关于孪生素数对的数目

李汉巨
华南师范大学数学科学学院，广州，510631
E-mail: hanjuli@yahoo.com.cn

摘　要：本文给出了不大于给定实数 x 的孪生素数对的数目 $\pi_2(x)$ 的具体公式.

关键词：素数，孪生素数，孪生素数猜想

中图分类号：0156.1

1 引言

如果 p， $p+2$ 同时为素数，则称 $(p,p+2)$ 为孪生素数对．著名的孪生素数猜想宣称存在无穷个素数 p 使得 $(p,p+2)$ 是孪生素数对．陈景润在这方面得到最好的结果[2]，他证明了存在无穷个素数 p 使得 $p+2$ 最多含有两个素因子．用 $\pi_2(x)$ 表示不大于 x 的孪生素数对的数目，即

$$\pi_2(x):=\#\{p\le x:(p,p+2)\text{为孪生素数对}\}.$$

为了证明孪生素数猜想，人们需要寻找 $\pi_2(x)$ 的近似公式．Hardy 和 Littlewood[1]曾猜想

$$\pi_2(x)\sim 2\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{(\ln x)^2}.$$

如果这个猜想成立，则孪生素数猜想成立．本文则给出一条计算 $\pi_2(x)$ 的具体公式，即下面的定理.

定理 1.1 若 $x\ge 2$，则 $\pi_2(x)=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left\{\sum_{1<n\le x}e^{2\pi iP(n)x_1+2\pi iP(n+2)x_2}\right\}dx_1dx_2$，或者

$$\pi_2(x)=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left\{\sum_{1<n\le x}\cos\left(2\pi P(n)x_1+2\pi P(n+2)x_2\right)\right\}dx_1dx_2.$$

其中 $P(n)$ 是一个数论函数，定义为

$$P(n):=4\sum_{i=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{j+ij}{n}\right\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1\right)(n-1).$$

利用定理 1.1，如果能找到 $\pi_2(x)$ 的下界估计 $f(x)$ 满足当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$，则孪生素数猜想成立． $\pi_2(x)$ 的下界估计与数论函数 $P(n)$ 有关．需要指出来的是，数论函数 $P(n)$ 与素数的分布有关，即 n 是 1 或素数的充分必要条件是 $P(n)=0$（引理 2.3）．关于数论函数 $P(n)$ 的部分和 $\sum_{n\le x}P(n)$，我们有下面的估计.

定理 1.2 若 $x\ge 2$，则

$$\frac{4}{3}\left(1-\frac{6}{\pi^2}\right)x^{\frac{3}{2}}+O(x)\le\sum_{n\le x}P(n)\le\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+O(x).$$

关于 $\pi_2(x)$ 的下界估计，难点在于三角和 $\sum_{1<n\le x}e^{2\pi iP(n)x_1+2\pi iP(n+2)x_2}$ 的估计，目前还没发现能有效估计这种类型三角和的基本工具.

2 一些引理

引理 2.1 若 n,m 是正整数，则

$$\gcd(n,m)=2\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{m}{n}j\right\rfloor+n-nm+m\,. \tag{2.1}$$

这个公式首先出现在[5]中，文[4]给出了一种几何方法的证明．在附录 A 里我们给出公式（2.1）的详细证明，其证明思想来源于[4].

引理 2.2 若 n,m 是正整数，则

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{m}{n}j\right\rfloor=\sum_{j=0}^{m-1}\left\lfloor\frac{n}{m}j\right\rfloor.$$

证明 注意到 $\gcd(n,m)=\gcd(m,n)$，应用引理 2.1 可得到引理．□

注解 引理 2.2 的作用类似于 Fubini 定理（交换积分次序），用于交换 n,m 在求和中的角色．

引理 2.3 若 n 是大于 1 的整数，定义

$$P(n):=4\sum_{i=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{j+ij}{n}\right\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1\right)(n-1),$$

则 n 是素数的充分必要条件是 $P(n)=0$.

证明 做变量代换 $x=i+1$，并结合引理 2.1 和引理 2.2，则有

$$\begin{aligned}
P(n)&=4\sum_{x\le\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x}{n}j\right\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1\right)(n-1)\\
&=4\sum_{x\le\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{x-1}\left\lfloor\frac{n}{x}j\right\rfloor+(1-n)\lfloor\sqrt{n}\rfloor\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1\right)+2(n-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor\\
&=2\left\{2\sum_{x\le\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{x-1}\left\lfloor\frac{n}{x}j\right\rfloor+\sum_{x\le\sqrt{n}}(1-n)x+\sum_{x\le\sqrt{n}}(n-1)\right\}\\
&=2\sum_{x\le\sqrt{n}}\left(2\sum_{j=0}^{x-1}\left\lfloor\frac{n}{x}j\right\rfloor+x-xn+n-1\right)\\
&=2\sum_{x\le\sqrt{n}}\left\{\gcd(x,n)-1\right\}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

若 n 是素数，则对任意 $x\le\sqrt{n}$ 都有 $\gcd(x,n)=1$，由此可得

$$P(n)=2\sum_{x\le\sqrt{n}}\left\{\gcd(x,n)-1\right\}=0\,.$$

若 n 不是素数，即 n 是大于 1 的合数，因此 n 有一个素因子 p 满足 $2\le p\le\sqrt{n}$，于是 $\gcd(p,n)-1=p-1\ge1$．另外，对任意 $x\le\sqrt{n}$ 都有 $\gcd(x,n)-1\ge0$，因此

$$P(n)=2\sum_{x\le\sqrt{n}}\left\{\gcd(x,n)-1\right\}\ge2\,,$$

即 $P(n)\ne0$，这就推出引理．□

注解．如果$n\ge 2$，显然有

$$P(n)=4\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sum_{j=1}^{n-1}\left\lfloor\frac{ij}{n}\right\rfloor-\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor\left(\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor-1\right)(n-1).$$

因此引理 2.3 推出，如果 p 是素数，那么

$$\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{p}\rfloor}\sum_{j=1}^{p-1}\left\lfloor\frac{ij}{p}\right\rfloor=\frac{\left\lfloor\sqrt{p}\right\rfloor\left(\left\lfloor\sqrt{p}\right\rfloor-1\right)(p-1)}{4}.$$

引理 2.4 如果n是 1 或素数，则

$$\int_0^1 e^{2\pi iP(n)x}dx=1;$$

如果n是合数，则

$$\int_0^1 e^{2\pi iP(n)x}dx=0.$$

证明 一方面，如果α等于零，则

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha x}dx=1;$$

如果α是非零整数，则

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha x}dx=0.$$

另一方面，由（2.2）式可知，$P(n)$取值于非负整数和$P(1)=0$．因此，由引理 2.3 可知，如果n是 1 或素数，则$P(n)$等于 0；如果n是合数，则$P(n)$不等于 0．综合起来就得到引理．□

引理 2.5([3]) 若$x\ge 1$，$\alpha\ge 0$，则$\sum_{n\le x}n^{\alpha}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+O\left(x^{\alpha}\right)$.

引理 2.6([3]) 若$\varphi(x,n)$表示不大于x的与n互质的正整数的数目，则

$$\varphi(x,n)=\sum_{d|n}\mu(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor,$$

其中$\mu(d)$表示Möbius 函数.

引理 2.7([3]) 若$x\ge 2$，$\alpha\le 1$，则$\sum_{n\le x}\frac{\varphi(n)}{n^{\alpha}}=\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\frac{1}{\zeta(2)}+O\left(x^{1-\alpha}\log x\right)$，其中$\varphi(n)$表示欧拉函数，$\zeta(s)$表示黎曼 zeta 函数.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 因为$\left|e^{2\pi iP(n)x_1+2\pi iP(n+2)x_2}\right|\le 1$，所以

$$e^{2\pi iP(n)x_1+2\pi iP(n+2)x_2}\in L^2\left([0,1]\times[0,1]\right).$$

则应用Fubini 定理有

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left\{\sum_{1<n\le x}e^{2\pi iP(n)x_1+2\pi iP(n+2)x_2}\right\}dx_1dx_2=\sum_{1<n\le x}\iint_{[0,1]\times[0,1]}e^{2\pi iP(n)x_1+2\pi iP(n+2)x_2}dx_1dx_2$$

$$=\sum_{1<n\le x}\int_0^1 e^{2\pi iP(n)x_1}dx_1\cdot\int_0^1 e^{2\pi iP(n+2)x_2}dx_2.$$

由引理 2.4 可知，当n， $n+2$ 同时为素数时，即当$(n,n+2)$为孪生素数对时，

$$\int_0^1 e^{2\pi iP(n)x_1}dx_1\cdot\int_0^1 e^{2\pi iP(n+2)x_2}dx_2=1；$$

否则

$$\int_0^1 e^{2\pi iP(n)x_1}dx_1\cdot\int_0^1 e^{2\pi iP(n+2)x_2}dx_2=0.$$

因此

$$\begin{aligned}\pi_2(x)&=\sum_{\substack{1<n\le x\\(n,n+2)\text{为孪生素数对}}}1\\&=\sum_{1<n\le x}\int_0^1 e^{2\pi iP(n)x_1}dx_1\cdot\int_0^1 e^{2\pi iP(n+2)x_2}dx_2.\end{aligned}$$

这推出

$$\pi_2(x)=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left\{\sum\nolimits_{1<n\le x}e^{2\pi iP(n)x_1+2\pi iP(n+2)x_2}\right\}dx_1dx_2 .$$

进一步，利用等式$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$和积分性质展开，有

$$\begin{aligned}\pi_2(x)&=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left\{\sum\nolimits_{1<n\le x}\cos\left(2\pi P(n)x_1+2\pi P(n+2)x_2\right)\right\}dx_1dx_2\\&\quad+i\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left\{\sum\nolimits_{1<n\le x}\sin\left(2\pi P(n)x_1+2\pi P(n+2)x_2\right)\right\}dx_1dx_2\\&=\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left\{\sum\nolimits_{1<n\le x}\cos\left(2\pi P(n)x_1+2\pi P(n+2)x_2\right)\right\}dx_1dx_2.\end{aligned}$$

最后一个等式之所以成立，是因为$\pi_2(x)$是实数．所以定理得证． □

定理 1.2 的证明 显然$\gcd(y,n)\le y$，结合（2.2）式有

$$\begin{aligned}P(n)&=2\sum_{1\le y\le\sqrt{n}}\left\{\gcd(y,n)-1\right\}\\&\le 2\sum_{1\le y\le\sqrt{n}}(y-1)=2\sum_{1\le y\le\sqrt{n}}y-2\sum_{1\le y\le\sqrt{n}}1\\&\le\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+1\right)-2\left(\sqrt{n}-1\right)\\&=n-\sqrt{n}+2\end{aligned}.$$

应用引理 2.5 得

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}P(n)&\le\sum_{n\le x}\left(n-\sqrt{n}+2\right)=\sum_{n\le x}n-\sum_{n\le x}\sqrt{n}+2\sum_{n\le x}1\\&=\frac{x^2}{2}+O(x)-\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-O\left(\sqrt{x}\right)+2x+2O(1)\\&=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+O(x).\end{aligned}$$

另一方面，当y,n互质时，$\gcd(y,n)-1=0$，否则$\gcd(y,n)-1\ge 1$．结合引理 2.6 和熟知事实$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$，我们得到

$$2\sum_{1\le y\le\sqrt{n}}\left\{\gcd(y,n)-1\right\}\ge 2\left(\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor-\varphi\left(\sqrt{n},n\right)\right)=2\left(\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor-\sum_{d|n}\mu(d)\left\lfloor\frac{\sqrt{n}}{d}\right\rfloor\right)$$

$$\geq 2\left(\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor-\sum_{d|n}\mu(d)\frac{\sqrt{n}}{d}\right)=2\left(\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor-\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=2\left(\sqrt{n}+O(1)-\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}\right),$$

因此，根据引理 2.5 和引理 2.7，我们得到

$$\sum_{n\leq x}P(n)\geq 2\left(\sum_{n\leq x}\sqrt{n}+\sum_{n\leq x}O(1)-\sum_{n\leq x}\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=2\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+O(x^{\frac{1}{2}})+O(x)-\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\frac{1}{\zeta(2)}-O\left(x^{\frac{1}{2}}\log x\right)\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left(1-\frac{6}{\pi^2}\right)x^{\frac{3}{2}}+O(x),$$

其中利用到事实 $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$. □

附录 A

引理 2.1 的证明 构造一个三角形区域

$$\mathcal{S}_{n,m}:=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2:\frac{x}{n}+\frac{y}{m}\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, n>0, m>0\right\},$$

其中 $\mathbb{Z}$ 表示整数集．用 $\mathrm{card}(\mathcal{S}_{n,m})$ 表示集合 $\mathcal{S}_{n,m}$ 的元素个数．我们有两种方式计算 $\mathcal{S}_{n,m}$ 的元素个数，第一种方式是逐个记数 $\mathcal{S}_{n,m}$（$n,m\in\mathbb{R}$）中的点，见命题 1；第二种方式是借助某种对称性记数 $\mathcal{S}_{n,m}$（$n,m\in\mathbb{Z}$）中的点，见命题 2．由于两种方式记数同一个对象的数目是一样多的，所以当 n,m 为正整数时，应用命题 1 和命题 2 得

$$\sum_{j=0}^{\lfloor n\rfloor}\left\lfloor\frac{nm-mj}{n}\right\rfloor+\lfloor n\rfloor+1=\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor m-\frac{m}{n}j\right\rfloor+n+1=\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{m}{n}(n-j)\right\rfloor+n+1$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left\lfloor\frac{m}{n}j\right\rfloor+n+1=\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{m}{n}j\right\rfloor+n+m+1$$

$$=\frac{(n+1)(m+1)+\gcd(n,m)+1}{2}$$

化简最后一个等式就得到（2.1）. □

命题 1 若 $n,m\in\mathbb{R}$，则 $\mathrm{card}(\mathcal{S}_{n,m})=\displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor n\rfloor}\left\lfloor\frac{nm-mi}{n}\right\rfloor+\lfloor n\rfloor+1$.

证明 逐个点数 $\mathcal{S}_{n,m}$ 中直线 $x=i$（$0\leq i\leq\lfloor n\rfloor$）上的整点，最后把每条直线上的整点数目累加起来就有

$$\mathrm{card}(\mathcal{S}_{n,m})=\sum_{0\leq i\leq\lfloor n\rfloor}\ \sum_{0\leq j\leq\left\lfloor\frac{nm-mi}{n}\right\rfloor}1=\sum_{i=0}^{\lfloor n\rfloor}\left(\left\lfloor\frac{nm-mi}{n}\right\rfloor+1\right)=\sum_{i=0}^{\lfloor n\rfloor}\left\lfloor\frac{nm-mi}{n}\right\rfloor+\lfloor n\rfloor+1.$$

这就完成了命题 1 的证明. □

命题 2 若 $n,m\in\mathbb{Z}$，则 $\mathrm{card}(\mathcal{S}_{n,m})=\dfrac{(n+1)(m+1)+\gcd(n,m)+1}{2}$.

证明 首先考虑一个矩形区域 $\mathcal{A}_{n,m}\cup\mathcal{B}_{n,m}\cup\mathcal{C}_{n,m}$，其中

$$\mathcal{A}_{n,m} := \left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : \frac{x}{n}+\frac{y}{m}<1, x\ge 0, y\ge 0, n>0, m>0\right\},$$

$$\mathcal{B}_{n,m} := \left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : \frac{x}{n}+\frac{y}{m}=1, 0\le x\le n, 0\le y\le m, n>0, m>0\right\},$$

$$\mathcal{C}_{n,m} := \left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : \frac{x}{n}+\frac{y}{m}>1, 0\le x\le n, 0\le y\le m, n>0, m>0\right\}.$$

其次建立一个从$\mathcal{A}_{n,m}$到$\mathcal{C}_{n,m}$的双射 f： $\mathcal{A}_{n,m}\to\mathcal{C}_{n,m}$． 具体地说， f 被定义为

$$f\left((x,y)\right)=\left(n-x,m-y\right), \quad \forall (x,y)\in\mathcal{A}_{n,m}.$$

我们有下面的两个结论：

结论 1 若$n,m\in\mathbb{Z}$，则$\mathrm{card}(\mathcal{B}_{n,m})=\gcd\left(n,m\right)+1$．

证明 把不定方程$\frac{x}{n}+\frac{y}{m}=1$改写为

$$\frac{m}{\gcd\left(n,m\right)}x+\frac{n}{\gcd\left(n,m\right)}y=\frac{nm}{\gcd\left(n,m\right)}. \tag{A}$$

注意到

$$\gcd\left(\frac{m}{\gcd\left(n,m\right)},\frac{n}{\gcd\left(n,m\right)}\right)=1,$$

而且$x=0$， $y=m$是（2.2）的特解，由二元一次不定方程的求解公式可知，不定方程（A）的一切整数解可表示为

$$x=\frac{n}{\gcd\left(n,m\right)}t, \quad y=m-\frac{m}{\gcd\left(n,m\right)}t,$$

其中$t\in\mathbb{Z}$． 由于$0\le x\le n$，因此$0\le\frac{n}{\gcd\left(n,m\right)}t\le n$，即$0\le t\le\gcd\left(n,m\right)$． 显然满足这样不等式的$t$共有$\gcd\left(n,m\right)+1$个． □

结论 2 映射 f： $\mathcal{A}_{n,m}\to\mathcal{C}_{n,m}$， $(x,y)\mapsto\left(n-x,m-y\right)$是双射．

证明 容易验证． □

由结论 2 可知， $\mathrm{card}(\mathcal{A}_{n,m})=\mathrm{card}(\mathcal{C}_{n,m})$． 另一方面，不难计算

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{A}_{n,m}\cup\mathcal{B}_{n,m}\cup\mathcal{C}_{n,m}\right)=\left(n+1\right)\left(m+1\right).$$

并注意到$\mathcal{A}_{n,m},\mathcal{B}_{n,m},\mathcal{C}_{n,m}$两两无交，由容斥原理可得

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{A}_{n,m}\cup\mathcal{B}_{n,m}\cup\mathcal{C}_{n,m}\right)=\mathrm{card}(\mathcal{A}_{n,m})+\mathrm{card}(\mathcal{B}_{n,m})+\mathrm{card}(\mathcal{C}_{n,m}),$$

再结合结论 1 可得，

$$\mathrm{card}(\mathcal{A}_{n,m})=\frac{\left(n+1\right)\left(m+1\right)-\gcd\left(n,m\right)-1}{2}.$$

所以

$$\mathrm{card}(\mathcal{S}_{n,m})=\mathrm{card}(\mathcal{A}_{n,m})+\mathrm{card}(\mathcal{B}_{n,m})=\frac{\left(n+1\right)\left(m+1\right)+\gcd\left(n,m\right)+1}{2}.$$

这就完成了命题 2 的证明． □

注解 当n,m不全是整数时，结论 2 不对．

参考文献

[1]H.Hardy and J.E.Littlewood, *Some problems of 'partitio numerorum'III: on the expression of a number as a sum of primes*, Acta.math.,**44** (1922) 1-70.
[2]J.-R. Chen, *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and a product of at most two primes*. Sci. Sinica **16** (1973), 157–176.
[3]T.Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.
[4]M.Polezzi, *A geometrical method for finding an explicit formula for the greatest common divisor*, Am.math.mon. **104** (1997) 445-446.
[5]R.L.Graham, D.E.Knuth and O.P.Patashnik, *Concrete Mathematics—A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

On the number of twin prime pairs

Li Hanju
School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou （510631）

Abstract

This paper obtains an explicit formula for the number $\pi_2(x)$ of twin prime pairs less than or equal to a given quantity *x*.

Keywords: Prime, Twin primes, Twin prime conjecture