素数定理的一个初等证明

罗贵文[1]　许作铭[2]
1. 辽宁省轻工业科学研究院 沈阳 110036
2. 辽宁大学数学学院 沈阳 110036

摘　要：本文利用改进的埃塔筛法，研究多次取整算法与素数及平均值的关系，给出了素数定理的一个初等证明。

关键词：素数定理；素数分布；台阶系数；筛法。
中图分类号：0156.1　MR（2000）　**主题分类号**：11N05　**文献标识码**：A

1. 引言

众所周知，素数定理是数论乃至整个数学中最著名的定理之一。

1792 年，也就是高斯 15 岁的时候，提出了这样的猜想：$\pi(x)$ 和函数

$$Li(x)=\int_2^x \frac{dt}{\log t} \qquad 1\text{-}1$$

渐近地相等，由于 $Li(x)\sim x/\log x$，所以这相当于

$$\pi(x)\sim x/\log x \qquad 1\text{-}2$$

这也曾由勒让德不十分明确地猜想过。

1896 年，哈达玛和瓦莱布桑利用复分析、尤其是黎曼 ς 函数先后独立地证明了公式（1-2），即现在熟知的素数定理。

长期以来，作者通过考察一千亿以内素数在 113650 个台阶或区间的变化情况，找到了素数分布的变化规律，得到了计算素数个数的一种新方法，证明了素数定理。

2. 台阶的划分与台阶素数

2.1 台阶的划分与台阶素数

令 $f(x_k e,)=\prod_{p\le p_k}\frac{p-1}{p}$，　$p_1=2<p_2=3<p_3=5<\cdots<p_n<p_{n+1}<\cdots$

$$b_n=\left[e^{1/f(x_k e,)}\right] \qquad 2\text{-}1$$

当 $k=1$，　$f(x_1 e,)=\frac{p_1-1}{p_1}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$，　$x=\left[e^2\right]=[7.38906]=7$[1]

定义 1：将 7 称为第一台阶尾数，用 b_1 表示，$b_1=7$ 将 1 称为第一台阶首数，用 a_1 表示，

作者简介：罗贵文，男，辽宁省彰武县人，1964 年 8 月毕业于沈阳轻工业学院。辽宁省轻工业科学研究院高级工程师

$a_1=1$。将1→7称为第1个台阶，用T_1表示。该台阶中任意一个数用x_1表示将$P_1=2$称为第1个台阶的台阶素数。用$p(xe,)$或$p(x_1e,)$表示。$P(xe,)=P_1=2$

当$k=2$，$f(x_2e,)=\frac{2-1}{2}\times\frac{3-1}{3}=\frac{1}{3}$，$b_2=\left[e^3\right]=\left[20.08554\right]=20$

显然，$p(x_2e,)=p_2=3$称为第2台阶的台阶素数，$a_2=7+1=8$，$b_2=20$，$8\to 20\in T_2$，用$p(x_2e,-1)$表示前一个台阶的台阶素数，$p(x_2e,-1)=p_1=2$，用$p(x_2e,1)$表示后面一个台阶的台阶素数$p(x_2e,1)=p_3=5$。把$p(x_2e,)$或$p(xe,)$称这T_2的台阶素数。

显然，当$f(x_ne,)=\frac{2-1}{2}\times\frac{3-1}{3}\times\frac{5-1}{5}\times\cdots\times\frac{p_n-1}{p_n}$时，$b_n=[e^{1/f(xe,)}]$为$T_n$的台阶尾数$b_n,b_n+1$为$T_{n+1}$的台阶首数$a_{n+1}$，$P_n$为$T_n$的台阶素数，写成$p(xe,)$或$P_n$。$T_n$台阶中任意一个数写成$x_n$，$T_n$的台阶系数[2]

$$f(xe,)=\prod_{p\le p(xe,)}\frac{p-1}{p} \qquad 2\text{-}2$$

这样就将正整数分成无限个由有限数字组成的台阶，就将正整数和素数联系起来了。在每个台阶中$p(xe,)$是不变的，$f(xe,)$也是不变的。x_n则由a_n变化到b_n。在不同的台阶中$p(xe,)$是变化的，$f(xe,)$也是变化的。

2.2 $p(xe,)$与$p(\sqrt{x},)$的关系

定义2：令$p(\sqrt{x},)$或p_m为小于并最接近等于$\sqrt{x}$的素数。大于这一素数的下一个素数用$p(\sqrt{x},1)$表示，小于这一素数前面的一个素数用$p(\sqrt{x},-1)$表示，把$p(\sqrt{x},)$称为方根素数。

$$p(\sqrt{x},)\le\sqrt{x}<p(\sqrt{x},1) \qquad 2\text{-}3$$

台阶中任意一个数x_n，当x较小时，$p(xe,)\ge p(\sqrt{x},)$在第七台阶以后

$$p(xe,)>p(xe,-1)\ge p(\sqrt{x},) \qquad 2\text{-}4$$

随着$\frac{\pi(x)}{x}$的比值逐渐减少，$p(xe,)$和$p(\sqrt{x},)$的差值更大。

3. 素数与多次取整算法

3.1 $p\#$筛法1与平均值

根据定义 1，将自然数 x 乘以 2, 3, 5, 7⋯ $p(xe,)$，其数值达到 $x\prod_{p\le p(xe,)} p$。在每个 $\prod_{p\le p(xe,)} p$ 区间，将 2, 3, 5, 7⋯ $p(xe,)$ 及其合数筛去，在每个 $\prod p$ 区间剩余的数字个数为 $\prod_{p\le p(xe,)}(p-1)$，这些数字是以 $\frac{1}{2}\prod_{p\le p(xe,)} p$ 为左右对称。

x 个 $\prod p$ 区间剩余的数字个数为 $x\prod_{p\le p(xe,)}(p-1)$

x 个 $\prod p$ 区间也可看成 $\prod p$ 个 x 区间，平均每个 x 区间的数字个数为

$$x\prod_{p\le p(xe,)}\frac{p-1}{p}$$

位于 x 之前的剩余数字已全部是素数，令

$$xf(xe,)=x\prod_{p\le p(xe,)}\frac{p-1}{p} \qquad 3\text{-}1$$

定义 3：我们将上速筛法称为 $p\#$ 筛法 1，将 $xf(xe,)$ 称为诸 x 区间数字个数的平均值。

3.2 素数与多次取整算法

将 $xf(xe,)$ 展开，并每进行一次运算后即取整

$$x-\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\left[\frac{x}{3}\right]\times\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\left[\frac{x}{5}\right]\times\frac{1}{2}\right]+\left[\left[\frac{x}{5}\right]\times\frac{1}{3}\right]-\left[\left[\frac{x}{5}\right]\times\frac{1}{3}\right]\times\frac{1}{2}\right]\cdots\cdots-\left[\frac{x}{p(xe,)}\right]$$

$$+\left[\left[\frac{x}{p(xe,)}\right]\times\frac{1}{2}\right]\cdots\cdots$$

定义 4：命上式为 $\sum[[xf(xe,)]], xf(\sqrt{x},)$ 的展开式的多次取整算法为 $\sum[[xf(\sqrt{x},)]]$，$\sum[[xf(xe,)]]$ 除了 x 以外还有 n 项，其中第 k 项为

$$[\![xf_k]\!]=\left[\frac{x}{p_k}\right]-\left[\left[\frac{x}{p_k}\right]\times\frac{1}{p_1}\right]-\left[\left[\frac{x}{p_k}\right]\times\frac{1}{p_2}\right]+\left[\left[\left[\frac{x}{p_k}\right]\times\frac{1}{p_2}\right]\times\frac{1}{p_1}\right]\cdots\cdots \qquad 3\text{-}2$$

根据公式[3]： $\pi(x)-m+1=\sum[[xf(\sqrt{x},)]]$

显然 $\pi(x)-n+1=\sum[[xf(xe,)]]$

$$\pi(x)\ge\sum[[xf(xe,)]]-1 \qquad 3\text{-}3$$

4. $\sum[[xf(xe,)]]$，$\sum[[xf(\sqrt{x},)]]$ 与平均值 $xf(xe,), xf(\sqrt{x},)$ 的关系

定义 5：命 $\sum d(\sqrt{x},)=\sum[[xf(\sqrt{x},)]]-xf(\sqrt{x},)$ 这里一共由 m 项组成，其中第 k 项为

$$d_k(x) = xf_{k-1} \times \frac{1}{p_k} - [[xf_k]]$$

$$\sum d(xe,) = \sum [[xf(xe,)]] - xf(xe,)$$

若将 x 逐次扩大对比筛分到 $p(\sqrt{x},) = p_m$ 时，位于 x（包括 x）之前已全部是素数和 1，在 $b_7 = 254$ 之后，若继续扩大对比筛分到 $p(\sqrt{x},1)$ 时。

$\sum [[xf(\sqrt{x},1)]]$ 只能筛去一个素数，而 $xf(\sqrt{x},) \times \frac{1}{p(\sqrt{x},1)} > 1$

$$\therefore \quad \sum d(xe,) \geq \sum d(\sqrt{x},) \qquad 4\text{-}1$$

命 x_1 的 $p(x_1 e,1) = p_\delta$ $\quad x_2 = x_1 \cdot p_s$。 随将 x_1 扩大 p_s 倍，在 $b_7 = 254$ 之后

$$\sum d(x_2 e,) > \sum d(x_1 e,) > 0 \qquad 4\text{-}2$$

$\sum d(\sqrt{x_2},)$ 是由 m_2 项组成的，其第 s 项：

$$d_s(x_2) = x_2 \cdot f(x_1 e,) \times \frac{1}{p_s} - \left(\left[\frac{x_2}{p_s}\right] - \left[\left[\frac{x_2}{p_s}\right] \times \frac{1}{p_1}\right] - \left[\left[\frac{x_2}{p_s}\right] \times \frac{1}{p_2}\right] + \left[\left[\left[\frac{x_2}{p_s}\right] \times \frac{1}{p_2}\right] \times \frac{1}{p_1}\right] \cdots\cdots \right)$$

$$= x_1 f(x_1 e,) - \sum [[x_1 f(x_1 e,)]]$$

$$d_s(x_2) = -\sum d(x_1 e,) \qquad 4\text{-}3$$

若 $\sum d(x_1, e) > 0$ 则 $d_s(x_2) < 0$

定义 6：命 $p_{i-1} = p(\sqrt[3]{x},-1) \leq \sqrt[3]{x} < p(\sqrt[3]{x},) = p_i$，从素数表中得知 81 台阶之后，$x_1 > 50148$

$\sum d(\sqrt{x_1},) < 0$：将 x_1 扩大 p_s 倍后，$d_i(x_2) > 0$，$d_{m_2}(x_2) = d(\sqrt{x_2},) > 0$，$d_s(x_2)$ 为最小值。

$$\therefore \qquad \frac{\sum d(\sqrt{x_2},)}{m_2} > d_s(x_2) \qquad 4\text{-}4$$

例：$x_1 = 53130$，$p(\sqrt{x_1},) = 229 = p_{50}$，$p(xe,) = 433$，$p_s = 439$

$\pi(x_1) = 5421$，$\sum [[xf(\sqrt{x_1},)]] = 5372$

$$\sum d(\sqrt{x_1},) = 5372 - 53130 \times 0.102037553 = -49.25519089$$

$\sum[[xf(x_1e,)]]=5421-84+1=5338$

$\sum d(x_1e,)=5338-53130\times0.091752256=513.2026387$， $x_2=53130\times439=23324070$

$\pi(x_2)=1467382$， $p_{m_2}=p(\sqrt{x_2},)=4817=p_{649}$， $p_{n_2}=p(x_2e,)=13613=p_{1609}$

$f(xe,)=f_{1609}=0.05894486238$， $f(\sqrt{x},)=f_{649}=0.06608332921$

$\sum d(\sqrt{x_2},)=1466734-23324070\times0.06608332921=-74598.208$

$\sum d(x_2e,)=1465774-23324070\times0.05894486238=1465774-1374834.096=90939.904$

（1） $\sum d(x_2e,)>\sum d(x_1e,)$

$\sum d(x_2e,)=90939.904>513.2026387=\sum d(x_1e,)$

$53130\in T_{433}$，该台阶 $\sum d(x_1''e)$ 为最大的一个数 x_1''， $23324070\in T_{1609}$，该台阶的 $\sum d(x_2'e)$ 为最小值的一个数 x_2'，也将

$$\sum d(x_2'e,)>\sum d(x_1''e,)$$

（2） $d_i(x)=d(\sqrt[3]{x},)>0$

若将 53130 乘以 $p(\sqrt{x},1)=233=p_{51}$， $53130\times233=12379290\in T_{1175}$

对 12379290 来讲， $p_i=p(\sqrt[3]{x_2},)=p_{51}=233$

那么 $d_i(x_2)=-\sum d(\sqrt{x_1},)=49.25519089>0$，其 $\sum d(xe,)=52299.84506$

再来看 23324070 的 $d_i(x_2)$

$283^3=22665187<23324070<25153757=293^3$

$\therefore$ 对于 $x_2=23324070$ 来讲， $p_i=p(\sqrt[3]{x},)=293=p_{62}$。

$\left[\dfrac{23324070}{293}\right]=79604$， $\pi(79604)=390\times20-3=7797$， $[[xf_{62}]]=7797+1-61=7737$

$xf_{61}\times\dfrac{1}{p_{62}}-[[xf_{62}]]=7784.691834-7737=47.68183353>0$

这里 $d_i(23324070)$ 显然小于 $d_i(12379290)=49.25519089$ 但并不影响 $d_i(x_2)>0$

（3） $d_m(x)=d(\sqrt{x},)>0$

23324070的 $p(\sqrt{x_2},) = p_{649} = 4817$ $\left[\dfrac{23324070}{4817}\right] = 4842$

将 4842 之前的 $p_{648} = 4813$ 及之前的素数和这些素数的合数全部筛去后仅有 3 个数。

1， 4817， 4831。那么在筛去 $p_{649} = 4817$ 时只能筛去 4817 4817^2=23203489 4817×4831=23270927 只能筛去 3 个数。

$$d_{m_2}(x_2) = 23324070 \times 0.06608332971 \times \frac{4817}{4816} \times \frac{1}{4817} - 3 = 320.0440631 - 3 = 317.0440631 > 0$$

（4） $d_s(x_2) = -\sum d(x_1 e,) = -513.2026387$

$P_s = 439 = P_{85}$， $P_{s+1} = 443$， $P_{s-1} = 433$

$d_{s+1}(x_2) = -482.6982168$， $d_{s-1}(x_2) = -451.2128926$ ，显然 $d_s(x_2)$ 为最小值。

（5） $\dfrac{\sum d(\sqrt{x_2},)}{m_2} = -114.9433097 > -513.2026387 = d_x(x_2)$

$\because P_s = P(x_1 e,1) < \dfrac{x_1}{2}$， $\sqrt{x_2} > P_s > \sqrt[3]{x_2}$， $P(x_2 e,) < x_1$

也就是不大于 x_2 的素数是 x_1 前面的素数决定的，如果 x_1 的素数较多，处于上限，那么 $\sum d(\sqrt{x_1},), \sum d(x_1 e,)$ 也将处于上限，那么相对于 x_2 来讲，由于 $d_s(x_2) = -\sum d(x_1 e,)$ 必将更小，因而使 $\sum d(\sqrt{x_2},), \sum d(x_2 e,)$ 处于下限，素数就是这样上下限交替变化的。

无论 x_1 处于上限，还是下限，当达到 T_7 尾数 254 以后，始终都能保证

$$\sum d(x_2 e) > \sum d(x_1 e,) \geq 0.$$

$$\sum d(xe,) \geq 0 \qquad 4\text{-}5$$

恒成立。这就是素数分布的结论，这一结论可用反证法来证明：

假定当 x 达到相当大以后， $\sum d(\sqrt{x},) < 0$， $\sum d(xe,) < 0$，令 x_1 为 x 达到相当大时， $\sum d(\sqrt{x_1},) < 0$， $\sum d(x_1 e,) < 0$ 将 x_1 扩大 $P_s = P(x_1 e,1)$ 倍后，得 $x_2 = x_1 \cdot P_s$

由于 $d_s(x_2) = -\sum d(x_1 e,) > 0$ 且 $\dfrac{\sum d(\sqrt{x_2},)}{m_2} > d_s(x_2) > 0$ $\therefore$ $\sum d(\sqrt{x_2},) > 0$

根据 4-1 式， $\sum d(x_2 e,) > \sum d(\sqrt{x_2},) > 0$ ，这与假定的当 x 达到相当大以后 $\sum d(\sqrt{x_2}) < 0$， $\sum d(xe,) < 0$ 相矛盾，因而 $\sum d(xe,) > 0$ 恒成立。

尽管存在着一定的波动，$\sum d(xe_i)$ 总的来讲会越来越大。

5. 结论

根据 3-3，4-5 $\pi(x) \geq \sum[[xf(xe_i)]]-1$，$\sum d(xe_i) \geq 0$

即 $\sum[[xf(xe_i)]]-xf(xe_i) \geq 0$ $\pi(x) \geq xf(xe_i)-1$，当达到第 7 台阶尾数 254 之后

$$\pi(x) \geq xf(xe_i-1) > xf(xe_i)$$

根据台阶划分原则： $f(xe_i-1) > \dfrac{1}{\log x} \geq xf(xe_i)$

$$\therefore \quad \pi(x) > \frac{x}{\log x} \qquad 5\text{-}1$$

即为素数定理得证。

用类似的方法，即可证明如下不等式恒成立。

$$D(x) \geq xg(xe_i)-1 = x\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\leq p(xe_i)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i)}}\frac{p-2}{p}-1 \qquad 5\text{-}2$$

当达到 $b_{29}=5630$ 之后 $D(x) \geq xg(xe_i-1) > xg(xe_i)$

$$\because \quad f(xe_i-1) > \frac{1}{\log x} \geq f(xe_i)$$

$$\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i-)}}\frac{(p-1)^2}{p^2} > \frac{1}{(\log x)^2} > \frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i)}}\frac{(p-1)^2}{p^2}$$

$$D(x) \geq x\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\leq p(xe_i-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i-1)}}\frac{p-2}{p}$$

又 $\dfrac{1}{4}\prod\limits_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i-1)}}\dfrac{p-2}{p} = \dfrac{1}{4}\prod\limits_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i-1)}}\dfrac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod\limits_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i-1)}}\dfrac{(p-1)^2}{p^2}$

$$\therefore D(x) \geq x\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\leq p(xe_i-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i-1)}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i-1)}}\frac{(p-1)^2}{p^2}$$

$$D(x) \geq x\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\leq p(xe_i-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i-1)}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\cdot\frac{1}{(\log x)^2}$$

令 $C_x = \prod\limits_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\leq p(xe_i-1)}}\dfrac{p-1}{p-2}\prod\limits_{\substack{p>2\\ p\leq p(xe_i-1)}}\left(1-\dfrac{1}{(p-1)^2}\right)$

则 $$D(x) \geq \frac{C_x \cdot x}{(\log x)^2} \quad 5\text{-}3$$

令 $C = \prod_{\substack{p\geq 3 \\ p\leq p(xe,-1)}} (1 - \frac{1}{(p-1)^2})$ 在 x 较大时，C=0.6601618158……

则 $$D(x) \geq \frac{cx}{(\ln x)^2} \prod_{\substack{p\geq 3 \\ p\leq p(xe,-1)}} \frac{p-1}{p-2} \quad 5\text{-}4$$

Hardy 和 little wood 关于哥德巴赫素数表示法个数的猜想为[4]：

$$N_2(n) = \frac{cn}{(\ln n)^2} \prod_{\substack{p\geq 3 \\ p|x}} \frac{p-1}{p-2} \quad 5\text{-}5$$

显然 5-4 证明了 Hardy 和 little wood 关于哥德巴赫表示法个数的猜想。

我国数学家陈景润的 1+2 定理为[5]：

$$P_x(1.2) \geq 0.67 \frac{C_x x}{(\log x)^2}，\text{其中 } C_x = \prod_{p>2} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} (1 - \frac{1}{(p-1)^2}) \quad 5\text{-}6$$

将 5-3 与陈景润的 1+2 定理相比较，显然有：

$$P_x(1.2) \geq D(x) \geq \frac{C_x x}{(\log x)^2} > 0.67 \frac{C_x x}{(\log x)^2} \quad 5\text{-}7$$

参考文献

[1] 潘承洞，潘承彪， 解析数论基础[M]，北京：科学出版社， 1997 年 8 月。368-375

[2] 许作铭，罗贵文，素数分布的三组递推公式及其应用[J]，沈阳师范大学学报（自然科学版）2006 第 4 期 388-391

[3] 华罗庚， 数论导引[M]，北京： 科学出版社， 1979 年。86-94

[4] (加)Guy,R.K. 著，张明尧译，数论中未解决的问题（第二版）[M]，北京：科学出版社，2004 年 1 月。137-139

[5] 王元， 哥德巴赫猜想研究[C]，哈尔滨： 黑龙江教育出版社， 1987 年 11 月。306-347

An Elementary proof of the prime number theorem

Luo Gui-wen[1] Xu Zuo-ming[2]

1. Liaoning Linght Industry Research Institute, PRC, 110036

2. College of Mathematics, Liaoning University, Shenyang , PRC, 110036

Abstract: Research the relationship between down the integer with the average number and prime number. This article has given an elementary proof for prime number theorem , by using the improved Eratosthenes sieve method.

Key Words: prime number threom, prime number distribution ,Step coefficient, the sieve method.

CLC number： O156.1；MSC（2000）11N05；**Document Code:** A