素数分布三组递推公式的初等证明

许作铭[1] 闫 俐[2] 罗贵文[1]
1. 辽宁大学数学学院，沈阳 110036
2. 中国人民大学信息学院，北京 100872
E-mail: xzm9@163.com

摘要： 在研究素数分布过程中，作者基于创立一种新的筛法（ $p\#$ 筛法），并根据极限存在准则以及等价量的性质，给出了估算 $\pi(x)$、$\pi_2(x)$ 和 $D(x)$ 三组递推公式的初等证明。而估算素数间隙的两个公式、孪生素数猜想及 Goldbach 猜想等是其中的推论。

关键词： 素数分布；筛法；台阶系数；孪生素数猜想；德巴赫猜想。
中图分类号： 0156.4 MR（2000）**主题分类号：** 11P32 11N05 **文献标识码：** A

1. 引言

众所周知，著名的哥德巴赫猜想是：“任何大于或等于 6 的偶数都可以表为两个素数之和”。而 Hardy-Littlewood 猜想其表法数[1]渐进地由下列公式给出：

$$N_2(n) \approx \frac{cn}{(\ln n)^2}\prod\frac{p-1}{p-2} \qquad 其中：\quad c=0.6601618158\ldots \tag{1}$$

1937 年依. 麦. 维诺拉朵夫证明了每一个大奇数都是三个素数之和。

1966 年我国数学家陈景润用筛法证明了“1＋2”定理，也就是存在一个正常数 c_x，使得每一个大偶数都可以表示成“一个素数与另一个素因子不超过 2 个的乘积之和”[2]。

$$p_x(1,2) \ge 0.67\frac{c_x x}{\log^2 x} \qquad 其中：\quad c_x = \prod_{\substack{p\mid x\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \tag{2}$$

王元指出：“对哥德巴赫猜想的进一步研究，必须有一个全新的思想和方法。”

本文的 $p\#$ 筛法是对解决上述问题的一种尝试。依作者看来，或许，我们可以说，能够为数论工作者解决哥德巴赫问题提供一种新的途径与方法。

2. 台阶的划分与 $p\#$ 筛法

定义 1 我们把小于并最接近 $\sqrt{x}$ 的素数称为**方根素数**，用 $p(\sqrt{x},)$ 表示。显然 $p(\sqrt{x},) \le \sqrt{x}$ 。

定义 2 令

$$f(xe,) = \prod_{p\le p(xe,)}\frac{p-1}{p} \tag{3}$$

我们把 $p(xe,)$ 称为**台阶素数**；$p(xe,-1)$ 为 $p(xe,)$ 前面的一个素数；$p(xe,1)$ 为 $p(xe,)$ 后面的一个素数。称 $f(xe,)$ 为素数的台阶系数，简称**台阶系数**。显然，$f(xe,)$ 具有以下性质[3]：

（1） $f(xe,)$ 是非负有界函数 $\qquad 0 < f(xe,) \le 0.5$ （4）

（2） $f(xe,)$ 是单调递减函数 $\qquad f(xe,1) < f(xe,) < f(xe,-1)$ （5）

（3） 当 $x\to\infty$ 时 $f(xe,)\to 0$ 渐近线 $f(xe,)=0$ （6）

$p(\sqrt{x},)$ 与 $p(xe,)$ 的关系：当 x 较小时，$p(xe,) \ge p(\sqrt{x},)$；在第 7 台阶后 $p(xe,) > p(\sqrt{x},)$ 。

定义 3 将正整数集合 N^+ 分成无限个有限数字组成的台阶，每个台阶中的数字具有同一个台阶素数 $p(xe,)$，把这些数字称为同一台阶的数。每一个台阶中第一个数称该**台阶的首数**，用 $a(xe,)$ 表示；最后一个数称该**台阶的尾数**，用 $b(xe,)$ 表示。T_k 表示第 k 个台阶。

台阶的划分由台阶系数 $f(xe,)$ 来决定．令

$$b(xe,)=b_k=\left[e^{1/f(xe,)}\right]=\left[e^{1/f_k}\right] \quad a_{k+1}=\left[e^{1/f(xe,)}\right]+1=b(xe,)+1=b_k+1 \tag{7}$$

则 b_k 为 $p(xe,)$ 的台阶尾数；a_{k+1} 为 $p(xe,1)$ 台阶的首数[4]。

定义 4 对任意 $x\in N^+$，$x\in T_n$，$p(xe,)=p_n$，把从 1 到 $X\ p\#=X\times2\times3\times5\times\ldots\times p_n$ 的数依次写下来，分别筛掉所有 p_k（$1\le k\le n$）的倍数，这种筛法称 $p\#$ **筛法Ⅰ**。

显然，根据 Eratosthenes 筛法，把正整数 x 逐次筛分到 $p(\sqrt{x},)$ 时，［1，x］区间的数字除 1 以外全部为素数。当继续扩大筛分到 $p(xe,)=p_n$ 时，由于 x 个 $p\#$ 区间可以看成 $p\#$ 个 x 区间，所以平均每个 X 区间的数字个数为：

$$x\prod_{p\le p(xe,)}\frac{p-1}{p}=xf(xe,) \tag{8}$$

定义 5 我们把每个台阶中实际素数个数与该台阶数字个数的比称为素数在该台阶中平均分布密度，简称**分布密度**，用 $f^*(xe,)$ 表示。显然第 k 个台阶的分布密度为：

$$f^*(xe,)=f_k^*=\frac{\pi(b_k)-\pi(b_{k-1})}{b_k-b_{k-1}} \tag{9}$$

定义 6 将正整数 X 乘以 $p\#$，其数值达到 $x\prod_{p\le p(xe,)}p$。然后将其分成若干个个数相等的 X 区间，其数量为 $\prod_{p\le p(xe,)}p$ 个。首先将 2，3 的倍数筛去。然后把位于数列 $\{5+6k\}$（$k\in N$）之中，5，7，11，13… $p(xe)$ 的倍数以及加 2 的数字全部筛去，再将 $\{1+6k\}$（$k\in N$）之中，5，7，11，13 直到 $p(xe,)$ 的倍数以及减 2 的那些数全部筛去。这种筛法叫 $p\#$ **筛法Ⅱ**。

经过上述筛分后，在每个 $\prod_{p\le p(xe,)}p$ 中剩余数字对数为 $\frac{1}{6}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\p>3}}(p-2)$。$X$ 个 $\prod_{p\le p(xe,)}p$ 区间数字对数为 $\frac{x}{6}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\p>3}}(p-2)$ 。平均每一个 X 区间数字对数为

$$\frac{x}{6}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\p>3}}\frac{p-2}{p}=\frac{x}{2}\prod_{\substack{p\le3\\p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\p>3}}\frac{p-2}{p} \quad 命 \quad \frac{x}{2}\prod_{\substack{p\le3\\p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p\le p(xe,)\\p>3}}\frac{p-2}{p}=xw(xe,)$$

则

$$w(xe,)=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\le3\\p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p>3\\p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p} \tag{10}$$

定义 7 我们把 $w(xe,)$ 称为孪生素数的**台阶系数**。$w(xe,)$ 具有以下性质：

（1） $w(xe,)$ 是非负有界函数　$0<w(xe,)\le0.25$ （11）

（2） $w(xe,)$ 是单调递减函数　$w(xe,1)<w(xe,)<w(xe,-1)$ （12）

（3） 当 $x\to\infty$ 时　$w(xe,)\to0$　渐近线　$w(xe,)=0$ （13）

定义 8 我们把每个台阶中实际孪生素数对数与该台阶数字个数的比值称为孪生素数在

该台阶中的平均分布密度，简称**分布密度**，用 $w^*(xe,)$ 表示。显然第 k 个台阶的分布密度为：

$$w^*(xe,)=\frac{\pi_2(b_k)-\pi_2(b_{k-1})}{b_k-b_{k-1}} \tag{14}$$

定义 9 将任一偶数 x 乘以 2，3，5，…，$p(xe,)$，其数值达到 $0.5x\prod_{p\le p(xe,)}p$ 对。首先将 2, 3，5，…，$p(xe,)$ 及其合数筛去，再将以这些素数为模与 x 同余[5] 的数全部筛去。这种筛法叫 $P\#$ 筛法III。

在每个 $\prod_{p\le p(xe,)}p$ 区间中剩余的数字对数为 ：

$\frac{1}{4}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\le p(xe,)}}(p-2)$ ， x 个 $\prod_{p\le p(xe,)}p$ 区间剩余数字的对数为：

$\frac{x}{4}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\le p(xe,)}}(p-2)$ ， 所有 X 区间剩余数字对数的平均值为：

$\frac{x}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p}$ ， 命 $xg(xe,)=\frac{x}{4}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\succ 2\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p}$

则

$$g(xe,)=\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p} \tag{15}$$

定义 10 我们把 $g(xe,)$ 称为 Goldbach 素数的台阶系数。显然第一个 X 区间的 Goldbach 素数以 $x/2$ 为对称轴前后二个数字相加，均等于偶数 x 。$g(xe,)$ 具有以下性质[6]：

（1） $g(xe,)$ 是非负有界函数 $0<g(xe,)\le 0.25$ （16）

（2） $g(xe,)$ 是单调递减函数 $g(xe,1)<g(xe,)<g(xe,-1)$ （17）

（3） 当 $x\to\infty$ 时 $g(xe,)\to 0$ 渐近线 $g(xe,)=0$ （18）

3．不大于 x 的素数个数的递推公式

素数分布定理[4]：对任意 $x\in T_n$，即 $x\in[a_n,b_n]$，恒有

（1） $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{xf(xe,)}=1$ $\pi(x)\approx xf(xe,)$ （19）

（2） $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\pi^-(x)}=1$ $\pi(x)\approx\pi^-(x)$ （20）

（3） $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi^+(x)}{\pi(x)}=1$ $\pi(x)\approx\pi^+(x)$ （21）

其中：（1） $\pi^+(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})f_k+(x-b_{n-1})f_n+0.5$ （22）

（2）$1 \le n \le 50$： $\pi^-(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1}) f_k + (x - b_{n-1}) f_n - 0.5n$ （命 $b_0 = 0$ ）

$$n \ge 51: \quad \pi^-(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1}) f_k + (x - b_{n-1}) f_n - 0.25n - 12.5 \tag{23}$$

【证】设 $r(x) = \pi^-(x) - xf(xe,)$，由（23）：

$$r(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1}) f_k + (x - b_{n-1}) f_n - 0.25n - 12.5 - xf_n \qquad (n \ge 51)$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) f_k - b_{n-1} f_n = \sum_{k=1}^{n-1}(f_k - f_{k+1}) b_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(f_k - f_k \frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}\right) b_k = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f_k b_k}{p_{k+1}}$$

$$\therefore \quad \frac{r(x)}{xf_n} = \frac{\pi^-(x) - h(x)}{xf_n} \le \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f_k b_k}{p_{k+1}}}{xf_n} = \frac{f_1 b_1}{xf_n p_2} + \frac{f_2 b_2}{xf_n p_3} + \frac{f_3 b_3}{xf_n p_4} + \ldots + \frac{f_{n-1} b_{n-1}}{xf_n p_n} \le (n-1)\frac{f_{n-1} b_{n-1}}{xf_n p_n}$$

$$\le \frac{(n-1) f_{n-1}}{p_n f_n} = \frac{(n-1) f_{n-1}}{p_n f_{n-1}(p_n - 1)/p_n} = \frac{n-1}{p_n - 1} \le \frac{n-1}{p_{n-1}} = \frac{\pi(p_{n-1})}{p_{n-1}}$$

显然，当 $n \to \infty, x \to \infty$：由定理 $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$[7] 有 $\frac{\pi(p_{n-1})}{p_{n-1}} \to 0$，即 $\frac{r(x)}{xf_n} \le \frac{n-1}{p_{n-1}} \to 0$

于是 $r(x) = o(xf_n) = o(xf(x))$ 即 $xf(xe,) \sim \pi^-(x)$ 。

同理可证 $xf(xe,) \sim \pi^+(x)$，根据极限的夹逼准则[8]、等价量的性质[9]以及 $p\#$ 筛法，恒有：

$$\pi(x) \sim \pi^+(x) \qquad \pi(x) \sim \pi^-(x) \qquad \pi(x) \sim xf(xe,)$$

因此公式（19）（20）（21）成立。证毕。

推论 1 当 $x \ge 11$ 时，素数定理成立：

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x} \tag{24}$$

【证】由公式（7） $f(xe,) \le 1/\ln x$ 显然，当 $x \to \infty$ ： $f(xe,) \sim 1/\ln x$ 即 $f(xe,) \approx 1/\ln x$ 。根据素数分布定理（19） $\pi(x) \approx xf(xe,) \approx \frac{x}{\ln x}$，即公式（24）成立。证毕。

推论 2 任意两个自然数 x_m 与 x_n 之间的素数个数计算公式

设 $x_m \in T_m$ $x_n \in T_n$ $n \ge m$ ，则

$$\Delta\pi(x) \ge \left[x_n f(x_n e,) - x_m f(x_m e,)\right] \qquad (n > m) \tag{25}$$

$$\Delta\pi(x) \ge \left[x_n f(x_n e,) - x_m f(x_n e, -1)\right] \qquad (n = m) \tag{26}$$

或
$$\pi^-(x_n) - \pi^+(x_m) \le \Delta\pi(x) \le \pi^+(x_n) - \pi^-(x_m) \tag{27}$$

【证】略。

推论 3 估算素数间隙的计算公式 1

设 p_n 为第 n 个素数， $p_n \in T_k$ ，则 p_n 与其相邻的下一个素数 p_{n+1} 的最大间隙

$$p_{n+1} - p_n \le \frac{1}{f(p_n e,1)} + \frac{p_n}{P(p_n e,) - 1} = \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k - 1} \tag{28}$$

【证】如果任一素数 p_n 为第 n 个素数 $p_n \in T_k$ ，则下一个素数为 $p_{n+1} \in T_k$ 或 $p_{n+1} \in T_{k+1}$ 。

设相邻两个素数之间的间隙为： $d = p_{n+1} - p_n$

（1）当 p_{n+1}， $p_n \in T_k$， 时 $f\left(p_{n+1}e,\right) = f\left(p_n e,\right)$ 由（26）

$$P_{n+1} f\left(P_{n+1}e,\right) - P_n f\left(P_n e,-1\right) \le 1 \qquad \left(d+p_n\right) f\left(p_n e,\right) - p_n f\left(p_n e,-1\right) \le 1$$

$$d \le \frac{1}{f\left(p_n e,\right)} + \frac{p_n f\left(p_n e,-1\right)\left(1-\frac{p_k-1}{p_k}\right)}{f\left(p_n e,-1\right)\frac{p_k-1}{p_k}} = \frac{1}{f_k} + \frac{p_n}{p_k-1} < \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k-1} \tag{29}$$

（2）当 $p_n \in T_k$， $p_{n+1} \in T_{k+1}$ 时 $f\left(p_{n+1}e,\right) = f\left(p_n e,1\right)$ 由（25）

$$p_{n+1} f\left(p_{n+1}e,\right) - p_n f\left(p_n e,\right) \le 1 \qquad \Rightarrow \left(d + p_n\right) f\left(p_n e,1\right) - p_n f\left(p_n e,\right) \le 1$$

$$d \le \frac{1}{f\left(p_n e,1\right)} + \frac{p_n f\left(p_n e,\right)\left(1-\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}\right)}{f\left(p_n e,\right)\times\frac{p_{k+1}-1}{p_{k+1}}} \le \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_{k+1}-1} < \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k-1} \tag{30}$$

由（29）（30），无论 p_n 与其相邻的下一个素数 p_{n+1} 是否在同一个台阶，恒有

$$p_{n+1} - p_n \le \frac{1}{f\left(p_n e,1\right)} + \frac{p_n}{P\left(p_n e,\right)-1} = \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{p_n}{p_k-1}$$

成立。即从 p_n 到 $p_{n+1} = p_n + d \le p_n + \frac{1}{f\left(p_n e,1\right)} + \frac{p_n}{P\left(p_n e,\right)-1}$ 之间至少存在一个素数。证毕。

推论 4 估算素数间隙的计算公式 2

设 p_n（$11 \le p_n$）表第 n 个素数，那么，估计与下一个素数 p_{n+1} 的素数间隙：

$$d \le \ln^2 p_n \tag{31}$$

【证】设 $d = p_{n+1} - p_n$，根据素数分布定理及推论 1 $df\left(xe,\right) \approx d/\ln x \approx 1$

由于 $x = p_n \ge 11$，显然 $\ln x >> 1$。故 $d/\ln x \le \ln x \Rightarrow d/\ln p_n \le \ln p_n \Rightarrow d \le \ln^2 p_n$ 证毕。

在 Rimann 假设成立条件下，**估算素数间隙的计算公式**

$$d = p_{n+1} - p_n \le p_n^{1/2} \ln p_n \tag{32}$$

目前最好的结果是 Iwaniec $d = p_{n+1} - p_n \le p_n^{11/20-1/384}$ [11]，楼石拓和姚琦得到 $6/11$[1]。

4. 不大于 x 的孪生素数对数的递推公式

孪生素数定理：对任意正整数 $x \in T_n$，恒有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi_2^+(x)}{\pi_2(x)} = 1, \qquad \pi_2(x) \approx \pi_2^+(x) \tag{33}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi_2(x)}{\pi_2^-(x)} = 1, \qquad \pi_2(x) \approx \pi_2^-(x) \tag{34}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi_2(x)}{xw\left(xe,\right)} = 1, \qquad \pi_2(x) \approx xw\left(xe,\right) \tag{35}$$

其中：（1） $\pi_2^+(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k-1}\right)w_k + \left(x - b_{k-1}\right)w_n + 0.25n$ （36）

（2） $1 \le n \le 50$： $\pi_2^-(x) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k-1}\right)w_k + \left(x - b_{k-1}\right)w_n - 0.5n$

$$n \ge 51: \quad \pi_2^-(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1})w_k + (x - b_{k-1})w_n - 0.25n - 12.5 \tag{37}$$

引理 1 对任意正整数 $x \in T_n$，即 $x \in [a_n, b_n]$，恒有

$$n \ge 51: \quad xw(xe,) \le \pi_2^-(x) \tag{38}$$

【证】由公式（37）$\pi_2^-(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1})w_k + (x - b_{n-1})w_n - 0.25n - 12.5$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1})w_k - b_{n-1}w_n - 0.25n - 12.5 + xw_n = \sum_{k=1}^{n-1}(w_k - w_{k+1})b_k + xw_n - 12.5 - 0.25n$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n-1} 1 + xw_n - 12.5 - 0.25n = n - 1 + xw_n - 12.5 - 0.25n = 0.75n - 13.5 + xw_n \ge xw_n$$

即 $xw(xe,) = xw_n \le \pi_2^-(x)$。引理 1 证毕。

引理 2 对任意正整数 $x \in T_n$，即 $x \in [a_n, b_n]$，恒有

$$xw(xe,) \sim \pi_2^-(x) \tag{39}$$

【证】设 $r(x) = \pi_2^-(x) - xw(xe,)$，当 $n \ge 51$ 时：由（37）：

$$r(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1})w_k + (x - b_{n-1})w_n - 0.25n - 12.5 - xw_n$$

$$\le \sum_{k=1}^{n-1}(w_k - w_{k+1})b_k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(w_k - w_k\frac{p_{k+1}-2}{p_{k+1}}\right)b_k = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2w_k b_k}{p_{k+1}}$$

$$\frac{r(x)}{xw(xe,)} = \frac{\pi_2^-(x) - xw_n}{xw_n} \le \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2w_k b_k}{p_{k+1}}}{xw_n} \le \frac{2(n-1)w_{n-1}b_{n-1}}{p_n w_n x} \le \frac{2(n-1)w_{n-1}}{p_n w_n} = \frac{2(n-1)}{p_n(p_n-2)/p_n}$$

$$= \frac{2(n-1)}{p_n - 2} \le \frac{2(n-1)}{p_n - 1} = \frac{2\pi(p_n - 1)}{p_n - 1}$$

显然，$n \to \infty, x \to \infty$：由素数定理 $\frac{\pi(x)}{x} \to 0$[5] 有 $\frac{2\pi(p_n - 1)}{p_n - 1} \to 0$；于是 $\frac{r(x)}{xw(xe,)} \to 0$。

即 $r(x) = o(xw_n) = o(xw(x))$，因此，$xw(xe,) \sim \pi_2^-(x)$。引理 2 证毕。

引理 3 对任意正整数 $x \in T_n$，即 $x \in [a_n, b_n]$，恒有

$$n \le \sqrt{x} \tag{40}$$

【证】（1）当 k=1 时：对任意正整数 $x \in T_1$ 即 $x \in [a_1, b_1] = [1,7]$ 恒有 $1 \le \sqrt{x}$ 成立。

（2）假设 $k = n$ 对任意正整数 $x \in T_n$ 即 $x \in [a_n, b_n]$，关系式 $n \le \sqrt{x}$ 成立。

则 当 $k = n+1$ $x \in T_{n+1}$ 即 $x \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$，由（7）$a_{n+1} = b_n + 1$ 有 $n \le \sqrt{a_n} < \sqrt{b_n} < \sqrt{a_{n+1}}$。

显然 $n + 1 \le \sqrt{a_n} + 1 \le \sqrt{b_n}$。因此 $n + 1 \le \sqrt{b_n} < \sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{b_{n+1}}$。$n + 1 < \sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{b_{n+1}}$

$\Rightarrow n + 1 \le \sqrt{x}$。

于是，根据数学归纳法原理，对任意正整数 $x \in T_n$，恒有 $n \le \sqrt{x}$ 成立。引理 3 证毕。

引理 4 对任意正整数 $x \in T_n$，即 $x \in [a_n, b_n]$，恒有

$$xw(xe,) \sim \pi_2^+(x) \tag{41}$$

【证】略。 利用引理 3，采用引理 2 同样的方法即可证明。

孪生素数定理的证明：

根据等价量的性质[9]，由引理 2 $xw(xe,)\sim\pi_2^-(x)$ 和引理 4 $xw(xe,)\sim\pi_2^+(x)$，恒有 $\pi_2^-(x)\sim\pi_2^+(x)$ 。根据 $p\#$ 筛法 $\pi_2(x)\ge xw(xe,)$ 和夹逼准则[8]，恒有 $\pi_2^+(x)\sim\pi_2(x)$，$\pi_2^-(x)\sim\pi_2(x)$， $xw(xe,)\sim\pi_2(x)$，因此，孪生素数定理得证。

推论 1 对任意正整数 $x\in T_n$, 恒有

$$\pi_2(x)\approx\frac{2cx}{(\ln x)^2}\text{，}\qquad\text{其中：}c=\prod_{p\ge3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\approx0.66016\ldots\qquad(42)$$

【证】由孪生素数定理，对任意正整数 $x\in T_n$， 恒有 $\pi_2(x)\approx xw(xe,)$, 由（10）(3)

$$w(xe,)=\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\le3\\p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p}\prod_{\substack{p>3\\p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p}=w_k=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,)}}\frac{(p-2)p}{(p-1)^2}\frac{(p-1)^2}{p^2}$$

$$\Rightarrow\quad w_k=2\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,)}}\frac{(p-2)p}{(p-1)^2}\prod_{p\le p(xe,)}\frac{p-1}{p}\prod_{p\le p(xe,)}\frac{p-1}{p}=2cf^2(xe,)\approx\frac{2c}{\ln^2 x}$$

$\therefore\quad\pi_2(x)\approx xw(xe,)\approx2cx/\ln^2 x$，推论 1 证毕。

事实上，1923 年 Hardy-Littlewood 提出的孪生素数猜想的渐近分布形式为

$$\pi_2(x)\approx\frac{2cx}{(\ln x)^2}=\pi_2^*(x)\qquad\pi_2(x)\approx2c\int_2^x\frac{dt}{\ln^2 t}=\pi_2^{\pm}(x)\qquad(43)$$

其中：$c=\prod_{p\ge3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\approx0.66016\ldots$（$\pi_2^*(x)$， $\pi_2^{\pm}(x)$ 是作者为表述方便增加的）

推论 2　估算孪生素数间隙的计算公式 1

设 p_n, $p_n+2\in T_k$ 为第 n 对孪生素数，则与其相邻的下一对孪生素数 p_{n+1}， p_{n+1}+2 的间隙

$$d<\frac{\ln^3 p_n}{2c}-4\qquad\text{其中}\qquad c=\prod_{p\ge3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\approx0.66016181584\ldots\qquad(44)$$

【证】 $d=p_{n+1}-(p_n+2)\quad\Delta\pi_2(x)=2$　根据孪生素数定理

$$\frac{\Delta\pi_2(x)}{w(xe,)}\approx d+4\quad\Rightarrow\quad\frac{2}{w_k}\approx d+4$$

显然，当 $x\ge11$ 时， 恒有 $\ln x>>2$, 由推论 1 $\frac{\ln x}{2c/\ln^2 x}\ge d+4\quad\Rightarrow\quad d\le\frac{\ln^3 x}{2c}-4$

取 x=p_n , 故推论 2 得证。

推论 3：孪生素数是无限的。

【证】假设孪生素数共有 n 对，即孪生素数是有限的，最大的孪生素数对为 p_n, $p_n+2\in T_k$ 。根据推论 2 取 $p_n+2+\left(\frac{\ln^3 p_n}{2c}-4\right)=p_n+\frac{\ln^3 p_n}{2c}-2$ 则 p_n+2 到 $p_n+\frac{\ln^3 p_n}{2c}-2$ 之间

至少还有一对孪生素数。因此还有比 p_n，p_n+2 更大的孪生素数，即孪生素数至少有 $n+1$ 对。这与假设矛盾。

根据反证法原理，孪生素数是无限的。这就证明了孪生素数猜想。推论 3 证毕。

5. “任何偶数 $x\ge 6$ 表为两个奇素数之和”表法数的递推公式

Goldbach 定理[6]： 对任意偶数 $x\ge 5202\in T_n$，恒有

$$D(x)^{[11]}\approx xg(xe,-1)=\frac{x}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe,-1)}}\frac{p-2}{p} \qquad (45)$$

【证】任意偶数 $x\ge 5202\in T_n$，由算术基本定理[12] 知 x 可以唯一的表示成为

$$x=p_1^{e_1}\times p_2^{e_2}\times\ldots\times p_n^{e_n}\times\ldots\times p_r^{e_r}\qquad e_1\ge 1，\ 当\ k\ge 2:\quad e_k\ge 0，\quad r\ge n$$

根据定义 9，取下列二式为 $D(x)$ 的一个上界：

$$n\le 28: D^+(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})g_k+(x-b_{n-1})g_n+0.25n \qquad (46)$$

$$n\ge 29: D^+(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})g_k+(x-b_{n-1})g_n+7 \qquad (47)$$

设 $R(x)=D^+(x)-xg(xe,-1)$，由（47）（15），当 $n\ge 29$：

$$R(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k-1})g_k+(x-b_{n-1})g_n+7-xg_{n-1}\le\sum_{k=1}^{n-1}(g_k-g_{k+1})b_k+7$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}g_k\left(1-\frac{p_{k+1}-2}{p_{k+1}}\right)b_k+7=\sum_{k=1}^{n-1}2g_kb_k/p_{k+1}+7\le\frac{2(n-1)g_{n-1}b_{n-1}}{p_n}$$

$$\frac{R(x)}{xg(xe,-1)}\le\frac{2(n-1)g_{n-1}b_{n-1}}{xg_np_n}\le\frac{2(n-1)g_{n-1}}{g_np_n}\le\frac{2(n-1)g_{n-1}}{g_{n-1}\frac{p_n-2}{p_n}p_n}=\frac{2(n-1)}{p_n-2}\le\frac{2(n-1)}{p_{n-1}}=\frac{2\pi(p_{n-1})}{p_{n-1}}$$

由于当 $x\to\infty,n\to\infty,p_{n-1}\to\infty$：$\frac{2\pi(p_{n-1})}{p_{n-1}}\to 0$（根据 $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x}=0$ [7]）。

因此 $\frac{R(x)}{xg_{n-1}}\to 0$，$R(x)=o(xg_{n-1})=o(xg(xe,-1))\quad(n\to\infty,x\to\infty)$ 即 $D^+(x)\sim xg(xe,-1)$

根据夹逼准则[8]，$D(x)\sim xg(xe,-1)$ 即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{D^+(x)}{xg(xe,-1)}=1\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{D(x)}{xg(xe,-1)}=1 \qquad (48)$$

$$D(x)\approx xg(xe,-1)=\frac{x}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe,-1)}}\frac{p-2}{p}\quad 成立，证毕。$$

推论 1 对任意偶数 $x\ge 5202\in T_n$，“偶数为二素数之和”表法数为：

$$D(x)\ge\frac{cx}{\ln^2 x}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}，\quad 其中：c=\prod_{\substack{p\ge 3\\ p\le p(xe,-1)}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\approx 0.660161815847448\ldots \qquad (49)$$

【证】 根据 Goldbach 定理：

$$D(x)\approx xg(xe,-1)=\frac{x}{4}\prod_{\substack{p>2\\p|x\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-2}{p}=\frac{x}{4}\prod_{\substack{p>2\\p|x\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\times\frac{(p-1)^2}{p^2}$$

$$=\frac{x}{4}\prod_{\substack{p\ge3\\p|x\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{\substack{p\ge3\\p\le(xe,-1)}}\frac{(p-1)^2}{p^2}=x\prod_{\substack{p\ge3\\p|x\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{p\le(xe,-1)}\frac{p-1}{p}\prod_{p\le(xe,-1)}\frac{p-1}{p}$$

$$=f^2(xe,-1)\,x\prod_{\substack{p\ge3\\p|x\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$$

由于 $f(xe,-1)=\prod_{p\le(xe,-1)}\frac{p-1}{p}\ge\frac{1}{\ln x}$ ，因此 $D(x)\ge\frac{x}{\ln^2 x}\prod_{\substack{p\ge3\\p|x\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,-1)}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$

即 $D(x)\ge\frac{cx}{\ln^2 x}\prod_{\substack{p\ge3\\p|x\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}$。其中：$c=\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,-1)}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\approx0.660161815847448...$。证毕。

推论 2 对任意偶数 $x\ge5202\in T_n$，即 $x\in[a_n,b_n]$，恒有

$$D(x)\ge xg(xe,)=\frac{x}{4}\prod_{\substack{p>2\\p|x\\p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p}\tag{50}$$

【证】由公式（44）（17），公式（49）成立. 证毕。

推论 3 对任意偶数 $x\ge6\in T_n$，即 $x\in[a_n,b_n]$，恒有

$$D(x)\ge xg(xe,)-1=\frac{x}{4}\prod_{\substack{p>2\\p|x\\p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\p\le p(xe,)}}\frac{p-2}{p}-1\tag{51}$$

【证】略。

推论 4 当偶数 $n\ge5202\in T_k$，**Hardy-Littlewood 猜想"偶数** n **为二素数之和"表法数为**[10]：

$$N_2(n)\sim\frac{cn}{\ln^2 n}\prod_{\substack{p\ge3\\p|n\\p\le p(ne,-1)}}\frac{p-1}{p-2}，\ 其中：c=\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,-1)}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\approx0.6601618...\tag{52}$$

【证】根据 Goldbach 定理：公式（3）（15）

$$D(x)\sim xg(xe,-1)=\frac{x}{4}\prod_{\substack{p>2\\p|x\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-2}{p}=f^2(xe,-1)\,x\prod_{\substack{p\ge3\\p|x\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(xe,-1)}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$$

显然，命 $x=n$，$N_2(n)=D(x)$，则当 $n\to\infty$：$f(ne,-1)=\prod_{p\le(ne,-1)}\frac{p-1}{p}\sim\frac{1}{\ln n}$

因此 $N_2(n)\sim\frac{n}{\ln^2 n}\prod_{\substack{p\ge3\\p|n\\p\le p(ne,-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p\ge3\\p\le p(ne,-1)}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)=\frac{cn}{\ln^2 n}\prod_{\substack{p\ge3\\p|n\\p\le p(ne,-1)}}\frac{p-1}{p-2}$，证毕。

6. 结论：

尽管我们不知道 $p\#$ 筛法，是否一定导致孪生素数猜想和哥德巴赫猜想的最终证明，但这种方法的确得到了许多非常深刻的结果，主要有：

（1）根据素数分布定理，可以得到素数定理、素数间隙公式以及任何两个自然数之间素数个数的公式。

（2）根据孪生素数定理，容易证明孪生素数是无限的，即孪生素数猜想成立。

（3）根据 Goldbach 定理及其推论，我们有理由说，任何偶数都可以表示为两个奇素数之和。即哥德巴赫猜想成立。

（4）经检验（1 千亿内），应用本定理及其推论得到的公式，可以有效地估计素数、孪生素数和 Goldbach 素数的实际分布。（lix 见[13]）

附表 1　利用素数分布定理与素数定理计算不大于 x 的素数个数比较表

T	x	$f(xe,)$	$x/\ln x$	$\pi^{-}(x)$	$\pi(x)$	$\pi^{+}(x)$	lix
5	100	0.207792208	22	25	25	27	30
14	1000	0.141719399	145	165	168	171	178
38	10000	0.108515597	1086	1216	1229	1234	1246
113	1.00E+05	0.086794101	8686	9566	9592	9607	9630
341	1.00E+06	0.072377409	72383	78482	78498	78579	78627
1057	1.00E+07	0.062037933	620421	664537	664579	664813	664918
3324	1.00E+08	0.054285851	5428682	5761121	5761455	5761964	5762209
10653	1.00E+09	0.048254536	48254943	50845988	50847534	50848663	50849235
34600	1.00E+10	0.043429441	434294482	455045578	455052511	455054240	455055615
113650	1.00E+11	0.039481290	3948131654	4118034607	4118054813	4118063032	4118066401

附表 2　素数的台阶系数与分布密度以及台阶尾数、素数个数情况一览

T	$x=b(xe,)$	$f(xe,)$	$\pi^{-}(x)$	$\pi(x)$	$\pi^{+}(x)$	$\Delta\pi$	Δb	$f^{*}(xe,)$
5	123	0.2077922	29	30	31	8	44	0.1818182
14	1160	0.1417194	187	191	194	25	176	0.1420455
38	10049	0.1085156	1221	1233	1239	57	553	0.1030741
113	100863	0.0867941	9641	9663	9681	159	1866	0.0852090
341	1000955	0.0723774	78551	78569	78649	435	6013	0.0723433
1057	100010752	0.0620379	665204	665245	665480	1181	19085	0.0618811
3324	100032548	0.0542859	5762888	5763219	5763731	3240	59734	0.0542405
10653	1000174622	0.0482545	50854413	50855924	50857089	8859	184491	0.0480186
34600	10000040685	0.0434294	455047345	455054271	455056007	24337	561775	0.0433216
113650	100001686767	0.0394813	4118101203	4118121356	4118129628	66941	1696908	0.0394488

附表 3. 估计素数间隙情况一览表

p_n	$d^* = \ln^2 p_n$	$p_n^{6/11}$	d	$(d^*-d)/d$	d^*/d
89	20.15	11.57	8	1.5188	2.5188
113	22.35	13.18	14	0.5964	1.5964
887	46.07	40.55	20	1.3035	2.3035
1327	51.71	50.51	34	0.5209	1.5209
9551	83.99	148.23	36	1.3331	2.3331
19609	97.69	219.45	52	0.8787	1.8787
31397	107.21	283.69	72	0.4890	1.4890
155921	142.97	679.98	86	0.6624	1.6624
492113	171.78	1272.81	114	0.5068	1.5068
1357201	199.4	2213.50	132	0.5106	1.5106
4652353	235.71	4334.23	154	0.5306	1.5306
17051707	277.28	8802.39	180	0.5404	1.5404
47326693	312.32	15361.07	220	0.4196	1.4196
25056082543	573.33	470039.61	456	0.2573	1.2573
42652618807	599.09	628278.50	464	0.2911	1.2911
127976335139	654.09	1144021.97	468	0.3976	1.3976
303371455741	698.98	1831872.74	500	0.3980	1.3980
1346294311331	779.99	4129472.24	582	0.3402	1.3402
2614941711251	817.52	5931453.06	652	0.2539	1.2539
42842283926129	985.24	27262575.48	778	0.2664	1.2664
90874329412297	1033.01	41086127.58	804	0.2848	1.2848
5.53507764E+16	1486.29	1357103394.27	1197	0.2417	1.2417

附表4 利用孪生素数定理与Harday-Littlewood猜想计算孪生素数对数比较一览表

T	x	σ_n	$\pi_2^*(x)$	$\pi_2^-(x)$	$\pi_2(x)$	$\pi_2^+(x)$	$\pi_2^\pm(x)$
14	1000	41.23	27.67	35	35	44	46
38	10000	208.18	155.64	190	205	217	214
113	100000	1240.25	996.11	1200	1224	1268	1249
341	1000000	8235.08	6917.46	8138	8169	8320	8248
1057	10000000	58731.96	50822.14	58456	58980	58996	58754
3324	100000000	440326.66	389107.00	439484	440312	441157	440368
10653	1000000000	3425226.5	3074425.7	3422551	3424506	3427889	3425308
34600	10000000000	27411243.0	24902848	27402581	27412679	27419892	27411417
113650	100000000000	224368465.5	205808662	224340041	224376048	224396878	224368865

注： $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k-1})w_k + (x - b_{n-1})w_n$

附表 5 利用孪生定理计算不大于 x 的孪生素数对数目及其分布情况表

T	$x=b(xe,)$	$w(xe,)$	xw	$\pi_2^-(x)$	$\pi_2(x)$	$\pi_2^+(x)$	$\Delta z(x)$	$\Delta b(xe,)$	$w^*(xe,)$
14	1160	0.0266357	31	39	41	49	6	176	0.0340909
38	10049	0.0155631	157	190	207	218	8	553	0.0144665
113	100863	0.0099484	1004	1209	1230	1277	14	1866	0.0075027
341	1000955	0.0069168	6924	8144	8180	8326	48	6013	0.0079827
1057	10010752	0.0050816	50871	58510	59039	59050	101	19085	0.0052921
3324	100032548	0.0038909	389221	439610	440441	441284	229	59734	0.0038337
10653	1000174622	0.0030744	3074913	3423088	3425037	3428426	561	184491	0.0030408
34600	10000040685	0.0024903	24902942	27402682	27412782	27419994	1370	561775	0.0024387
49441	20000366482	0.0023469	46938045	51492699	51509973	51517431	1860	784709	0.0023703
79364	50000015705	0.0021755	108776527	118885185	118903715	118924879	2631	1217566	0.0021609
101234	80001440132	0.0020948	167589567	182832258	182859019	182882887	3271	1524789	0.0021452
113650	100001686767	0.0020581	205811844	224343513	224379466	224400349	3437	1696908	0.0020254

附表 6-1　　Goldbach 素数表示法个数及其分布情况一览表

T	$p(xe,)$	x	$g(xe,)$	$xg(xe,)$	$D(x)$	$D^+(x)$
7366	74713	483729408	0.003301786	1597170.96	1776380	1787402
10475	110311	967458816	0.003084220	2983856.14	3308036	3325029
14913	162779	1934917632	0.002887528	5587128.17	6172512	6201294
21257	240433	3869835264	0.002709058	10483608.95	11541426	11593255
30332	354439	7739670528	0.002546633	19710101.44	21632756	21721775
43326	523493	15479341056	0.002398395	37125566.65	40633580	40783979
61946	772867	30958682112	0.002262732	70051199.39	76448659	76724073
88652	1140749	61917364224	0.002138256	132395161.05	144111040	144600615
109377	1432441	92876046336	0.002070147	192267061.35	208986177	209664393
4980	48409	223092870	0.008198622	1829054.10	2044847	2057634
7071	71399	446185740	0.007637994	3407964.05	3792532	3815904
10053	105367	892371480	0.007132913	6365208.40	7059485	7096377
14311	155453	1784742960	0.006676280	11915442.95	13163556	13231177
22865	260411	4461857400	0.006137019	27382503.12	30127120	30258891
25105	288559	5354228880	0.006037532	32326326.28	35536922	35689480
32633	384331	8923714800	0.005771323	51501641.61	56489147	56719670
46622	567407	17847429600	0.005437377	47043203.73	106126639	106538505
66673	836917	35694859200	0.005131580	183171017.58	199787782	200500885
82226	1051459	53542288800	0.004964509	265811155.36	289511362	290482706
95434	1235573	71389718400	0.004850870	346302247.95	376771207	378017964
107133	1400093	89237148000	0.004765396	425250345.97	462283628	463799061

附表 6-2　Goldbach 素数表示法个数及其分布情况一览表

T	$p(xe,)$	x	$g(xe,)$	$xg(xe,)$	$D(x)$	$D^{+}(x)$
14	43	1000	0.017757161	17.76	27	31
38	163	10000	0.010375371	103.75	127	146
113	617	100000	0.006632293	663.23	810	834
244	1549	500000	0.005109483	2554.74	3052	3085
341	2293	1000000	0.004611232	4611.23	5402	5497
751	5701	5000000	0.003698407	18492.04	21290	21551
1057	8447	10000000	0.003387731	33877.31	38807	39161
2355	20939	50000000	0.002800852	140042.60	158467	159381
3324	30839	100000000	0.002593962	259396.22	291400	293558
4712	45427	200000000	0.002409292	481858.43	538290	542492
7491	76091	500000000	0.002193903	1096951.57	1219610	1227358
10653	112337	1000000000	0.002049584	2049583.79	2274205	2283491
15167	165887	2000000000	0.001919076	3838152.47	4238417	4259289
24239	277493	5000000000	0.001764840	8824197.68	9703556	9745553
34600	409867	10000000000	0.001660189	16601893.75	18200488	18274169
49441	604529	20000000000	0.001564573	31291456.51	34204396	34336148
79364	1011649	50000000000	0.001450353	72517661.29	79004202	79270010
113650	1492637	100000000000	0.001372056	137205581.12	148192856	149578984
1041	8293	9699690	0.011173189	108376.47	124180	125292
2075	18119	38798760	0.009470576	367446.61	415478	419124
2542	22741	58198140	0.009046042	526462.82	593605	598413
3273	30269	96996900	0.008551115	829431.64	931793	938840
4640	44641	193993800	0.007941232	1540549.85	1723190	1734747
6587	65957	387987600	0.007394296	2868895.31	3196222	3215214
9364	97373	775975200	0.006901931	5355727.13	5945546	5976024
15235	166783	2017535520	0.006300091	12710656.71	14037095	14104650
21717	246073	4035071040	0.005911450	23853118.83	26261709	26372170
30990	363149	8070142080	0.005557655	44851067.10	49219052	49418800
49664	607417	20175355200	0.005136718	103635116.32	113287153	113714580
71034	896537	40350710400	0.004849267	195671364.26	213330307	214076246
101693	1323389	80701420800	0.004585277	370038359.32	402408141	403737262
109524	1434421	93117024000	0.004533467	422142931.28	458847239	460336063
15	47	1318	0.012751153	16.81	26	29
40	173	10814	0.007599454	82.18	102	118
120	659	114074	0.004866692	555.16	689	697
341	2293	1000256	0.003458424	3459.31	4010	4126
1057	8447	10010368	0.002540798	25434.33	29124	29400

附表 6-3　　Goldbach 素数表示法个数及其分布情况一览表

T	$p(xe,)$	x	$g(xe,)$	$xg(xe,)$	$D(x)$	$D^{+}(x)$
2356	20947	50014208	0.002100438	105051.77	118542	119568
3323	30829	99960842	0.001945598	194483.60	219027	220095
3854	36313	134217728	0.001884819	252976.17	283746	285643
5468	53639	268435456	0.001752554	470447.76	525236	528565
7766	79241	536870912	0.001633814	877147.07	975685	980972
11046	117017	1073741824	0.001526689	1639270.15	1817111	1825584
15728	172673	2147483648	0.001429802	3070476.41	3390038	3406033
22423	254857	4294967296	0.001341827	5763101.01	6341424	6369733
32000	376127	8589934592	0.001261739	10838255.99	11891654	11938531
45716	555143	17179869184	0.001188612	20420203.01	22336060	22422088
65373	819463	34359738368	0.001121665	38540100.58	42034097	42193058
93568	1209311	68719476736	0.001060215	72857432.85	79287664	79541739
111822	1466701	96921780224	0.001031587	99983284.56	108671116	109012726
13	41	900	0.037246727	33.52	48	53
37	157	9000	0.021008516	189.08	242	262
107	587	90000	0.013530807	1217.77	1471	1525
324	2143	900000	0.009364015	8427.61	9853	10056
1003	7937	9000000	0.006865230	61787.07	70619	71495
3153	28979	90000000	0.005247614	472285.26	531538	534935
5784	57041	300000000	0.004620434	1386130.26	1547388	1556155
8217	84307	600000000	0.004309002	2585401.23	2874881	2889411
10096	105899	900000000	0.004141239	3727115.16	4132595	4154996
18660	208283	3000000000	0.003696861	11090584.02	12224533	12280658
26616	307543	6000000000	0.003472743	20836455.25	22899781	22991329
32776	386159	9000000000	0.003350966	30158693.02	33076258	33212963
60948	759617	30000000000	0.003024846	90745378.81	99039834	99402691
87220	1120673	60000000000	0.002858238	171494302.65	186693890	187327502
107607	1407193	90000000000	0.002767086	249037760.99	270719498	271604216
15	47	1296	0.025502305	33.05	49	52
39	167	10368	0.015376673	163.35	204	220
103	563	82944	0.010290305	853.52	1064	1074
1001	7927	8957952	0.005151519	46147.06	52920	53407
3249	30047	95551488	0.003910170	373622.56	419548	422982
3658	34253	120932352	0.003811794	460969.22	517209	520922
5187	50581	241864704	0.003543114	856954.18	957882	963494

参考文献

[1] (加)Guy,R.K.著，张明尧译，数论中未解决的问题（第二版）[M]，北京，科学出版社，2004 年 137-139;
30-32
[2] 王元， 哥德巴赫猜想研究[C]，哈尔滨： 黑龙江教育出版社， 1987 年 11 月。78-83；306-347
[3] 许作铭,罗贵文,素数分布的三组递推公式及其应用[J],沈阳师范大学学报（自然科学版）2006 第 4 期
[4] 许作铭,计算素数个数的一个新公式,科技创新与和谐社会建设，辽宁科学技术出版社 2007 年 675-680
[5] 潘承洞,潘承彪, 初等数论[M] 第二版,北京：北京大学出版社，2003 年 1 月.97-148；370-379
[6] 许作铭,闫俐,罗贵文,估算 $D(x)$ 的一个显示公式[J],重庆工学院学报（自科版）2007 第 12 期 72-75
[7] 潘承洞，潘承彪，素数定理的初等证明，上海：科学技术出版社，1998 年 2 月。35-37
[8] 高等数学,同济大学数学教研室主编[M],北京：高等教育出版社，1996 年 12 月。64-71
[9] 欧阳光中,姚允龙,数学分析[M],上海：复旦大学出版社,1991 年 10 月。92-97
[10]（加）P.Ribenboim 著,孙淑玲,冯克勤译,博大精深的素数[M],北京：科学出版社 2007 年 1 月 199-204
[11] 潘承洞，潘承彪， 解析数论基础[M]，北京：科学出版社， 1997 年 8 月。368-375;675-676
[12] U.Dudley，基础数论[M]， 上海：上海科学技术出版社， 1986 年 9 月。30-47
[13] 华罗庚， 数论导引，北京： 科学出版社， 1979 年。86-88

An elementary proof for three sets recurrence formula of prime number distribution

Xu Zuo-ming[1], Yan Li[2], Luo Gui-wen[1]
1. College of Mathematics，Liaoning University，Shenyang , PRC, 110036 ,China
2. School of information, Renmin University of China, Beijing, PRC,100872, China

Abstract: In the research of prime number distribution, the author presented an elementary proof for three sets recurrence formula of $\pi(x)$、$\pi_2(x)$ and $D(x)$,by using a new sieve method (P# sieve method), the guidelines of there are limits and nature of the equivalent. As well as two formulas for estimate primes gap, Twin primes Conjecture, Goldbach conjecture and so on are one of the inference.

Key Words: Prime number distribution；Sieve method；Step coefficient；Twin primes conjecture； Goldbach conjecture.

CLC number: O156.4 0156.4；MSC（2000）11N05 11P32 ；**Document Code:** A

作者简介：许作铭（1953-），男，辽宁普兰店人。副教授，从事素数分布研究。