全体正整数的自然对数构成$\mathbb{N}$上的 Hilbert 空间

李汉巨
华南师范大学数学科学学院，广州 (510631)
E-mail: hanjuli@yahoo.com.cn

摘　要：本文引进自然数集$\mathbb{N}$上的线性空间的概念，并研究了全体正整数的自然对数构成$\mathbb{N}$上的 Hilbert 空间的几何学，最后给出了此空间理论在数论中的一些应用并提出一些公开问题.

关键词：标准正交基，Gram-Schmidt 正交化，素数，Hilbert 空间
中图分类号：O156.1，O177.1

0．引言

自从 Euclid 证明了存在无穷个素数以来，素数的分布问题成为数论中的核心内容，如素数基本定理的证明及其初等证明，特别是最近 Ben Green and Terence Tao[1]证明了存在任意长的等差数列．关于素数的分布，还有一些没解决的重要问题，如孪生素数猜想，歌德巴赫猜想和黎曼猜想．这些都是关于素数分布的研究．但关于素数还有另外一面的研究．素数有一个基本功能，即素数是构成一切整数的基本构件．素数的作用有点类似于 Hilbert 空间的标准正交基(Hilbert 空间中的任何元素都可以用标准正交基线性表出，更详细点，就是可以用其 Fourier 级数表示)．由算术基本定理，对任意正整数n都有

$$n=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{n(p)},$$

其中$\mathcal{P}$表示所有素数构成的集合，$n(p)$是自然数（可以等于 0)．对上式取自然对数有

$$\ln n=\sum_{p\in\mathcal{P}}n(p)\ln p.$$

从上式可以看出，一切正整数的自然对数可以由所有素数的自然对数线性表出．从这个意义来看，$\{\ln p:p\in\mathcal{P}\}$有点类似于 Banach 空间的 Schauder 基．通过上式，可以在集合$\{\ln n:n\in\mathbb{Z}_+\}$与集合$\{(n(p_1),n(p_2),\cdots):n\in\mathbb{Z}_+\}$（$p_n$表示第 n 个素数）之间建立一一对应关系，即可以认为

$$\ln n=(n(p_1),n(p_2),\cdots).$$

但$\{(n(p_1),n(p_2),\cdots):n\in\mathbb{Z}_+\}$并不具有代数结构和拓扑结构，即它不可以看成$\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$的子群或$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$的子空间．所以必须在$\mathcal{H}=\{\ln n:n\in\mathbb{Z}_+\}$中引进一种新结构，即$\mathbb{N}$上的 Hilbert 空间．引进新结构的目的是为了研究素数（作为构成一切正整数的基本构件）的性质．定理 4.3 表明了$\mathcal{S}=\{\ln p_j:j\in\mathbb{Z}_+\}$是$\mathcal{H}$的唯一标准正交基，这与通常的 Hilbert 空间不一样，体现了素数的独特性．

一般来说，$\mathcal{H}$作为$\mathbb{N}$上的 Hilbert 空间的性质反映了素数的性质．另一方面，对$\mathcal{H}$的研究比较容易，因为已经有了研究 Hilbert 空间的基本方法．顺便提出，可以在$\mathcal{H}$上建立 Fourier 分析，还可以研究$\mathcal{H}$上的有界线性泛函（与数论函数对应），不过这都不是本文的重

点．本文可以看作是利用泛函分析的方法研究素数的初步尝试．

本文是这样安排的．在第 1 节里引进自然数集 $\mathbb{N}$ 上的线性空间 $\mathcal{H}$ 的概念，这个线性空间与通常线性空间的不同在于不能在 $\mathcal{H}$ 中按照自然的方式定义两个向量的差．在第 2 节里我们按照自然的方式引进 $\mathcal{H}$ 的内积，即 $\mathbb{N}$ 上的内积空间．有了内积这个概念就可以定义范数，有了范数就可以考虑向量的单位化问题了．值得注意的是，在 $\mathcal{H}$ 中并不是所有非零向量都可以单位化，这与通常赋范线性空间不一样．一个有趣的结果是命题 2.3，这个定理说明了 $\mathcal{H}$ 中的单位向量有且仅有 $\{\ln p_j : j \in \mathbb{Z}_+\}$．在第 3 节里引进一种形式差，这种差与通常的差有很大区别，并证明了 $\mathbb{N}$ 上的内积空间 $\mathcal{H}$ 是完备的（通常意义下的完备），即 $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的 Hilbert 空间．在第 4 节里主要考虑 Gram-Schmidt 正交化问题，主要定理说明了并不是所有的线性无关向量都可以施行 Gram-Schmidt 正交化过程．在这一节里还给出了一种适合所有线性无关向量的正交化方法．研究正交化方法的意义在于大整数的分解，如果能找到一种不依赖向量的坐标的正交化方法，就有希望解决大整数分解这个难题，但本文给出正交化方法依赖向量的坐标．虽然 Gram-Schmidt 正交化方法不依赖向量的坐标，但它的应用需要苛刻的条件，见定理 4.2．在第 5 节里给出了此空间理论在数论中的应用，首先得到一个联系数论的定理，即定理 5.1，这个定理说明了 $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ 等价于 $\gcd(n,m)=1$．其次是利用本文的结论证明了两类数是无理数．最后赋予整数一种几何意义，并给出了一些公开问题．

1. 自然数集 $\mathbb{N}$ 上的线性空间

通常的线性空间是定义在数域 $\mathbb{F}$ 上，由于 $\mathbb{F}$ 对四则运算封闭，因此数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间具有良好的性质．自然数集 $\mathbb{N}$ 上的线性空间的定义与数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间的定义类似，只要简单地用 $\mathbb{N}$ 代替 $\mathbb{F}$．但是由于 $\mathbb{N}$ 对减法和除法不封闭，因此 $\mathbb{N}$ 上的线性空间丢失了数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间所具有的一些性质．这必然导致了由 $\mathbb{N}$ 上的线性空间引出来的 $\mathbb{N}$ 上的 Hilbert 空间与通常的 Hilbert 空间不一样．

定义 1.1 设 $\mathcal{H}$ 是一个非空集合，$\mathbb{N}$ 是自然数集，即 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$，$\mathcal{H}$ 称为 $\mathbb{N}$ 上的线性空间，若以下条件成立，对于 $\mathcal{H}$ 中任意的两个元素 x，y 有唯一的元素 $z\in\mathcal{H}$ 与其对应，称 z 为 x 与 y 的和，记为 $z=x+y$．又对于 $\mathcal{H}$ 中任意元素 x 及 $\mathbb{N}$ 中任一数 α，有唯一元素 $u\in\mathcal{H}$ 与之对应，称 u 为数 α 与元素 x 的数量乘积，记为 $u=\alpha x$，并且对于任意的 $x,y,z\in\mathcal{H}$，α，$\beta\in\mathbb{N}$，上述的加法与数乘运算满足下列条件：

（1）$x+y=y+x$；

（2）$x+(y+z)=(x+y)+z$；

（3）$\mathcal{H}$ 中存在元素 0 使得对任一 $x\in\mathcal{H}$，$0+x=x$，称 0 为 $\mathcal{H}$ 的零元；

（4）$1x=x$；

（5）$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$；

（6）$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$；

（7）$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$；

注释 1.1 在自然数集$\mathbb{N}$上的线性空间$\mathcal{H}$里，无法按照自然的方式定义负元素，从而无法按照自然的方式定义减法．事实上，如果对于$\mathcal{H}$中每一个元素 x，都有$\mathcal{H}$中的元素 y，使得$x+y=0$（y 称为 x 的负元素），就可以证明 x 的负元素 y 是唯一的，记 $y=-x$．这样就可以定义减法如下：

$$x-y=x+(-y).$$

因此有

$$x+(-1)x=1x+(-1)x=(1-1)x=0x=0.$$

两边加上$-x$有

$$-x=(-1)x.$$

上面等式说明了一个元素的负元素等于-1乘其自身，而$-1\notin\mathbb{N}$，这就产生矛盾了．

2. 全体正整数的自然对数构成$\mathbb{N}$上的内积空间

记$\mathcal{H}=\left\{x_j : j\in\mathbb{Z}_+\right\}$，$\mathcal{S}=\left\{e_j : j\in\mathbb{Z}_+\right\}$，其中$x_j=\ln j$，$e_j=\ln p_j$，$j$是正整数，$p_j$表示第 j 个素数．对于$\mathcal{H}$中任意两个元素x_n和x_m，定义它们的和为

$$x_n+x_m=\ln n+\ln m=\ln nm=x_{nm}.$$

任取$\alpha\in\mathbb{N}$，定义α与x_n的数量乘积为

$$\alpha x_n=\alpha\ln n=\ln n^{\alpha}=x_{n^{\alpha}}.$$

不难验算$\mathcal{H}$对这两运算构成$\mathbb{N}$上的线性空间．

命题 2.1 $\mathcal{S}=\left\{e_j : j\in\mathbb{Z}_+\right\}$是$\mathcal{H}$的线性无关子集．

证明 任取$\alpha_n\in\mathbb{N}$，$n\in\mathbb{Z}_+$，令

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n e_n=0,$$

注意到$e_n>0$，$\alpha_n\geq 0$，$\alpha_n e_n\geq 0$，若有$\alpha_j>0$，则

$$0=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n e_n=\sum_{n=1}^{j-1}\alpha_n e_n+\alpha_j e_j+\sum_{j-1}^{+\infty}\alpha_n e_n>0$$

这产生矛盾，因此对所有正整数 j 都有$\alpha_j=0$，即$\mathcal{S}$是$\mathcal{H}$的线性无关子集．

命题 2.2 任取$\mathcal{H}$中的向量x_n，则存在唯一一列自然数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots$使得

$$x_n=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j e_j .$$

证明 根据算术基本定理，对任意$x_n\in\mathcal{H}$，存在唯一一组自然数组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，其中$\alpha_m$为最后一个不小于 1 的自然数，使得

$$n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_m^{\alpha_m},$$

从而

$$x_n=\ln n=\ln P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_m^{\alpha_m}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j e_j .$$

令$\alpha_j=0\left(j=m+1,m+2,\cdots\right)$，那么存在唯一一列自然数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots$使得

$$x_n=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j e_j .$$

称向量$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots)$为$x_n$的坐标，记作$x_n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots)$. 在$\mathcal{H}$中另取$x_m=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots)$，不难验算

$$x_n+x_m=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_j+\beta_j,\cdots),$$

$$\alpha x_n=(\alpha\alpha_1,\alpha\alpha_2,\cdots,\alpha\alpha_j,\cdots).$$

显然x_n的坐标$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots)$满足性质：存在正整数$j$使得当$k\geq j$时有$\alpha_k=0$. 由此可知，级数$\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^2$收敛. 在$\mathcal{H}$中另取$x_m=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots)$，由 Cauchy 不等式有

$$\left|\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j\right|\leq\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty,$$

即级数$\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j$收敛. 因此可以$\mathcal{H}$中定义内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{N}$如下：

$$\langle x_n,x_m\rangle=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j,$$

容易验证$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$为$\mathbb{N}$上的内积空间（满足与通常的内积空间一样的条件），简记为$\mathcal{H}$. 通过内积，定义范数$\|\cdot\|$：$\mathcal{H}\to\mathbb{R}$如下：

$$\| x_n \| = \sqrt{\langle x_n, x_n \rangle} = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

容易验证$(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$为$\mathbb{N}$上的赋范线性空间（满足与通常的赋范线性空间一样的条件），简记为$\mathcal{H}$. 在$\mathcal{H}$中，运算$x_n/2$是不合法的，但如果$x_n = (2,0,4,6,0,\cdots)$，则认为$x_n/2$是合法的，且$x_n/2 = (1,0,2,3,0,\cdots)$. 一般地，可以在$\mathcal{H}$中引进形式数乘运算：当$\alpha\alpha_j \in \mathbb{N}$对所有正整数$j$成立时，规定$\alpha x_n = (\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \cdots, \alpha\alpha_j, \cdots)$. 有了上面的规定就可以考虑$\mathcal{H}$中向量的单位化问题了.

命题 2.3 若$x_n \in \mathcal{H}$，则$\|x_n\| = 0$或者$\|x_n\| \geq 1$.

证明 若$x_n = 0$，显然$\|x_n\| = 0$；若$x_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j, \cdots) \neq 0$，则至少存在一个正整数$j$使得$\alpha_j \geq 1$，从而

$$\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_k^2 + a_j^2 + \sum_{k=j+1}^{+\infty} \alpha_k^2 \geq 1 .$$

命题 2.4 (1) $\mathcal{H}$中的向量x_n可以单位化的充要条件是存在正整数α、j使得$x_n = \alpha e_j$; (2) $\mathcal{H}$中的单位向量有且仅有$\{e_j : j \in \mathbb{Z}_+\}$.

证明 (1) 若$\mathcal{H}$中的向量x_n可以单位化，显然x_n不能为 0，所以其坐标有一分量$\alpha_j \geq 1$. 由于x_n的单位向量为

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} = \left(\frac{\alpha_1}{\|x_n\|}, \cdots, \frac{\alpha_i}{\|x_n\|}, \cdots, \frac{\alpha_j}{\|x_n\|}, \cdots \right).$$

故对任意正整数$i \neq j$有

$$\frac{\alpha_i}{\| x_n \|} = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2}} \leq \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \alpha_j^2}} < \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2}} = 1，且 \frac{\alpha_i}{\| x_n \|} \in \mathbb{N} .$$

从而$\alpha_i = 0$，所以

$$x_n = \overbrace{(0, \cdots 0, \alpha_j}^{j}, 0, \cdots) = \alpha_j e_j ,$$

即存在正整数$\alpha (= \alpha_j)$，j使得$x_n = \alpha e_j$. 另一方面，若$x_n = \alpha e_j$，则

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} = \frac{\alpha e_j}{\|\alpha e_j\|} = \frac{\alpha e_j}{\alpha \|e_j\|} = e_j ,$$

即$\mathcal{H}$中的向量x_n可以单位化.

（2）若$\|x_n\|=1$，即$\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^2=1$，则必有

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{j-1}=\alpha_{j+1}=\cdots=0,\quad a_j=1,$$

即$x_n=e_j$. 反之若$x_n=e_j$，则显然有$\|x_n\|=1$.

3. 全体正整数的自然对数构成$\mathbb{N}$上的 Hilbert 空间

在$\mathcal{H}$中不能定义两个向量的差，为此在$\mathcal{H}$中引进一种形式差. 首先在$\mathcal{H}$中引进一种偏序结构.

定义 3.1 设$x_n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots)$，$x_m=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots)$，称$x_m\prec x_n$，如果对任意正整数$j$都有$\beta_j\le\alpha_j$.

若$x_m\prec x_n$，定义x_n与x_m的差为

$$x_n-x_m=\left(\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_j-\beta_j,\cdots\right) \tag{3.1}$$

根据定义 3.1 显然有$x_n-x_m\in\mathcal{H}$. 对于一般情形，定义x_n与x_m的差为

$$x_n-x_m=\left(|\alpha_1-\beta_1|,|\alpha_2-\beta_2|,\cdots,|\alpha_j-\beta_j|,\cdots\right) \tag{3.2}$$

这时仍有$x_n-x_m\in\mathcal{H}$. 容易知道$x_n-x_m=0$等价于$x_n=x_m$. 显然（3.2）是（3.1）的一个推广.

注释 3.1 显然有$x_n-x_m=x_m-x_n$. 但下面的推理是不对的，因为

$$x_n-x_m=x_m-x_n,$$

所以

$$x_n-x_m-\left(x_m-x_n\right)=0,$$

即

$$2x_n-2x_m=0,$$

所以$x_n=x_m$. 推理的错误发生在去括号那里（差运算不再满足结合律和分配律），下面我们将建立一些命题，概括了在什么情况下可以去括号和添加括号.

命题 3.2 任取$\mathcal{H}$中三个向量$x^{(1)}$、$x^{(2)}$、$x^{(3)}$，如果$x^{(2)}\prec x^{(3)}$，那么

$$\left\langle x^{(3)}-x^{(2)},\ x^{(1)}\right\rangle=\left\langle x^{(3)},\ x^{(1)}\right\rangle-\left\langle x^{(2)},\ x^{(1)}\right\rangle.$$

证明 设$x^{(1)}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots),x^{(2)}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots),x^{(3)}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_j,\cdots)$，那么

$$x^{(3)}-x^{(2)}=(\gamma_1-\beta_1,\gamma_2-\beta_2,\cdots,\gamma_j-\beta_j,\cdots),$$

因此

$$\left\langle x^{(3)}-x^{(2)},\ x^{(1)}\right\rangle=\sum_{j=1}^{+\infty}(\gamma_j-\beta_j)\alpha_j=\sum_{j=1}^{+\infty}\gamma_j\alpha_j-\sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j\alpha_j=\left\langle x^{(3)},\ x^{(1)}\right\rangle-\left\langle x^{(2)},\ x^{(1)}\right\rangle.$$

注释 3.2 当条件 $x^{(2)}\prec x^{(3)}$ 不成立时，此公式不成立.

命题 3.3 任取 $\mathcal{H}$ 中两个线性无关的向量 $x^{(1)}$、$x^{(2)}$，若 $\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)}\prec x^{(2)}$ 不成立，则

$$\left\langle x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle>0.$$

证明 设 $x^{(1)}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots)$，$x^{(2)}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots)$，由于 $\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)}\prec x^{(2)}$ 不成立，所以

$$\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j>0.$$

这是因为，如果 $\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle=0$，则 $\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)}\prec x^{(2)}$ 成立. 由于

$$x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)}=\left(\left|\beta_1-\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j\right)\alpha_1\right|,\left|\beta_2-\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j\right)\alpha_2\right|,\cdots\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\left\langle x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle&=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\left(\left|\beta_j-\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j\right)\alpha_j\right|\right)\\&\geq\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\left(\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j\right)\alpha_j-\beta_j\right)\\&=\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j\right)\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^2-\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j.\end{aligned}$$

显然 $\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^2=\left\|x^{(1)}\right\|^2>1$，否则 $\left\|x^{(1)}\right\|=1$，于是 $x^{(1)}=e_j$，这推出

$$\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle e_j\prec x^{(2)},$$

这与题设产生了矛盾. 所以

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j\right)\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^2-\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j>\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j-\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta=0.$$

命题 3.4 任取 $\mathcal{H}$ 中两个线性无关的向量 $x^{(1)}$、$x^{(2)}$，则

$$\left\langle x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle=0\Leftrightarrow\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle=0\text{ 或者 }\left\|x^{(1)}\right\|=1.$$

证明 由命题 3.3 可知$\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)}\prec x^{(2)}$，由命题 3.2 有

$$\left\langle x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle=\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle\left(1-\left\|x^{(1)}\right\|^{2}\right)=0. \tag{4.1}$$

从而推出

$$\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle=0 \quad \text{或者} \quad \left\|x^{(1)}\right\|=1.$$

另一方面，无论$\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle=0$还是$\left\|x^{(1)}\right\|=1$，都有

$$\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)}\prec x^{(2)},$$

从而(4.1)式成立.

命题 3.5 $\mathcal{H}$是 **Pre-Hilbert** 空间.

证明 任取$x_n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots)$，$x_m=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots)$，则

$$\begin{aligned}\left\|x_n-x_m\right\|^2+\left\|x_n+x_m\right\|^2&=\sum_{j=1}^{+\infty}(\alpha_j-\beta_j)^2+\sum_{j=1}^{+\infty}(\alpha_j+\beta_j)^2\\&=2\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^2+2\sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j^2\\&=2\left\|x_n\right\|^2+2\left\|x_m\right\|^2,\end{aligned}$$

故$\mathcal{H}$是 **Pre-Hilbert** 空间.

在$\mathcal{H}$中引进距离$d(x_n,x_m)=\left\|x_n-x_m\right\|$，这是范数诱导的距离．容易验证$(\mathcal{H},d(\cdot,\cdot))$为$\mathbb{N}$上的距离空间（满足与通常的距离空间一样的条件），简记为$\mathcal{H}$.

定理 3.6 $\mathcal{H}$是 Hilbert 空间.

证明 设$x^{(n)}=\left(\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},\cdots,\alpha_j^{(n)},\cdots\right)$是$\mathcal{H}$中的 Cauchy 列．于是取$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，那么存在一个自然数$N$，使得对任意$m,n>N$，都有

$$d\left(x^{(n)},x^{(m)}\right)=\left\|x^{(n)}-x^{(m)}\right\|=\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\alpha_j^{(n)}-\beta_j^{(m)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{1}{2}.$$

根据命题 2.2，$\mathcal{H}$中任何向量的范数或者等于 0 或者不小于 1，因此

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\alpha_j^{(n)}-\beta_j^{(m)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=0.$$

所以$\alpha_j^{(n)}=\beta_j^{(m)},j=1,2,\cdots$．所以$x^{(n)}=x^{(m)}$，这说明了

$$x^{(N+1)}=x^{(N+2)}=\cdots=x\in\mathcal{H},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x .$$

因此$\mathcal{H}$中的 Cauchy 列收敛，且收敛于$\mathcal{H}$中一点，所以$\mathcal{H}$是完备的赋范线性空间，即$\mathcal{H}$是 Hilbert 空间，这完成定理的证明.

注释 3.3 显然$\mathcal{H}$也是 Bananch 空间，由于这里的线性空间是定义在自然数集上，而一般的线性空间是定义在数域上，因此由此得到的 Hilbert 空间必然与一般的 Hilbert 空间不一样，具体地说，这里的 Hilbert 空间保持了一般的 Hilbert 空间的一部分性质或类似性质，同时也丢失了一部分性质.

定理 3.7(1) $\mathcal{S}=\{e_j : j\in\mathbb{Z}_+\}$是$\mathcal{H}$作为 Banach 空间的 Schauder 基.

（2）$\mathcal{S}=\{e_j : j\in\mathbb{Z}_+\}$是$\mathcal{H}$作为 Hilbert 空间的标准正交基.

证明（1）首先由命题 2.2 可知，$\mathcal{H}$中的任何一个向量x_n都可以唯一地表示为

$$x_n=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j e_j .$$

其次只需要证明右端的级数按照$\mathcal{H}$中的范数收敛即可，由于x_n的坐标$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots)$满足性质：存在正整数$j$使得当$k\geq j$时有$\alpha_k=0$．因此

$$\left\|x_n-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j\right\|=\left(\sum_{j=n+1}^{+\infty}\left|\alpha_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j e_j$.

（2）显然$\mathcal{S}=\{e_j : j\in\mathbb{Z}_+\}$是标准正交集，所以只需要证明对于任意的$x_n\in\mathcal{H}$都有

$$x_n=\sum_{j=1}^{\infty}\left\langle x_n,e_j\right\rangle e_j .$$

由定理 2.2 可知

$$x_n=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j e_j .$$

由于对任意的正整数k，e_k的坐标是第k个分量为 1 其余分量为 0，因此$\left\langle x_n,e_k\right\rangle=\alpha_k$，由于$k$的任意性，所以定理得证.

4. $\mathcal{H}$的几何学

设$\mathcal{H}$中的向量$x_n=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots\right)$，$x_m=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots\right)$，则$x_n$与$x_m$的夹角$\theta$的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\langle x_n,x_m\rangle}{\sqrt{\langle x_n,x_n\rangle}\cdot\sqrt{\langle x_m,x_m\rangle}}.$$

由于$\langle x_n,x_m\rangle=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j\geq 0$，所以$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$．当$\langle x_n,x_m\rangle=0$时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，这时称$x_n$与$x_m$垂直或正交.

现在考虑 Gram-Schmidt 正交化问题，在$\mathcal{H}$中并不是所有线性无关子集都能施行 Gram-Schmidt 正交化过程．下面的定理 4.2 说明了对怎样的线性无关子集才能施行 Gram-Schmidt 正交化过程.

定理4.1（一般内积空间的Gram-Schmidt正交化过程[2]）设H是内积空间，$\{x_n:n=1,2,\cdots\}$是H中的线性无关子集．则存在标准正交系$\{e_1,e_2,\cdots\}$，使得对每一个自然数n有：$\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$．正交化过程可表示为

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|},\quad e_2=\frac{x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1}{\|x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1\|},\quad\cdots,\quad e_{j+1}=\frac{x_{j+1}-\sum_{k=1}^{j}\langle x_{j+1},e_k\rangle e_k}{\left\|x_{j+1}-\sum_{k=1}^{j}\langle x_{j+1},e_k\rangle e_k\right\|},\quad\cdots$$

注释4.1 上式说明了x_1，$x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1$，…，$x_{j+1}-\sum_{k=1}^{j}\langle x_{j+1},e_k\rangle e_k$可以单位化.

定理4.2 $\mathcal{H}$的线性无关子集$\left\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)},\cdots\right\}$可以施行Gram-Schmidt正交化过程的充要条件是

$$x^{(1)}=\alpha_{j_1}^{(1)}e_{j_1},x^{(2)}=\alpha_{j_1}^{(2)}e_{j_1}+\alpha_{j_2}^{(2)}e_{j_2},\cdots,x^{(n)}=\alpha_{j_1}^{(n)}e_{j_1}+\alpha_{j_2}^{(n)}e_{j_2}+\cdots+\alpha_{j_n}^{(n)}e_{j_n},\cdots \quad (4.1)$$

其中$j_n\left(n=1,2,\cdots\right)$为互不相同的正整数，$\alpha_{j_k}^{(n)}(k=1,2,\cdots,n)$为正整数．并且（4.1）正交化的结果为$\{e_{j_n}:n\in\mathbb{Z}_+\}$．特别地，当$j_n=n$时，（4.1）正交化的结果为$\mathcal{S}=\{e_j:j\in\mathbb{Z}_+\}$.

证明 若$x^{(1)}$可以单位化，由命题 2.4，则存在正整数$\alpha_{j_1}^{(1)}$和j_1使得

$$x^{(1)}=\alpha_{j_1}^{(1)}e_{j_1}.$$

若$x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},e_{j_1}\right\rangle e_{j_1}$可以单位化，由命题 2.4，则存在正整数$\alpha_{j_2}^{(2)}$和$j_2\left(\neq j_1\right)$使得

$$x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},e_{j_1}\right\rangle e_{j_1}=\alpha_{j_2}^{(2)}e_{j_2}.$$

令$\alpha_{j_1}^{(2)}=\left\langle x^{(2)},e_{j_1}\right\rangle$，则

$$x^{(2)}=\alpha_{j_1}^{(2)}e_{j_1}+\alpha_{j_2}^{(2)}e_{j_2}.$$

一般地，若$x^{(n)}-\sum_{j=1}^{n-1}\left\langle x^{(n)},e_j\right\rangle e_j$可以单位化，由命题 2.4，则存在正整数$\alpha_{j_n}^{(n)}$和

$j_n\left(\neq j_{n-1}\neq\cdots\neq j_1\right)$使得

$$x^{(n)}-\sum_{j=1}^{n-1}\left\langle x^{(n)},e_j\right\rangle e_j=\alpha_{j_n}^{(n)}e_{j_n}.$$

令$\alpha_{j_1}^{(n)}=\left\langle x^{(n)},e_{j_1}\right\rangle,\alpha_{j_2}^{(n)}=\left\langle x^{(n)},e_{j_2}\right\rangle,\cdots,\alpha_{j_{n-1}}^{(n)}=\left\langle x^{(n)},e_{j_{n-1}}\right\rangle$，则

$$x^{(n)}=\alpha_{j_1}^{(n)}e_{j_1}+\alpha_{j_2}^{(n)}e_{j_2}+\cdots+\alpha_{j_n}^{(n)}e_{j_n}.$$

故必要性成立．充分性显然成立．

定理 4.3 （1）$\mathcal{S}=\left\{e_j:j\in\mathbb{Z}_+\right\}$是$\mathcal{H}$的唯一标准正交基；（1）$\mathcal{H}$的正交基具有如下的形式$\left\{\alpha_je_j:j\in\mathbb{Z}_+,\alpha_j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\}$.

证明 （1）由命题 2.4 可知，$\mathcal{H}$中的单位向量有且仅有$\{e_j:j\in\mathbb{Z}_+\}$．所以$\mathcal{H}$的标准正交基都是$\{e_j:j\in\mathbb{Z}_+\}$的子集．由定理 3.7 可知，$\mathcal{S}=\{e_j:j\in\mathbb{Z}_+\}$是$\mathcal{H}$的标准正交基．因此，$\mathcal{H}$的标准正交基不可能是$\{e_j:j\in\mathbb{Z}_+\}$的真子集．所以$\mathcal{S}=\{e_j:j\in\mathbb{Z}_+\}$是$\mathcal{H}$的唯一标准正交基.

（2）假设$\left\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)},\cdots\right\}$是$\mathcal{H}$的正交基，显然可以对正交基施行 Gram-Schmidt 正交化过程（得到标准正交基），由定理 4.2 可知

$$x^{(1)}=\alpha_{j_1}^{(1)}e_{j_1},x^{(2)}=\alpha_{j_1}^{(2)}e_{j_1}+\alpha_{j_2}^{(2)}e_{j_2},\cdots,x^{(n)}=\alpha_{j_1}^{(n)}e_{j_1}+\alpha_{j_2}^{(n)}e_{j_2}+\cdots+\alpha_{j_n}^{(n)}e_{j_n},\cdots \quad (4.2)$$

若存在一个n_0使得$j_{n_0}\neq n_0$，则（4.2）的正交化结果是$\{e_{j_n}:n\in\mathbb{Z}_+,j_{n_0}\neq n_0\}$．由（1）可知，$\{e_{j_n}:n\in\mathbb{Z}_+,j_{n_0}\neq n_0\}$不是标准正交基，从而对任意$n\in\mathbb{Z}_+$都有$j_n=n$．这时（4.2）变为

$$x^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e_1,x^{(2)}=\alpha_1^{(2)}e_1+\alpha_2^{(2)}e_2,\cdots,x^{(n)}=\alpha_1^{(n)}e_1+\alpha_2^{(n)}e_2+\cdots+\alpha_n^{(n)}e_n,\cdots \quad (4.3)$$

注意到正交性，我们有$\alpha_j^{(n)}>0$如果$j=n$，$\alpha_j^{(n)}=0$如果$j\neq n$．所以（4.3）变为

$$x^{(1)}=\alpha_1^{(1)}e_1,x^{(2)}=\alpha_2^{(2)}e_2,\cdots,x^{(n)}=\alpha_n^{(n)}e_n,\cdots$$

令$\alpha_j^{(j)}=\alpha_j$，则

$$\left\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)},\cdots\right\}=\left\{\alpha_je_j:j\in\mathbb{Z}_+,\alpha_j\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\right\},$$

这完成定理的证明.

注释 4.2 在一般的 Hilbert 空间里，若不要求正交后的向量是单位向量，亦可这样进行，设$y^{(1)}=x^{(1)}$，$y^{(1)}=x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},y^{(1)}\right\rangle y^{(1)}$，……，$y^{(n)}=x^{(n)}-\sum_{j=1}^{n-1}\left\langle x^{(n)},y^{(j)}\right\rangle y^{(j)}$，那么它

们正交. 但在 $\mathcal{H}$ 中, 这是做不到的. 事实上, 根据命题 3.4, 如果 $\left\langle x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)},x^{(1)}\right\rangle=0$, 那么 $\left\|x^{(1)}\right\|=1$. 这说明了若 $\left\|x^{(1)}\right\|>1$, 则找不到向量 $x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle x^{(1)}$ 与之正交. 另一方面, 由定理 4.2 可知, 虽然 $\left\|x^{(1)}\right\|>1$, 但如果 $x^{(1)}$ 可以单位化, 即 $x^{(1)}=\alpha_{j_1}^{(1)}e_{j_1}$, 则可找到向量 $x^{(2)}-\left\langle x^{(2)},e_{j_1}\right\rangle e_{j_1}$ 与之正交. 换句话说, 如果 $\left\|x^{(1)}\right\|>1$ 且不能单位化, 那么无法对线性无关向量 $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ 施行 Gram-Schmidt 正交化过程, 因此更谈不上对线性无关子集 $\left\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)},\cdots\right\}$ 施行 Gram-Schmidt 正交化过程了.

下面考虑一种更一般的正交化方法. 设 $\mathcal{H}$ 中的向量 $x_n=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots\right)$, $x_m=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots\right)$, 记

$$x_n\wedge x_m=\left(\min\{\alpha_1,\beta_1,1\},\min\{\alpha_2,\beta_2,1\},\cdots,\min\{\alpha_j,\beta_j,1\},\cdots\right).$$

显然 $x_n\wedge x_m\in\mathcal{H}$. 任意给 $\mathcal{H}$ 的线性无关子集 $\left\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)},\cdots\right\}$, 问是否能使其正交? 设 $x^{(n)}=(\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},\cdots,\alpha_j^{(n)},\cdots)$, 首先证明

$$x^{(1)}\perp\left(x^{(2)}-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j\right).$$

因为

$$\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle=\min\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\},$$

所以 $\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle$ 等于 0 或者等于 1. 从而

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j\prec x^{(2)}.$$

根据命题 3.2 有

$$\begin{aligned}
&\left\langle x^{(2)}-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j,x^{(1)}\right\rangle\\
&=\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle-\left\langle\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j,x^{(1)}\right\rangle\\
&=\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j,x^{(1)}\right\rangle\\
&=\left\langle x^{(2)},x^{(1)}\right\rangle-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle\left\langle e_j,x^{(1)}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^{(2)}\alpha_j^{(1)}-\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^{(2)}\min\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\}\alpha_j^{(1)}.$$

当$\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)}$中有一个为 0 时，则$\min\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\}=0$，从而

$$\alpha_j^{(2)}\alpha_j^{(1)}=\alpha_j^{(2)}\min\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\}\alpha_j^{(1)}=0.$$

当$\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)}$中都不为 0 时，则$\min\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\}=1$，从而

$$\alpha_j^{(2)}\alpha_j^{(1)}=\alpha_j^{(2)}\min\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\}\alpha_j^{(1)}.$$

即无论什么情况都有

$$\alpha_j^{(2)}\alpha_j^{(1)}=\alpha_j^{(2)}\min\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\}\alpha_j^{(1)},$$

从而

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^{(2)}\alpha_j^{(1)}-\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j^{(2)}\min\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\}\alpha_j^{(1)}=0.$$

所以

$$x^{(1)}\perp\left(x^{(2)}-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j\right).$$

其次证明

$$x^{(1)}\perp\left(x^{(3)}+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j\right).$$

不难证明

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j\prec x^{(3)}+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j.$$

根据命题 3.2 有

$$\left\langle x^{(3)}+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j,\quad x^{(1)}\right\rangle$$

$$=\left\langle x^{(3)}+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j,\quad x^{(1)}\right\rangle-\left\langle\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j,\quad x^{(1)}\right\rangle$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^{(3)}\alpha_j^{(1)}\left(1+\min\left\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(2)},1\right\}\right).$$

当$\alpha_j^{(3)}=0$或$\alpha_j^{(1)}=0$时，

$$\alpha_j^{(3)}\alpha_j^{(1)}\left(1+\min\left\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(2)},1\right\}\right)=0.$$

所以不妨设$\alpha_j^{(3)}$，$\alpha_j^{(1)}$都不等于 0，即$\alpha_j^{(3)}\geq 1$，$\alpha_j^{(1)}\geq 1$，这时

$$\begin{aligned}&1+\min\left\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(2)},1\right\}\\&\qquad=1+\min\left\{\alpha_j^{(2)},1\right\}-1-\min\left\{\alpha_j^{(2)},1\right\}=0.\end{aligned}$$

所以无论什么情况都有

$$\alpha_j^{(3)}\alpha_j^{(1)}\left(1+\min\left\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(2)},1\right\}\right)=0.$$

因此

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^{(3)}\alpha_j^{(1)}\left(1+\min\left\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(2)},1\right\}\right).$$

这就证明了

$$x^{(1)}\perp\left(x^{(3)}+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j\right).$$

最后证明

$$\begin{aligned}\left(x^{(2)}-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j\right)\perp\Bigg(&x^{(3)}+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j\\&-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j\Bigg)\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}&\left\langle x^{(3)}+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j,\ x^{(2)}-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j\right\rangle\\&=\left\langle x^{(3)},x^{(2)}\right\rangle+\left\langle\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j,\ x^{(2)}\right\rangle-\left\langle\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j,\ x^{(2)}\right\rangle\\&-\left\langle x^{(3)},\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j\right\rangle-\left\langle\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j,\ \sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j\right\rangle\end{aligned}$$

$$+\left\langle \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j,\quad \sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j\right\rangle$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^{(3)}\alpha_j^{(2)}\Big(1-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(2)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\right\}^2$$

$$+\min\left\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\right\}\cdot\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(1)},1\right\}+\min\left\{\alpha_j^{(2)},\alpha_j^{(1)},1\right\}\cdot\min\left\{\alpha_j^{(3)},\alpha_j^{(2)},1\right\}\Big).$$

如上面讨论一样，不妨设$\alpha_j^{(3)}$，$\alpha_j^{(2)}$都不等于 0，即$\alpha_j^{(3)}\ge 1$，$\alpha_j^{(2)}\ge 1$，这时上式变为

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^{(3)}\alpha_j^{(2)}\Big(1-1-\min\left\{\alpha_j^{(1)},1\right\}-\min\left\{\alpha_j^{(1)},1\right\}^2+\min\left\{\alpha_j^{(1)},1\right\}\cdot\min\left\{\alpha_j^{(1)},1\right\}+\min\left\{\alpha_j^{(1)},1\right\}\cdot 1\Big)=0.$$

这就完成了证明.

综合上述的讨论可知道

$$x^{(1)};$$

$$x^{(2)}-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j;$$

$$x^{(3)}+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j$$

两两垂直．一般地，按此方法就得到线性无关子集$\left\{x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(n)},\cdots\right\}$的正交集如下：

$$x^{(1)};$$

$$x^{(2)}-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(2)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j;$$

$$x^{(3)}-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j$$

（在这里把$x^{(3)}+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j$记为$x^{(3)}-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(3)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j$，目的是为了方便记忆，其结构与容斥原理相同，但事实上，下面式子出现的正项都应该统一放在前面，负项统一放在后面，否则式子将没有意义）；

$$x^{(4)}-\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(4)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(4)}\wedge x^{(k)},e_j\right\rangle e_j$$

$$+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(4)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(4)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(2)},e_j\right\rangle e_j+\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(4)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j$$

$$-\sum_{j=1}^{+\infty}\left\langle x^{(4)},e_j\right\rangle\left\langle x^{(3)}\wedge x^{(2)}\wedge x^{(1)},e_j\right\rangle e_j;\ \ \ldots\ldots$$

5. 在数论中的应用

5.1 互质

定理 5.1 $\langle x_n, x_m \rangle = 0 \Leftrightarrow \gcd(n,m) = 1$，即 n， m 互质.

证明 显然 $\mathcal{H}$ 中任何两个非零向量 x_n， x_m 都可以表示为

$$x_n = \alpha_{j_1}^{(1)} e_{j_1} + \alpha_{j_2}^{(1)} e_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_p}^{(1)} e_{j_p}, \quad x_m = \alpha_{i_1}^{(2)} e_{i_1} + \alpha_{i_2}^{(2)} e_{i_2} + \cdots + \alpha_{i_q}^{(2)} e_{i_q}$$

其中 $\alpha_{j_k}^{(1)} \geq 1 \left(k = 1, 2, \cdots, p\right)$， $\alpha_{i_k}^{(2)} \geq 1 \left(k = 1, 2, \cdots, q\right)$. 这是因为当 j 很大时 $\mathcal{H}$ 中向量的坐标的第 j 个分量之后全为零. 如果 $\langle x_n, x_m \rangle = 0$，那么

$$\left\langle \sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_k}^{(1)} e_{j_k}, \sum_{t=1}^{q} \alpha_{i_t}^{(2)} e_{i_t} \right\rangle = \sum_{k=1}^{p} \sum_{t=1}^{q} \alpha_{j_k}^{(1)} \alpha_{i_t}^{(2)} \left\langle e_{j_k}, e_{i_t} \right\rangle = 0 .$$

因为

$$\alpha_{j_k}^{(1)} \alpha_{i_t}^{(2)} \geq 1, \ \left\langle e_{j_k}, e_{i_t} \right\rangle \geq 0 .$$

从而

$$\left\langle e_{j_k}, e_{i_t} \right\rangle = 0, k = 1, 2, \cdots, p; t = 1, 2, \cdots, q .$$

这等价于

$$\left\{ j_1, j_2, \cdots, j_p \right\} \cap \left\{ i_1, i_2, \cdots, i_q \right\} = \varnothing .$$

上式意味着，自然数 n、m 不可能含有相同的素因子，从而 n、m 互质. 另一方面，若 n、m 互质，即 n、m 不可能含有相同的素因子. 这说明了

$$\left\{ j_1, j_2, \cdots, j_p \right\} \cap \left\{ i_1, i_2, \cdots, i_q \right\} = \varnothing .$$

根据上面的证明过程便可推出 $\langle x_n, x_m \rangle = 0$.

命题 5.2 设 $x_n, x_m, x_k \in \mathcal{H}$， $\langle x_n, x_m \rangle = 0$，若 $x_n \prec x_m + x_k$， 则 $x_n \prec x_k$.

证明 设 $x_n = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j, \cdots), x_m = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_j, \cdots), x_k = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_j, \cdots)$. 若

$$x_n \prec x_m + x_k ,$$

则

$$\alpha_j \leq \beta_j + \gamma_j, j = 1, 2, \cdots .$$

若 $\alpha_j = 0$，显然有 $\alpha_j - \gamma_j \leq 0$，因此不妨设 $\alpha_j > 0$，则

$$(\alpha_j - \gamma_j)\alpha_j \leq \alpha_j \beta_j, j = 1, 2, \cdots$$

对上式求和

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(\alpha_j-\gamma_j)\alpha_j \le \sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j\beta_j = \langle x_n, x_m \rangle = 0 .$$

所以$\alpha_j-\gamma_j \le 0\left(j=1,2,\cdots\right)$．这说明了$x_n \prec x_k$．

注释 5.1 利用命题 5.2 和定理 5.1 就证明了数论中的结论：设$\gcd(n,m)=1$，若$n\,|\,m\cdot k$，则$n\,|\,k$．

命题 5.3 设$x_m, x_k \in \mathcal{H}$，若$e_n \prec x_m + x_k$，则$e_n \prec x_m$或者$e_n \prec x_k$．

证明 设$x_m=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots)$，$x_k=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_j,\cdots)$．若

$$e_n \prec x_m + x_k ,$$

则

$$1 \le \beta_n + \gamma_n .$$

所以β_n、γ_n不能同时为零，从而

$$1 \le \beta_n \text{或者} 1 \le \gamma_n$$

即

$$e_n \prec x_m \text{或者} e_n \prec x_k .$$

注释 5.2 利用命题 5.3 和定理 5.1 就证明了数论中的结论：设p为素数，且$p\,|\,m\cdot k$，则$p\,|\,m$或者$p\,|\,k$．

5.2 证明两类数是无理数

第一类型数是$\sqrt[m]{P}$．证明这类数是无理数的最常用方法莫过于考虑多项式x^m-P，然后利用 Eisenstein 定理判别上述多项式是否可约即可．下面给出一种新方法．证明$\sqrt[3]{6}$是无理数．假设$\sqrt[3]{6}$是有理数，那么存在正整数p，q使得

$$\sqrt[3]{6}=\frac{p}{q},$$

两边取自然对数有

$$e_1+e_2=3x_p-3x_q ,$$

设

$$x_p=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots)，\quad x_q=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j,\cdots) ,$$

则

$$(1,1,0,\cdots,0,\cdots)=(3\,|\,\alpha_1-\beta_1\,|,3\,|\,\alpha_2-\beta_2\,|,3\,|\,\alpha_3-\beta_3\,|,\cdots,3\,|\,\alpha_j-\beta_j\,|,\cdots) .$$

由于唯一性可知

$$3\,|\,\alpha_1-\beta_1\,|=1 ,$$

即

$$3\alpha_1 - 3\beta_1 = 1 \text{ 或者 } 3\beta_1 - 3\alpha_1 = 1,$$

因为 $(3,3) = 3$ 不可能整除 1，从而上面两个不定方程不可能有整数解，从而推出矛盾.

第二类型数是 $\log_a b$．要证明 $\lg 2$ 是无理数，必须用到一些精细的分析技巧．另外证明 $\lg 2$ 是无理数的方法不适用于证明 $\lg 3$ 是无理数．下面将看到，可以用统一模式处理这类问题．作为例子，首先证明 $\lg 2$ 是无理数．假设 $\lg 2$ 是有理数，那么存在正整数 p，q 使得

$$\lg 2 = \frac{p}{q},$$

因此

$$\frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{\ln 2}{\ln 2 + \ln 5} = \frac{p}{q},$$

即

$$q \ln 2 = p \ln 2 + p \ln 5,$$

即

$$qe_1 = pe_1 + pe_3.$$

因此

$$q = \langle qe_1, e_1 \rangle = \langle pe_1 + pe_3, e_1 \rangle = \langle pe_1, e_1 \rangle + \langle pe_3, e_1 \rangle = p,$$

$$0 = \langle qe_1, e_3 \rangle = \langle pe_1 + pe_3, e_3 \rangle = \langle pe_1, e_3 \rangle + \langle pe_3, e_3 \rangle = p,$$

这推出 $q = p = 0$，这与 p，q 为正整数矛盾.

最后举另外一个例子，说明这种方法的普遍性．证明 $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{3}$ 是无理数．假设 $\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{3}$ 是有理数，那么存在正整数 p，q 使得

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{3} = \frac{\ln 3/3}{\ln 2/2} = \frac{p}{q},$$

即

$$2q \ln 3 = 3p \ln 2,$$

即

$$2qe_2 = 3pe_1.$$

因此

$$2q = \langle 2qe_2, e_2 \rangle = \langle 3pe_1, e_2 \rangle = 3p \langle e_1, e_2 \rangle = 0,$$

$$3p = \langle 3pe_1, e_1 \rangle = \langle 2qe_2, e_1 \rangle = 2q \langle e_2, e_1 \rangle = 0,$$

这推出 $q=p=0$，这与 p，q 为正整数矛盾.

注释 5.3 利用本文的结论却不能证明 e_j 是无理数.

5.3 正整数的几何

定义两个正整数 m,n 所夹的角度等于 $\mathcal{H}$ 中向量 x_m,x_n 所夹的角度，即

$$\theta(m,n)=\theta(x_m,x_n).$$

因此利用公式

$$\cos(\theta(x_m,x_n))=\frac{\langle x_m,x_n\rangle}{\|x_m\|\cdot\|x_n\|}$$

可求出 $\theta(m,n)$. 因为 $\langle x_m,x_n\rangle\geq 0$，所以

$$\theta(m,n)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

当 m,n 互质时，由定理 5.1 知，$\langle x_m,x_n\rangle=0$，从而 $\theta(m,n)=90^0$，即 m 与 n 垂直；当 m,n 相等时，$\cos(\theta(x_m,x_n))=1$，从而 $\theta(m,n)=0^0$. 现在给出正整数的一种几何解释. 当 m,n 互质时，它们的夹角为 90^0，就是说它们线性无关（Hilbert 空间里的正交系都是线性无关的），当 m,n 相等时，它们的夹角为 0^0，就是说它们相关程度最大. 两个正整数的夹角大小反映了它们的相关程度，夹角越大，相关程度越小，当夹角为 90^0 时，相关程度等于零，即线性无关.

现在看一个 60^0-集的例子，显然 $x_6=(1,1,0,0,\cdots)$，$x_{15}=(0,1,1,0,\cdots)$，$\langle x_6,x_{15}\rangle=1$，$\|x_6\|=\sqrt{2}$，$\|x_{15}\|=\sqrt{2}$，从而

$$\cos(\theta(6,15))=\cos(\theta(x_6,x_{15}))=\frac{\langle x_6,x_{15}\rangle}{\|x_6\|\cdot\|x_{15}\|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

这说明了 $\theta(6,15)=60^0$. 注意到 $x_{10}=(1,0,1,0,\cdots)$，通过计算可知

$$\theta(6,10)=60^0,\quad \theta(10,15)=60^0.$$

这说明了集合 $\{6,10,15\}$ 是 60^0-集（元素互为 60^0）. 现在问题是，能否在集合 $\{6,10,15\}$ 中再添加一个正整数 n 使得集合 $\{6,10,15,n\}$ 仍然是 60^0-集？设 $x_n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots)$，则上述问题等价于下面的不定方程组

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\sqrt{2}\cdot\|x_n\|}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\alpha_1+\alpha_3}{\sqrt{2}\cdot\|x_n\|}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\sqrt{2}\cdot\|x_n\|}=\frac{1}{2}.$$

是否有非负整数解

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j,\cdots.$$

这类问题很难解决，但有一种情形是简单的，考虑所有素数构成的集合$\{2,3,5,\cdots\}$，由定理4.3 可知，$\{2,3,5,\cdots\}$中的元素两两垂直且不能再添加一个正整数n使得集合$\{n,2,3,5,\cdots\}$中的元素还两两垂直，即$\{2,3,5,\cdots\}$是一个极大的90^0-集.

定义 5.1 若正整数集的子集S的元素互为θ度且不能保持角度，则称S是θ^0−极大集.

注释 5.1 不能保持角度的意思是，对任意正整数n，集合$S\bigcup\{n\}$不是 θ^0-集. $\{6,10\}$是60^0-集，但不是60^0-极大集. $\{2,3,5,\cdots\}$是90^0-极大集.

首先要说明的是θ^0-极大集的存在性.

定理 5.2 若S是非空θ^0-集，则存在一个包含S的θ^0-极大集.

证明 考虑集合族

$$\mathcal{A}=\{B:S\subseteq B, B是\theta^0-集\}.$$

显然$\mathcal{A}$不是空集，既然$S\in\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$按包含关系$\subseteq$构成一个偏序集$(\mathcal{A},\subseteq)$，下面证明$(\mathcal{A},\subseteq)$的每条链（根据良序定理，链总是存在的）都有一个上界. 事实上，不妨设$T=\{A_\alpha:\alpha\in I\}$是任一条链. 下面证明并集$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$是$T$的上界，显然有

$$A_\alpha\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha,\quad\forall\alpha\in I.$$

另一方面，任取两个不同元素

$$x,\ y\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha,$$

若x，$y\in A_\alpha$，则x，y的夹角是θ度. 若$x\in A_\alpha$，$y\in A_\beta\ (\alpha\neq\beta)$，由于$T$是链，所以$T$中的元素可比较大小（包含关系），因此不妨设$A_\alpha\subseteq A_\beta$，这推出$x$，$y$的夹角也是$\theta$度. 因此$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$是$\theta^0-$集. 显然$S\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，所以

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\in\mathcal{A}.$$

这证明了$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$是$T$的上界. 根据 Zorn 引理[3]，$\mathcal{A}$有一个极大元素，这个极大元素就是包含$S$的$\theta^0$-极大集.

定理 5.2 不能说明，对任意θ，θ-极大集都是存在的，这是因为θ-集可能不存在．这与通常的内积空间不一样．如$\mathbb{R}^n$空间的θ-集总是存在的，从而总存在θ-极大集．通俗地说，$\mathbb{R}^n$空间存在足够多的向量，作为集合的基是连续基数，而$\mathbb{N}$上的 Hilbert 空间$\mathcal{H}=\{\ln j : j\in\mathbb{Z}_+\}$却缺乏向量，作为集合的基是阿列夫零．

Goldbach[4]证明了费马数$F_n=2^{2^n}+1(n\geq 0)$彼此互素．这说明集合$\{F_n\}$中的元素互相垂直，但它是不是一个90^0-极大集呢？这也是一个没解决的问题．容易证明90^0-极大集是无限集，另一方面容易得到0^0-极大集只能是一个单点集$\{n\}$．现在问，当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\theta$-极大集是否是有限集？这些问题既有趣又有难度，总结如下：

问题 1 对任意$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，是否总存在$\theta$-极大集？根据定理 5.2，这个问题等价于，是否总存在θ-集？

问题 2 集合$\{6,10,15\}$是否是60^0-极大集？如果不是，其极大集是什么？

问题 3 集合$\{F_n\}$是否是90^0-极大集？如果不是，其极大集是什么？

问题 4 当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\theta$-极大集是否是有限集？

问题 5 当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，给定一个$\theta$-集$A$，包含$A$的$\theta$-极大集是否唯一？如何构造包含$A$的$\theta$-极大集？

值得注意的是，很多数学家对无限90^0-集感兴趣，这是因为存在一个无限90^0-集就意味着素数有无限个，即证明素数有无限个相当于找一个无限90^0-集．例如，$\{F_n\}$就是一个无限90^0-集，关于无限90^0-集方面的文献可参考[4],[5]，[6],[7]和[8]．

寻找正整数的90^0-集相当于寻找 Hilbert 空间$\mathcal{H}$的正交系，寻找正整数的90^0-极大集相当于寻找 Hilbert 空间$\mathcal{H}$的极大正交系（极大正交系不一定是正交基）．因此$\{x_{F_n}\}$是 Hilbert 空间$\mathcal{H}$的正交系，但还不清楚是不是极大正交系．寻找 Hilbert 空间的极大正交系是泛函分析中的核心内容，见[9]．

参考文献

[1] Ben Green and Terence Tao, The prime numbers contain infinitely many arithmetic Progressions, http://arxiv.org/abs/math/0404188v5．

[2] John B.Conway, A Course in Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[3] Weisstein and Eric W. "Zorn's Lemma." From *Mathworld*—A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ZornsLemma.html.

[4] P.里本伯姆，博大精深的素数（孙淑玲，冯克勤译），科学出版社，北京，2007.

[5] G．Pólya and G．Szegö ,Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis,2 vols. Springer-Verlag, Berlin, 1924 (4th edition,1970).

[6] A．Hurwitz, Übungen zur Zahlentheorie,1891-1918 (edited by H.Funk and B.Glaus). E.T.H., Zürich, 1993.

[7] A.W.F.Edwards, Infinite coprime sequences. *Math.Gazette.* 48 (1964), 416-422.

[8] R.Bellman, A note on relatively prime sequences. *Bull.Amer.Math.Soc.*53 (1947), 778-779.

[9] P.E.T.Jorgensen, K.Kornelson and K.Shuman, Orthogonal exponentials for bernoulli iterated function systems, http://arxiv.org/abs/math.OA/0703385v1.

The Hilbert space over $\mathbb{N}$ constructed by the natural logarithms of all intergers

Li Hanju
School of Mathematical Sciences，South China Normal University，Guangzhou （510631）

Abstract
We in this paper introduce the concept of linear space over the natural nunber $\mathbb{N}$ and investigage the geometry of Hilbert space over $\mathbb{N}$ constructed by the natural logarithms of all intergers. At the end of paper, we apply this space theory to number theory and give some open questions.
Keywords：orthonormal basis，Gram-Schmidt orthogonalization，prime，Hilbert space