哥德巴赫猜想的初等证明

罗贵文[1]　　许作铭[2]

1. 辽宁省轻工业科学研究院　沈阳 110036

2. 辽宁大学数学学院　沈阳 110036

摘　要：本文利用改进的埃塔筛法，研究了多次取整算法与哥德巴赫素数表示法个数及其平均值之间的关系，找到了一种计算哥德巴赫素数表示法个数的方法。

关键词：Goldbach 素数；台阶系数；筛法；哥德巴赫猜想。

中图分类号：O156.4　MR（2000）**主题分类号**：　11P32　**文献标识码**：A

1. 引言

熟知的哥德巴赫猜想是说，每一个偶数可以分成两个素数之和。自从 1920 年以来，哥德巴赫猜想的研究有了巨大的进展，特别是 1937 年.麦.维诺拉朵夫证明了每一个大奇数都是三个素数之和[1] 。1966 年我国数学家陈景润用筛法证明了“1+2”定理，也就是存在一个正常数 C_X，使得每一个大偶数都可以表示成“一个素数与另一个素因子不超过 2 个的乘积之和”[1] 。

$$P_x(1.2) \ge 0.67\frac{C_x x}{(\log x)^2}，\text{其中 } C_x = \prod_{\substack{p>2\\ p|x}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \qquad (1\text{-}1)$$

Hardy 和 Littlewood 猜想是说：偶数表为二素数之和的表法数[2]渐进地由下列公式给出：

$$N_2(n) \approx \frac{cn}{(\ln n)^2}\prod_{\substack{p\ge 3\\ p|n}}\frac{p-1}{p-2}, \qquad \text{其中：C=0.6601618158…} \qquad (1\text{-}2)$$

长期以来，作者通过对一千亿以内的偶数在 113541 个台阶或区间的变化，找到哥德巴赫素数表示法个数的变化规律，证明了任何大偶数都可以表示为二个素数之和。

2. 台阶的划分与台阶筛法

2.1 台阶的划分与台阶素数 *P(xe)*

令 $f(x_k e,) = \prod_{p\le p_k}\frac{p-1}{p}$　　$p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$

$$x = \left[e^{1/f(x_k e,)}\right] \qquad (2\text{-}1)$$

作者简介：罗贵文，男，辽宁省彰武县人，1964 年 8 月毕业于沈阳轻工业学院（现大连工业大学）辽宁省轻工业科学研究院高级工程师，现已退休。

当$k=1$　$f(x_1e,)=\dfrac{p_1-1}{p_1}=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$　　$x=[e^2]=[7.38906]=7$ [3]

定义 1 将 7 称为第一个台阶 尾数，用 b_1表示，b_1=7,将 1 称为第一台阶首数，用 a_1表示，a_1=1。将 1-7 称为第 1 个台阶，用 T_1表示。该台阶中任意一个数用x_1表示将 P_1=2 称为第 1 个台阶的台阶素数。用 $p(xe,)$或 p（x_1e）表示。$P(xe)=P_1=2$

当 k=2　$f(x_2e,)=\dfrac{2-1}{2}\times\dfrac{3-1}{3}=\dfrac{1}{3}$　　$x=[e^3]=[20.08554]=20$

显然，$p(x_2e,)=p_2$=3 称为第 2 台阶的台阶素数，a_2=7+1=8　b_2=20　8-20$\in T_2$,用 $p(x_2e,-1)$表示前一个台阶的台阶素数，$p(x_2e,-1)=p_1=2$，用 $p(x_2e,1)$表示后面一个台阶的台阶素数 $p(x_2e,1)=p_3=5$。把 $p(x_2e,)$或 $p(xe,)$称这 T_2的台阶素数。

显然，当 $f(x_ne,)=\dfrac{2-1}{2}\times\dfrac{3-1}{3}\times\dfrac{5-1}{5}\times\cdots\times\dfrac{p_n-1}{p_n}$时，$x=[e^{1/f(xe,)}]$为 T_n的台阶尾数 b_n，$x+1$为 T_{n+1}的台阶首数 a_{n+1}，P_n为 T_n的台阶素数，写成 $p(xe,)$或 P_n。T_n台阶中任意一个数写成 x_n，T_n的台阶系数为 $f(xe,)=\prod_{p\le p(xe,)}\dfrac{p-1}{p}$　　（2-2）

这样就将正整数分成无限个由有限数字组成的台阶，就将正整数和素数联系起来了。在每个台阶中 $p(xe,)$是不变的，$f(xe,)$也是不变的。x_n则由 a_n变化到 b_n。在不同的台阶中，随着 X 的增加，台阶也在增加，显然 $p_{k+1}\succ p_k$，　$f_{k+1}\succ f_k$。[4]

2.2 $p(xe,)$与 $p(\sqrt{x},)$ 的关系

定义 2　令 $p(\sqrt{x},)$ 或 p_m 为小于并最接近等于 $\sqrt{x}$ 的素数。大于这一素数的下一个素数用 $p(\sqrt{x},1)$ 表示，小于这一素数前面的一个素数用 $p(\sqrt{x},-1)$ 表示。把 $p(\sqrt{x},)$ 称为方根素数。

$$p(\sqrt{x},)\le\sqrt{x}<p(\sqrt{x},1)\qquad（2\text{-}3）$$

台阶中任意一个数 x_n，当 x 较小时，$p(xe,)\geqslant p(\sqrt{x},)$ 在第七台阶以后

$$p(xe,)\succ p(xe,-1)\ge p(\sqrt{x},)\qquad（2\text{-}4）$$

随着 x 的增加，$p(xe,)$和 $p(\sqrt{x},)$ 的差值更大。

2.3 台阶筛法 2 与平均值

根据定义 1，将偶数 x 乘以 2，3，5，7……$p(xe,)$其数值达到 $x\prod\limits_{p\le p(xe,)} p$。对于每个 $\prod\limits_{p\le p(xe,)} p$ 区间，首先将 2，3，5，7……$p(xe,)$及其合数筛去。再将以这些素数为模与 x 同余的数全部筛去。在每个 $\prod\limits_{p\le p(xe,)} p$ 区间中剩余的数字个数为

$$\frac{1}{2}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe)}}(p-2)$$

x 个 $\prod\limits_{p\le p(xe,)} p$ 剩余数字的个数为

$$\frac{x}{2}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe)}}(p-2)$$

每个 x 区间数字个数并不相同，x 个 Πp 区间也可看成 Πp 个 x 区间，因而个每个 x 区间数字个数的平均值为

$$\frac{x}{2}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe)}}\frac{p-2}{p} \tag{2-5}$$

在每个 Πp 区间的这些数字，分别以 $\frac{x}{2}$ 和 $\frac{1}{2}(\Pi p+x)$ 为对称轴左右相对称分布，并命

$$xg(xe,)=x\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(xe,)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe)}}\frac{p-2}{p}=\quad xg_{\mathrm{n}} \tag{2-6}$$

同样当逐次扩大对比筛分到 $p(\sqrt{x},)=p_{\mathrm{m}}$ 时，每个 x 区间数字组数平均值为

$$xg(\sqrt{x},)=x\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p|x\\ p\le p(\sqrt{x},)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(\sqrt{x},)}}\frac{p-2}{p}=xg_{\mathrm{m}} \tag{2-7}$$

定义 3 我们将上述筛法称为台阶筛法 2，将构成偶数为二个素数之和的素数组数称为哥德巴赫素数表示法个数，用 $D(x)$表示，$xg(xe,)$称为哥德巴赫素数表示法个数的诸 x 区间数字个数平均值，简称平均值。将 $xg\sqrt{x}$ 称为扩大对比筛分到 $p(\sqrt{x})$时的平均值 。

3. 哥德巴赫素数表示法个数与多次取整算法

将 $xg(xe,)$展开，并每进行一次运算后即取整

$$\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\times\frac{1}{p_1}\right]-\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_2}\right]+\left[\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_2}\right]\times\frac{1}{p_1}\right]-\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_3}\right]+\left[\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_3}\right]\times\frac{1}{p_1}\right]+\left[\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_3}\right]\times\frac{c}{p_2}\right]$$
$$-\left[\left[\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_3}\right]\times\frac{c}{p_2}\right]\times\frac{1}{p_1}\right]-\cdots\cdots-\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p(xe_i)}\right]+\cdots\cdots$$

在这里若 $P1x$ 则 C=1 否则 C=2

设 $$[[xg_k]]=\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_k}\right]-\left[\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_k}\right]\times\frac{1}{p_1}\right]-\left[\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_k}\right]\times\frac{c}{p_2}\right]+\left[\left[\left[\frac{x}{2}\times\frac{c}{p_k}\right]\times\frac{c}{p_2}\right]\times\frac{1}{p_1}\right]-\cdots\cdots$$

$xg(xe_i)$ 的展开式的多次取整算法为：$\frac{x}{2}-\sum_{k=1}^{n}[[xg_k]]$

同样，$xg(\sqrt{x})$ 的展开式的多次取整算法为：$\frac{x}{2}-\sum_{k=1}^{m}[[xg_k]]$

定义 4 命逐次扩大对比筛分到 P（$\sqrt{x}.$）时，位于 $\frac{x}{2}$ 前面的数字个数为 $\sum^{m}D(\sqrt{x}.)$,这里不包括被筛去素数，如果 1 没被筛去，则包括 1，同样当逐次扩大对比筛分到 $p(xe)$ 时位于 $\frac{x}{2}$ 前面的数字个数为 $\sum^{n}D(xe_i)$,这里以 150 为例

$$[[xg_4]]=\left[\frac{150}{2}\times\frac{2}{7}\right]-\left[\left[\frac{150}{2}\times\frac{2}{7}\right]\times\frac{1}{2}\right]-\left[\left[\frac{150}{2}\times\frac{2}{7}\right]\times\frac{1}{3}\right]+\left[\left[\left[\frac{150}{2}\times\frac{2}{7}\right]\times\frac{1}{3}\right]\times\frac{1}{2}\right]-\left[\left[\frac{150}{2}\times\frac{2}{7}\right]\times\frac{1}{5}\right]$$
$$+\left[\left[\left[\frac{150}{2}\times\frac{2}{7}\right]\times\frac{1}{5}\right]\times\frac{1}{2}\right]+\left[\left[\left[\frac{150}{2}\times\frac{2}{7}\right]\times\frac{1}{5}\right]\times\frac{1}{3}\right]-\left[\left[\left[\left[\frac{150}{2}\times\frac{2}{7}\right]\times\frac{1}{5}\right]\times\frac{1}{3}\right]\times\frac{1}{2}\right]$$
$$=21-10-7+3-4+2+1-0=6$$

$\left[\frac{150}{2}\times\frac{2}{7}\right]=21$ 将 21 及前面的数字筛去 2.3.5 及其合数后余下的数字为 1.7.11.13.17.19 共计 6 个数，这 6 个数相当于 7.49.77.91.119.133 即为 150 之前 7 及 7 的合数。

在这里 7 不能除以 150，所以要将以 7 为模与 x 同余的数也要全部筛去。

150≡3（mod7）

这些以 7 为摸与 x 同余的数字分别是

143.101.73.59.31.17

这些数字在筛去 2.3.5 及其合数时，没有被筛去，那么位于 75 之前被筛去的数字为

7.17.31.49.59.73

这里正好是 6 个数字，这时位于 75 之前还有多少个数

75-37-25+12-15+7+5-2-6=14 个数

因为 150 的 $p(\sqrt{x},)$=11 所以还要将 11 及其合数和以 11 为摸与 x 同合的数字全部筛去

$$[[xg_5]]=13-6-4+2-2+1-3+1+1=3$$

这就是 13 和其前面的数字筛去 2.3.5.7 及其合数后余下的数字，它们分别为 1.11.13 相当于 11.121.143.与这三个数字相对应的数为 139.29.7 位于 75 之前的数字为 7.11.29，这里 7 在筛去 7 及其合数时和以 7 为模与 x 同余数字时，已被筛去，也就是说这种多次取整算法，存在着重筛现象，不能准确计算出哥德巴赫素数表示法个数。

命 $\sum_{n=1}^{n} w_k(x) = w_1(x)+w_2(x)+w_3(x)+\cdots\cdots w_k(x)$ 即为每次重筛的数字个数。

$$\sum^{m} D(\sqrt{x},) = \frac{x}{2} - \sum_{k=1}^{m} [[xg_k]] + \sum_{k=1}^{m} w_k(x)$$

$$\frac{x}{2} - \sum_{k=1}^{m} [[xg_k]] = 14-3=11 \qquad w_5=1 \qquad \sum_{k=1}^{m} w_k(x)=1$$

$$\sum^{m} D(\sqrt{x},) = 11+1=12$$

将其继续扩大对比筛分到 $P(xe,)$=13=P_6=P_n

$$[[xg_k]]=11-5-3+1-2+1-3+1+1-2+1=1$$

$$\frac{x}{2} - \sum_{k=1}^{n} [[xg_k]] = 10 \qquad \sum_{k=1}^{n} w_k(x,)=1$$

$$\sum^{n} D(xe,) = \frac{x}{2} - \sum_{k=1}^{n} [[xg_k]] + \sum_{k=1}^{n} w_k(x) = 10+1=11$$

显然 $$D(x) \geq \sum^{n} D(xe,) - 1 \qquad \text{(3-1)}$$

4. $\sum^{n} D(xe,)$ 与平均值 $xg(xe,)$ 的关系

设第 K 项为 $d_k(x) = xg_{k-1} \times \frac{c}{p_k} - ([[xg_k]] + w_k(x))$

则 $\sum_{k=1}^{m} d_k(x) = \frac{x}{2} - \sum_{k=1}^{m} [[xg_k]] + \sum_{n=1}^{m} w_k(x) - xg(\sqrt{x},) = \sum^{\mathrm{m}} D(\sqrt{x},) - xg(\sqrt{x},)$

当对 x 逐次扩大对比筛分到 $p_m = p(\sqrt{x})$ 时，位于 $\frac{x}{2}$ 之前已全部是素数，（如果 1 没有被筛去除外）在 22 台阶尾数 3087 之后，当继续扩大对比筛分到 $p(\sqrt{x},1)$ 时，

$\sum^{m} D(\sqrt{x},)$ 最多只能去掉一个数，而 $xg(\sqrt{x},)\times\frac{c}{p(\sqrt{x},1)}\geq 1$

$$\therefore \qquad \sum_{k=1}^{n} d_k(x) \geqslant \sum_{k=1}^{m} d_k(x) \qquad (4\text{-}1)$$

命 x_1 的 $P(xe,1)=P_s$ $\quad x_2=x_1P_s$

随将 x_1 扩大 p_s 倍 $\qquad \sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2) > \sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1) \succ 0 \qquad (4\text{-}2)$

$\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2)$ 是由 m_2 项组成的，其第 S 项为：

$$d_s(x_2) = x_2 g(x_1 e,)\times\frac{1}{p_s} - \left(\left[\frac{x_2}{2}\times\frac{1}{p_s}\right] - \left[\left[\frac{x_2}{2}\times\frac{1}{p_s}\right]\times\frac{1}{p_1}\right] - \left[\left[\frac{x_2}{2}\times\frac{1}{p_s}\right]\times\frac{c}{p_2}\right]\right.$$

$$\left. + \left[\left[\left[\frac{x_2}{2}\times\frac{1}{p_s}\right]\times\frac{c}{p_2}\right]\times\frac{1}{p_1}\right] - \cdots\cdots + w_s(x_2)\right) = x_1 g(x_1 e,) - \left(\frac{x_1}{2} - \left[\frac{x_1}{2}\times\frac{1}{p_1}\right] - \right.$$

$$\left.\left[\frac{x_1}{2}\times\frac{c}{p_2}\right] + \left[\left[\frac{x_1}{2}\times\frac{c}{p_2}\right]\times\frac{1}{p_1}\right] - \cdots\cdots + w_s(x_2)\right)$$

显然这里 $\quad w_s(x_2) = \sum_{k=1}^{n_1} w_k(x_1)$

$$\therefore d_s(x_2) = -\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1) \qquad (4\text{-}3)$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1) > 0 \text{ 则 } d_s(x_2) \prec 0$$

由于 $P_s|x_2$ 所以在筛去 P_s 及其合数和以 P_s 为摸与 x 同余的数字时，只是筛去 P_s 及其合数。造成 $d_s(x_2)$ 不是 $\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2)$ 的 m_2 项之中的最小值而仅仅小于 $\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2)$ 的 m_2 项中最小值的一半。对 $\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2)$ 来讲：

定义 6: 命 $p_{i-1} = p(\sqrt[3]{x},-1) \leq \sqrt[3]{x} < p(\sqrt[3]{x},) = p_i$

$\because d_1(x_2)=0$ 或 $\frac{1}{2}$ 在 10000000 以后 $d_i(x_2)>0$ $d_{m_2}(x_2)>0$

$$\therefore d_s(x_2)<\frac{\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2)}{m_2} \qquad (4\text{-}4)$$

例如 x_1=1470, $p(\sqrt{x_1},)=37=p_{12}=p_{m_1}$ $P(x_1e,)$=53=P_{16}= p_{n_1} P_s=$P(x_1e,1)$=59

$D(x_1)$=73 $\sum^{m} D(\sqrt{x_1},)=73-6=67$ $\sum^{n} D(x_1e,)=67-3=64$

$$\sum_{k=1}^{m_1} d_k(x_1)=67-xg(\sqrt{x_1},)=67-1470\times 0.048698817=-2.0726224$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1)=64-1470\times 0.039263936=6.28202878$$

$D(x_1)=73>64=\sum D(x_1e,)$ $x_2=x_1\cdot P_s=1470\times 59=86730$

$p(\sqrt{x_2},)=293=p_{62}=p_{m_2}$ $p(x_2e,)=577=p_{106}=p_{n_2}$

$D(x_2)=1756$ $\sum^{m_2} D(\sqrt{x_2})=1739$ $\sum^{n_2} D(x_2e,)=1720$

$$\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2)=1739-x_2g(\sqrt{x_2},)=1739-1790.845033=-51.845033342$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2)=1720-x_2g(x_2e,)=1720-1453.419556=266.5804442$$

① $D(x_2)=1756\succ 1720=\sum^{n_2} D(x_2e)$

② $\sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2)=266.5804442\succ -51.84503342=\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2)$

③ $d_s(x_2)=-\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1)=-6.282602878$

$$\frac{\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2,)}{m_2}=\frac{-51.84503342}{62}=-0.836210216>d_s(x_2)$$

④ 若将 86730× $p(\sqrt{x},1)$=86730×307=26626110 则

d_i（26626110）= $-\sum_{k=1}^{m_2} d_k(86730)$=51.84503342

若将 86730×$P(xe,1)$=86730×587=50910510 则 d_i（26626110）>0[5]

⑤ $\left[\frac{86730}{293}\right]$=296　对于 296 来讲,当将 p_{61} 及前面的素数及其合数和以这些素数为模与 x 同余的素数全部筛去后，只有 293，相当于 293×293=85849，也就是在筛去 293 及其合数和以 293 为模与 x 同余的数字时，在 $\frac{x}{2}$ 之前只能筛去 86730—85849=881 这样一个数。

$\therefore d_{m_2}(x_2) = 86730 \times 0.020648507 \times \frac{293}{291} \times \frac{1}{293} - 1 = 6.1541 - 1 = 5.1541 > 0$

⑥ $\sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2) = 266.5804442 \succ 6.28202878 = \sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1)$

$\because p_s = p(x_1 e,1) < \frac{x_1}{2}$　$x_2^{\frac{1}{2}} > p_s > x_2^{\frac{1}{3}}$　$p(\sqrt{x_2},) < x_1$　$p(x_2 e,) < x_1$ 也就是 x_1 到 x_2 的哥德巴赫素数表示法个数，是由 x_1 前面的素数决定的，如果 x_1 的素数较多，处于上限，那么 $\sum_{k=1}^{m_1} d_k(x_1)$，$\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1)$ 也将处于上限，那么相对于 x_2 来讲，由于 $d_s(x_2) = -\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1)$ 必将更小，因而使得 $\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2)$、$\sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2)$ 处于下限。哥德巴赫素数表示法个数就是这样上下限交替变化的。

无论 x_1 是处于上限，还是下限，始终都能保证 $\sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2) > \sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1)$

当 x_1 达到 3087 以后,因为 $\sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2)$ 与 $\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1)$ 的差值远大于 x_2 所在台阶具有的哥德巴赫素数表示法个数。设 x_2' 为 x_2 所在台阶的，与 x_1 具有 $\leq p(xe,)$ 素因子相同的任意一个数。则：

$$0 < \sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1) < \sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2') \tag{4-5}$$

再来看另一个数　x_2'=420×210=88200

$86730 \in T_n = T_{106}$　$p(xe,) = 577$,该台阶首数为 a_n=86555,b_n=88280 在该台阶中总可以

找到这样一个数 x_2'，使其 $\le p(xe_,)$ 的素因子与 x_1 完全相同，

x_2'的 $p(\sqrt{x_2'},) = 293 = p_{62} = p_{m_2}$ $D(x_2') = 1758$

$\sum^{m_2} D(\sqrt{x_2'},) = 1758 - 18 = 1740$ $\sum^{n_2} D(x_2' e,) = 1740 - 19 = 1721$

$$\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2') = \sum^{m_2} D(\sqrt{x_2'},) - xg(\sqrt{x_2'},) = 1740 - 1770.609496 = -30.60949632$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2') = \sum^{n_2} D(x_2' e,) - xg(x_2' e,) = 1721 - 1436.996736 = 284.003264$$

显然 $0 < \sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1) < \sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2')$

根据(4--5)式,只要验证 x_1 到 x_2 之间的所有数的 $\sum_{k=1}^{n} d_k(x) > 0$,就可推出

$$\sum_{k=1}^{n} d_k(x) > 0 \qquad （4-6）$$

恒成立。这就是哥德巴赫素数表示法个数分布的结论，这一结论可用反证法加以证明。

证明:假定，当 x 达到相当大以后，$\sum_{k=1}^{m} d_k(x) < 0$，$\sum_{k=1}^{n} d_k(x) < 0$

令 x_1 为 x 达到相当大时，$\sum_{k=1}^{m_1} d_k(x_1) < 0$，$\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1) < 0$

将 x_1 扩大 $P_S=P(x_1e,1)$倍后，得 $x_2=x_1.P_s$

由于 $d_s(x_2) = -\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1) > 0$

且 $\dfrac{\sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2,)}{m_2} > d_s(x_2) > 0$ $\therefore \sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2,) > 0$

根据（4-1）式 $\sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2,) \ge \sum_{k=1}^{m_2} d_k(x_2,) > 0$

这与假定的当达到相当大以后，$\sum_{k=1}^{m} d_k(x) < 0$，$\sum_{k=1}^{n} d_k(x) < 0$ 相矛盾，再根据(4-5)式

$$0<\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1)<\sum_{k=1}^{n_2} d_k(x_2') \qquad \therefore \sum_{k=1}^{n} d_k(x)>0$$

恒成立。尽管存在一定的波动性，$\sum_{k=1}^{n} d_k(x)$ 总的来讲会越来越大。当达到 3087 以后 $\sum D(xe_i)-1>0$，随着 x_1 的 $\sum_{k=1}^{n_1} d_k(x_1)$ 逐渐增大, $d_s(x_2)$ 的逐渐减小。当达到 50000 以后使得 $\sum_{k=1}^{m} d_k(x)<0$，当达到 10000000 以后 $d_i(x)>0$。

5. 结论

根据(3 − 1),(4 − 6)： $D(x) \ge \sum^{n} D(xe_i)-1$ ，$\sum_{k=1}^{n} d_k(x)>0, \Rightarrow \sum^{n} D(xe_i) \ge xg(xe_i)$

$$D(x) \ge xg(xe_i)-1 = x\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\mid x\\ p\le p(xe_i)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i)}}\frac{p-2}{p}-1 \qquad (5-1)$$

当达到$b_{29}=5630$之后 $\quad D(x)\ge xg(xe_i-1)>xg(xe_i)$

$$\because \quad f(xe_i-1)>\frac{1}{\log x}\ge f(xe_i)$$

$$\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i-)}}\frac{(p-1)^2}{p^2}>\frac{1}{(\log x)^2}>\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i)}}\frac{(p-1)^2}{p^2}$$

$$D(x)\ge x\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\mid x\\ p\le p(xe_i-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i-1)}}\frac{p-2}{p} \qquad (5-2)$$

$$\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i-1)}}\frac{p-2}{p}=\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i-1)}}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i-1)}}\frac{(p-1)^2}{p^2}$$

$$\therefore D(x)\ge x\prod_{\substack{p>2\\ p\mid x\\ p\le p(xe_i-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i-1)}}(1-\frac{1}{(p-1)^2})\frac{1}{4}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i-1)}}\frac{(p-1)^2}{p^2}$$

$$D(x)\ge x\prod_{\substack{p>2\\ p\mid x\\ p\le p(xe_i-1)}}\frac{p-1}{p-2}\prod_{\substack{p>2\\ p\le p(xe_i-1)}}(1-\frac{1}{(p-1)^2})\cdot\frac{1}{(\log x)^2} \qquad (5-3)$$

令 $C_x = \prod_{\substack{p>2 \\ p|x \\ p\le p(xe,-1)}} \frac{p-1}{p-2} \prod_{\substack{p>2 \\ p\le p(xe,-1)}} (1-\frac{1}{(p-1)^2})$

则 $$D(x) \ge \frac{C_x \cdot x}{(\log x)^2} \qquad (5-4)$$

令 $C = \prod_{\substack{p\ge 3 \\ p\le p(xe,-1)}} (1-\frac{1}{(p-1)^2})$ 在 x 较大时，C=0.6601618158……

则 $$D(x) \ge \frac{cx}{(\ln x)^2} \prod_{\substack{p\ge 3 \\ p|x \\ p\le p(xe,-1)}} \frac{p-1}{p-2} \qquad (5-5)$$

显然,证明了 Hardy 和 little wood 关于哥德巴赫素数表示法个数的猜想。

将（5-4）与陈景润的 1+2 定理相比较，显然有：

$$P_x(1.2) \ge D(x) \ge \frac{C_x x}{(\log x)^2} > 0.67 \frac{C_x x}{(\log x)^2}$$

参考文献

[1](加)Guy,R.K.著,张明尧译.数论中未解决的问题(第二版)[M].北京:科学出版社,2004 年 1 月,137-139.

[2] 王元.哥德巴赫猜想研究[C].哈尔滨: 黑龙江教育出版社,1987 年 11 月,306-347.

[3] 潘承洞,潘承彪.解析数论基础[M].北京:科学出版社, 1997 年 8 月,368-375.

[4] 许作铭,罗贵文.素数分布的三组递推公式及其应用[J].沈阳师范大学学报（自然科学版）,2006 第 4 期,388-391.

[5] 罗贵文,许作铭.素数定理的一个初等证明.http//www.paper.edu.cn,200804—990.

An Elementary proof of the Goldbach conjecture

Luo Gui-wen[1] Xu Zuo-ming[2]

1 Liaoning Linght Industry Research Institute, PRC, 110036

2 College of Mathematics, Liaoning University, Shenyang, PRC, 110036

Abstract: This article uses the improvement the Aite sieve method,studied has taken the entire algorithm and detween the Goldbach prime number method of portrayal integer and the mean value relations many times,found one kind to calculate the Goldbach prime number method of portrayal integer the method.

Key Words: Goldbach prime number; Step coefficient; The sieve method; Goldbach. conjecture

CLC number: 0156.4; MSC (2000) 11P32; **Document Code:** A