F_p 具有形如$4p+1$的素因子。本文给出如下的结论：如果素数 $p>7$， $p\equiv 2(\bmod 5)$， $4p+1$也是素数，且$-5F_p^2+4\not\equiv 0(\bmod 4p+1)$，则$4p+1\mid F_p$。

关键词： Fibonacci 数，素数，二项式定理
中图分类号：O156.1

1. 引言

Fibonacci 数列中素数项只出现在下标是素数的项里，唯一的例外是第 4 项元素 3。但这个规律反过来不成立，数列的下标是素数的项里也可能有合数。这一"规律"可以为人们提供搜索大素数的线索。目前为止，还没有人能给出 Fibonacci 数列中所有的素数的方法。

对于 Fibonacci 数，除$F_4=3$以外，其素数项只出现在下标是素数的项里，这是因为若$n,k\geq 1$，则$F_n\mid F_{kn}$。因此，讨论 Fibonacci 数中哪些项是素数就只考察下标是素数的那些项。

2000 年，Vladimir Drobot[1]证明了，如果素数 $p>7$， $p\equiv 2(\bmod 5)$或 $p\equiv 4(\bmod 5)$，且$2p-1$也是素数，则$2p-1\mid F_p$，这说明F_p是合数。2005 年，赵艳[2]用另一种方法证明了这个结论。这个结论说明在这样的条件下， F_p 是合数。本文将证明下标为素数 p 的 Fibonacci 数 F_p 在什么条件下具有形如$4p+1$的素因子。如果能找出所有 Fibonacci 数中含有形如$4p+1$的素因子的项，那么这一类数一定是合数，再研究 Fibonacci 数列中素数的问题时，就可以不再考虑这一类数了。

2. 本文主要工作

下标为素数 p 的 Fibonacci 数 F_p 在什么条件下具有形如$4p+1$的素因子，本文给出了如下定理。

定理：素数 $p>7$满足以下条件：

Ⅰ. $p\equiv 2(\bmod 5)$；

Ⅱ. $4p+1$也是素数；

III. $-5F_p^2+4\not\equiv 0(\bmod 4p+1)$.

则$4p+1\mid F_p$，亦F_p是合数。

证明：Fibonacci 数列的通项公式是[2]：

$$F_p=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p\right] \tag{1}$$

将等式（1）两边平方再整理得：

$$5F_p^2-2=\frac{1}{2^{2p}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{2p}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{2p}\right] \tag{2}$$

再将等式（2）两边平方得：

$$\begin{aligned}\left(5F_p^2-2\right)^2&=\left\{\frac{1}{2^{2p}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{2p}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{2p}\right]\right\}^2\\&=\frac{1}{2^{4p}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{4p}+2\cdot 2^{4p}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{4p}\right]\\&=\frac{1}{2^{4p}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{4p}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{4p}\right]+2\end{aligned}$$

即：

$$\left(5F_p^2-2\right)^2-2=\frac{1}{2^{4p}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{4p}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{4p}\right] \tag{3}$$

将等式（3）两边分别乘以$\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)$，得

$$\begin{aligned}&\left[\left(5F_p^2-2\right)^2-2\right]\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\\&=\frac{1}{2^{4p}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{4p}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)+\left(1-\sqrt{5}\right)^{4p}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)\right]\end{aligned}$$

整理后得：

$$\begin{aligned}&-2^{4p+1}\cdot\left[\left(5F_p^2-2\right)^2-2\right]\cdot\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{4p+1}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{4p+1}\right]-\frac{\sqrt{5}}{2}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{4p+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{4p+1}\right]\end{aligned}$$

用二项式定理得到下面的式子：

$$\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{4p+1}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{4p+1}\right]=1+\binom{4p+1}{2}5+\binom{4p+1}{4}5^2+\cdots+\binom{4p+1}{4p}5^{2p}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{4p+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{4p+1}\right]=\binom{4p+1}{1}5+\binom{4p+1}{3}5^2+\cdots+5^{2p+1}$$

则有：

$$\begin{aligned}&-2^{4p+1}\cdot\left[\left(5F_p^2-2\right)^2-2\right]\cdot\\&=1+\binom{4p+1}{2}5+\binom{4p+1}{4}5^2+\cdots+\binom{4p+1}{4p}5^{2p}-\binom{4p+1}{1}5-\binom{4p+1}{3}5^2-\cdots-5^{2p+1}\end{aligned}$$

因为$4p+1$是素数，则 $2^{4p+1}\equiv 2\left(\bmod 4p+1\right)$。

又因为$4p+1$是素数，对任意$k<4p+1$，都有

$$\binom{4p+1}{k}\equiv 0\left(\bmod 4p+1\right)。$$

因此得到下面的式子：

$$-2\cdot\left[\left(5F_p^2-2\right)^2-2\right]\equiv 1-5^{2p+1}\left(\bmod 4p+1\right) \quad (4)$$

由 Euler 定理[3]，有

$$5^{2p}\equiv\left(\frac{5}{4p+1}\right)\left(\bmod 4p+1\right)$$

因为 $p\equiv 2\left(\bmod 5\right)$，可令 $p=5k+2$，其中 k 为正数，则

$$\left(\frac{5}{4p+1}\right)=\left(\frac{4p+1}{5}\right)=\left(\frac{20k+8+1}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)=1$$

进而得：

$$-2\cdot\left[\left(5F_p^2-2\right)^2-2\right]\equiv 1-5\equiv -4\left(\bmod 4p+1\right) \quad (5)$$

将（5）式整理得：

$$F_p^2\left(-5F_p^2+4\right)\equiv 0\left(\bmod 4p+1\right)$$

因为 $4p+1$ 是素数，则 $F_p\equiv 0\ \left(\bmod 4p+1\right)$ 或 $-5F_p^2+4\equiv 0\ \left(\bmod 4p+1\right)$，则当 $4p+1\nmid -5F_p^2+4$ 时，即 $-5F_p^2+4\not\equiv 0\ \left(\bmod 4p+1\right)$，一定有 $4p+1\mid F_p$；事实上，当 $4p+1\mid -5F_p^2+4$ 时，即 $-5F_p^2+4\equiv 0\ \left(\bmod 4p+1\right)$，若 $F_p\equiv 0\ \left(\bmod 4p+1\right)$，则有 $4\equiv 0\ \left(\bmod 4p+1\right)$ 不成立，所以 $F_p\not\equiv 0\ \left(\bmod 4p+1\right)$。所以只要 $-5F_p^2+4\not\equiv 0\ \left(\bmod 4p+1\right)$，则 $4p+1\mid F_p$ 一定成立。

由上述可知，只要下标 p 满足Ⅰ.Ⅱ.Ⅲ.三个条件，就有 $4p+1\mid F_p$。这说明当 p 满足Ⅰ.Ⅱ.Ⅲ.时，F_p 是合数。

3. 结论

下面列出 Fibonacci 数列中下标 p 满足定理的三个条件的前 10 项：

37，67，97，127，277，307，487， 577，727， 997……

以上这 10 项下标所对应的 Fibonacci 数就一定含有形如 $4p+1$ 的素因子。

我们可以根据本文证明出的定理相类似的列出 Fibonacci 数列中其它含有形如 $4p+1$ 的素因子的 Fibonacci 数，这样我们就可以排除一类 Fibonacci 数列中的合数，使我们对于 Fibonacci 数列中素数的问题的研究有了更进一步的深入。

参考文献

[1] Vladimir Drobot．On Primes in the Fibonacci Sequence[J].*The Fibonacci Quarterly*，2000，38(1)：71-72.
[2] 赵艳．广义 Fibonacci-Lucas 数中的素数问题[J]．浙江大学学报（理学版），2005，32（1）：10-13.
[3] 闵嗣鹤，严士健．初等数论[M]．北京：高等教育出版社，2001：37-40,50,59,78.

On prime factors of the form $4p+1$ in the Fibonacci Numbers

Ma Yulin
College of Mechanics and Engineering，Liaoning Technical University，Fuxin，Liaoing（123000）

Abstract
With the primary math, this paper will give the results that what p is so that the Fibonacci numbers F_p have prime factors of the form $4p+1$. In this paper, we give the conclusion as follow: Let $p>7$ be a prime satisfying the following three conditions: Ⅰ. $p \equiv 2 \pmod 5$; Ⅱ. $4p+1$ is also a prime;Ⅲ. $-5F_p^2+4 \not\equiv 0 \pmod{4p+1}$. Then F_p is composite, in fact,
$4p+1 \mid F_p$.

keywords: Fibonacci numbers，prime，binomial theorem

作者简介：马玉林，男，1981 年生，辽宁省沈阳市人，硕士研究生。