

郑 伟,许厚泽,钟 敏等. 基于时空域混合法利用 Kaula 正则化精确和快速解算 GOCE 地球重力场. 地球物理学报, 2011, **54**(1):14~21, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2011.01.003

Zheng W, Xu H T, Zhong M, et al. Accurate and rapid determination of GOCE Earth's gravitational field using time-space-wise-approach associated with Kaula regularization. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2011, **54**(1):14~21, DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2011.01.003

基于时空域混合法利用 Kaula 正则化精确和快速解算 GOCE 地球重力场

郑 伟^{1,2}, 许厚泽¹, 钟 敏¹, 员美娟³, 周旭华⁴

1 中国科学院测量与地球物理研究所动力大地测量学重点实验室, 武汉 430077

2 日本京都大学防灾研究所, 京都 611-0011

3 武汉科技大学应用物理系, 武汉 430081

4 中国科学院上海天文台, 上海 200030

摘 要 为了研究卫星重力梯度技术对中高频地球重力场反演精度的影响, 本文基于时空域混合法, 利用 Kaula 正则化反演了 250 阶 GOCE 地球重力场. 模拟结果表明: 第一, 时空域混合法是精确和快速求解高阶地球重力场的有效方法; 第二, Kaula 正则化是降低正规阵病态性的重要方法; 第三, 基于改进的预处理共轭梯度迭代法可快速求解大型线性方程组, 计算速度较直接最小二乘法至少提高 1000 倍; 第四, 基于卫星轨道误差 1 cm 和卫星重力梯度误差 $3 \times 10^{-12} / s^2$, 在 250 阶处反演累计大地水准面和重力异常的精度分别为 9.295 cm 和 0.204 mGal. 第五, 论证了基于国际 GRACE 和 GOCE 卫星计划反演高精度和高空间分辨率地球重力场的互补性.

关键词 GOCE, 时空域混合法, Kaula 正则化, 卫星重力梯度, 地球重力场

DOI:10.3969/j.issn.0001-5733.2011.01.003

中图分类号 P223

收稿日期 2009-04-20, 2011-01-05 收修定稿

Accurate and rapid determination of GOCE Earth's gravitational field using time-space-wise-approach associated with Kaula regularization

ZHENG Wei^{1,2}, HSU Hou-Tse¹, ZHONG Min¹, YUN Mei-Juan³, ZHOU Xu-Hua⁴

1 Key Laboratory of Dynamic Geodesy, Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430077, China

2 Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Uji, Kyoto 611-0011, Japan

3 Department of Applied Physics, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China

4 Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China

Abstract The GOCE Earth's gravitational field complete up to degree and order 250 is recovered based on the time-space-wise-approach associated with Kaula regularization in order to study the influences of satellite gravity gradiometry on the accuracy of medium-high frequency Earth's

基金项目 中国科学院知识创新工程青年人才重要方向项目(KZCX2-EW-QN114), 国家自然科学基金(41004006), 湖北省自然科学基金(2010CDB05301), 中国测绘科学研究院地理空间信息工程国家测绘局重点实验室开放基金(201031), 中国科学院动力大地测量学重点实验室开放基金(L09-14), 中国科学院测量与地球物理研究所知识创新工程领域前沿项目和湖北省耐火材料与高温陶瓷重点实验室-省部共建国家重点实验室培育基地开放基金(G201009)联合资助.

作者简介 郑 伟, 男, 1977 年生, 理学博士, 副研究员, 硕士生导师, 日本京都大学博士后, 日本外籍特别研究员, 主要从事基于卫星重力测量反演地球、月球和火星重力场的理论和方法等方面研究. E-mail: wzheng@asch.whigg.ac.cn

gravitational field recovery. The simulated results show: Firstly, the time-space-wise-approach is an effective way to accurately and rapidly determine the high-degree Earth's gravitational field; Secondly, the Kaula regularization is one of the key processes to reduce ill condition of normal matrix; Thirdly, the large-scale linear system of equations is solved quickly using the improved pre-conditioned conjugate-gradient iterative approach, and the computing speed can be improved at least 1000 times as compared to the direct least-squares approach; Fourthly, at the degree 250, cumulative geoid height and gravity anomaly errors are 9.295 cm and 0.204 mGal with orbital error 1 cm and gravity gradient error $3 \times 10^{-12}/s^2$, respectively. Finally, the complementarity of high-accuracy and high-resolution Earth's gravitational field recovery between international GRACE and GOCE missions is demonstrated.

Keywords GOCE, time-space-wise-approach, Kaula regularization, Satellite gravity gradiometry, Earth's gravitational field

1 引言

地球重力场及其时变反映地球表层及内部物质的空间分布、运动和变化,同时决定着大地水准面的起伏和变化,因此确定地球重力场的精细结构及其时变不仅是大地测量学、地震学、海洋学、空间科学、国防建设等的需求,同时也将为全人类寻求资源、保护环境和预测灾害提供重要的信息资源^[1~3].

GOCE(Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer)重力梯度卫星由欧洲空间局(ESA)独立研制,已于2009年3月17日发射升空,主要用于中短波地球重力场的精密测量. GOCE采用近圆(轨道离心率0.001)、近极地(轨道倾角 96.5°)和太阳同步轨道,经过20个月的飞行计划,轨道高度由250 km降为240 km. GOCE采用卫星跟踪卫星高低(SST-HL)和卫星重力梯度(SGG)模式的结合,除基于高轨道的GPS/GLONASS卫星对低轨道的GOCE卫星进行精密跟踪定位(1 cm)外,利用定位于质心处的重力梯度仪($3 \times 10^{-12}/s^2$)高精度测量卫星轨道高度处引力位的二阶导数,同时基于无阻尼离子微推进器补偿卫星受到的非保守力^[4]. 早在20世纪80年代,国外便开始制定国际卫星重力梯度计划. Klees等^[5]、Visser等^[6]、Pail等^[7]在基于卫星重力梯度反演地球重力场方面开展了广泛的研究. 由于地球重力场信号随卫星轨道高度的增加而急剧衰减 $(R_e/r)^l$,基于分析卫星轨道运动仅适合于精密确定中长波地球重力场,而卫星重力梯度技术可直接测定地球引力位的二次微分,进而在一定程度上抑制了地球重力场信号的衰减效应,因

此卫星重力梯度测量有利于高精度感测中短波地球重力场信号.

在利用卫星重力测量数据反演地球重力场的众多方法中,按引力位系数解算方法的差异可分为空域法和时域法. 空域法^[8~11]的优点是因网格点数固定从而方程维数一定,且可利用快速傅立叶(FFT)方法进行批量处理,因此极大地降低了计算量;缺点是在进行网格化处理中作了近似处理,且不能处理色噪声. 时域法^[12~34]的优点是直接对卫星观测数据进行处理,不需作任何近似,求解精度较高且能有效处理色噪声;缺点是随着卫星观测数据的增多,观测方程数量剧增,极大地增加了计算量. 为了满足下一代卫星重力测量计划中精密和快速解算高阶地球重力场的要求,国际大地测量学界将空域法和时域法的优点进行有效结合,正致力于提出时空域混合法的新思想. 文献^[35]基于一阶Tikhonov正则化解算了GOCE地球重力场,提出采用Kaula正则化降低正规阵病态性不可行(发散). 本文紧跟国际卫星重力测量的热点和动态,分别利用Kaula正则化和一阶Tikhonov正则化解算了GOCE地球重力场,结果表明:基于Kaula正则化降低正规阵病态性是可行的(收敛). 因此,本文基于时空域混合法利用Kaula正则化和改进的预处理共轭梯度法精确和快速反演了250阶GOCE地球重力场.

2 方法

2.1 卫星重力梯度观测方程的建立

在地固系中,地球引力位按球谐函数展开的表达式为

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R_e} \sum_{l=0}^L \left(\frac{R_e}{r}\right)^{l+1} \times \sum_{m=0}^l (\bar{C}_{lm} \cos m\lambda + \bar{S}_{lm} \sin m\lambda) \bar{P}_{lm}(\cos\theta), \quad (1)$$

其中, GM 表示地球质量 M 和万有引力常数 G 之积, R_e 表示地球的平均半径, L 表示球函数展开的最大阶数; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 表示卫星的地心半径, x, y, z 分别表示卫星位置矢量 \mathbf{r} 的三个分量, θ 和 λ 表示地心余纬度和经度; $\bar{P}_{lm}(\cos\theta)$ 表示规格化的 Legendre 函数, l 表示阶数, m 表示次数; \bar{C}_{lm} 和 \bar{S}_{lm} 表示待求的规格化引力位系数.

地球引力位 $V(r, \theta, \lambda)$ 分别对 x, y, z 的二阶导数表示如下

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中, 地球引力位二阶导数是对称张量, 同时在真空情况下满足 Laplace 方程表现为无迹性, $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$, 因此在 9 个重力梯度分量中有 5 个是独立的.

在地心惯性系中, 卫星观测方程建立如下

$$\mathbf{y}_{g \times 1} = \mathbf{\Gamma}_{g \times n} \mathbf{x}_{n \times 1}, \quad (3)$$

其中, $\mathbf{y}_{g \times 1}$ 表示卫星轨道处的重力梯度观测值, g 表示重力梯度观测值的个数; $\mathbf{\Gamma}_{g \times n}$ 表示 g 行 n 列的设计矩阵, $n = L^2 + 2L - 3$; $\mathbf{x}_{n \times 1}$ 表示 $n \times 1$ 列的待求引力位系数矩阵. 地固系和地心系的转换关系请见参考文献[36].

如图 1 所示, 本文基于时空域混合法利用卫星重力梯度技术反演 250 阶 GOCE 地球重力场的主要思想如下: 第一, 以地心为球心选择 4 个等间距且

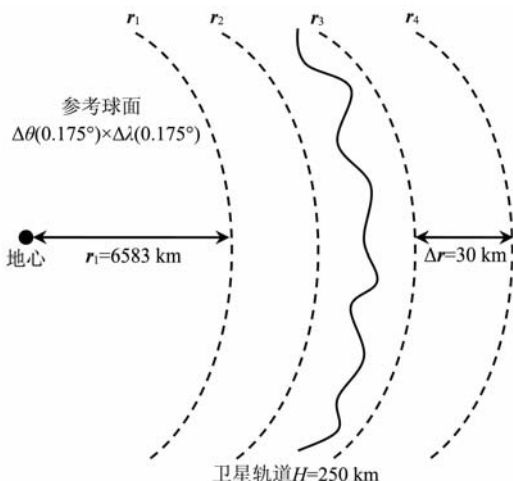


图 1 基于时空域混合法解算地球重力场的原理图

Fig. 1 Schematic diagram of Earth's gravitational field determination using time-space-wise approach

规则的参考球面 r_1, r_2, r_3 和 r_4 , GOCE 卫星轨道位于 r_2 和 r_3 之间, 同时在每个参考球面上按照经纬度进行均匀网格划分; 第二, 在每个参考球面上利用 FFT 批量计算出卫星重力梯度值, 并基于三维插值技术得到卫星轨道处的卫星重力梯度值(空域法); 第三, 在卫星轨道处求解卫星观测方程(3), 利用最小二乘法拟合出地球引力位系数(时域法).

2.2 卫星重力梯度观测值的模拟

在求解大型线性方程组(3)时, $\mathbf{\Gamma}_{g \times n}$ 的求解是核心环节. 假设采用 30 d(d 表示天数)的 GOCE 卫星全张量重力梯度观测值, 采样间隔设计为 5 s, 当反演 $L=250$ 阶地球重力场时, $\mathbf{\Gamma}_{g \times n}$ 为 $9 \times 30 \times 24 \times 3600/5 = 4665600$ 行和 $L^2 = 62500$ 列的长方设计矩阵, 因此对 $\mathbf{\Gamma}_{g \times n}$ 的求解和存储都较困难. 为了高精度和快速地解算 $\mathbf{\Gamma}_{g \times n}$, 本文将 $\mathbf{\Gamma}_{g \times n}$ 分解为网格划分矩阵 $\mathbf{\Gamma}_G$, 三维插值矩阵 $\mathbf{\Gamma}_I$, 坐标转换矩阵 $\mathbf{\Gamma}_R$ 和重力梯度分量选择矩阵 $\mathbf{\Gamma}_S$ 4 个部分进行分步解算^[35]:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{\Gamma}_S \cdot \mathbf{\Gamma}_R \cdot \mathbf{\Gamma}_I \cdot \mathbf{\Gamma}_G) \cdot \mathbf{x}. \quad (4)$$

2.2.1 卫星重力梯度网格划分

卫星重力梯度网格划分的观测方程表示如下:

$$\mathbf{y}_G = \mathbf{\Gamma}_G \cdot \mathbf{x}, \quad (5)$$

其中, \mathbf{x} 表示 EGM2008 地球重力场模型的引力位系数, \mathbf{y}_G 表示在规则参考球面网格点上求得的重力梯度值, $\mathbf{\Gamma}_G$ 表示网格划分矩阵.

由于卫星轨道处观测点的空间位置不规则, 因此直接计算轨道位置上的重力梯度值耗时较大(利用 CPU 为 2.0 GHz, 内存为 1 Gb 的 PC 机解算先验重力场为 250 阶、时间为 30 d 和采样间隔为 5 s 的全张量重力梯度值耗时至少 6 d). 为了克服上述耗时的缺点, 本文具体处理如下: 第一, 以地心为球心选择 4 个等间距且规则的参考球面(距地心最近参考球面的半径为 6583 km, 球面间隔为 30 km), 并在每个球面上按照分辨率 = 经度($360^\circ/2048$) \times 纬度($180^\circ/1024$) 进行均匀网格划分; 第二, 由于 Legendre 函数 $\bar{P}_{lm}(\cos\theta)$ 的计算是耗时较多部分, 因此固定每个规则参考球面上有限的纬度网格划分值 θ (1024 份), 通过有效的递推公式按纬圈快速计算 $\bar{P}_{lm}(\cos\theta)$, 并将计算结果存储以备后面调用; 第三, 固定极径 r 和余纬度 θ , 利用 FFT 按纬圈 θ 计算参考球面上的全张量重力梯度观测值, 这是运算速度加快的主要原因.

2.2.2 卫星重力梯度三维插值

卫星重力梯度三维插值的观测方程表示如下

$$\mathbf{y}_I = \mathbf{\Gamma}_I \cdot \mathbf{y}_G, \quad (6)$$

其中, y_1 表示在卫星轨道处且位于局部指北坐标系(LNF)的全张量重力梯度值, 卫星局部指北系的原点位于卫星的质心, X_{LNF} 轴指向北, Y_{LNF} 轴指向西, Z_{LNF} 轴与 X_{LNF} 、 Y_{LNF} 轴构成右手系(如图 2 所示); Γ_1 表示由 4 个规则参考球面网格点的重力梯度值三维插值到卫星轨道处的转换矩阵^[37].

如图 3 所示, 本文采用的三维插值是用 1 个单元格子的 $4^3 = 64$ 个全张量重力梯度三维插值得到位于第二和第三个参考球面间的卫星轨道上的 1 个重力梯度值. 单元格子的分辨率设计为经度 $(0.175^\circ) \times$ 纬度 $(0.175^\circ) \times$ 径向 (30 km) .

由于卫星重力梯度值需要由 4 个规则参考球面

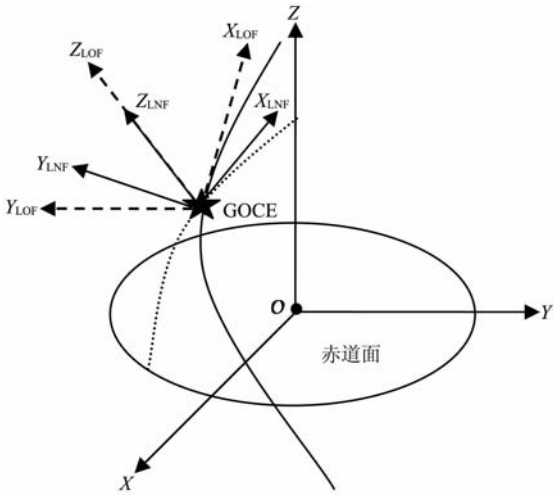


图 2 卫星局部指北系(LNF)和卫星局部轨道系(LOF)示意图

Fig. 2 Local North-stabilized Frame(LNF) and Local Orbit Frame(LOF)

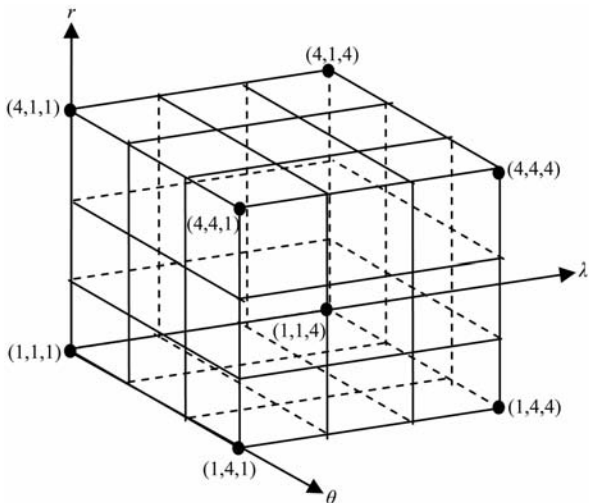


图 3 位于 4 个参考球面的 SGG 三维插值单元格子
Fig. 3 Unit grid of SGG three-dimensional interpolation on the four reference spherical surfaces

插值到卫星轨道处, 因此本文利用 9 阶 Runge-Kutta 线性单步法结合 12 阶 Adams-Cowell 线性多步法数值积分公式模拟了 GOCE 卫星的轨道位置和速度. 轨道数值模拟的参数如表 1 所示, 模拟过程共耗时 8 h.

表 1 GOCE 卫星轨道模拟参数

Table 1 Simulative parameters of GOCE orbit

参 数	指 标
参考模型	EGM2008
轨道高度	250 km
轨道倾角	96.5°
轨道离心率	0.001
模拟时间	30 d
采样间隔	5 s

2.2.3 卫星重力梯度坐标转换

卫星重力梯度坐标转换的观测方程表示如下

$$y_R = \Gamma_R \cdot y_1, \quad (7)$$

其中, y_R 表示位于卫星局部轨道坐标系(LOF)的全张量重力梯度值, 卫星轨道坐标系的原点位于卫星的质心, X_{LOF} 轴指向卫星瞬时速度的方向, Y_{LOF} 轴指向卫星瞬时轨道角动量的方向, Z_{LOF} 轴与 X_{LOF} 、 Y_{LOF} 轴构成右手系(如图 1 所示); Γ_R 表示将重力梯度值由 LNF 转换到 LOF 的转换矩阵.

2.2.4 卫星重力梯度分量选择

卫星重力梯度值分量选择的观测方程表示如下

$$y_s = \Gamma_s \cdot y_R, \quad (8)$$

其中, Γ_s 表示重力梯度分量的选择单位矩阵, y_s 表示位于 LOF 的全张量或几个分量的重力梯度观测值:

$$y_s = \begin{bmatrix} \eta_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xx} \\ V_{yy} \\ V_{zz} \\ V_{yx} \\ V_{xy} \\ V_{yz} \\ V_{zy} \\ V_{zx} \\ V_{xz} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中, 在卫星重力梯度的 9 个分量中, 如果某些分量被选择, 则 $\eta_{ij} = 1$; 反之, $\eta_{ij} = 0 (i, j = x, y, z)$.

2.3 卫星重力梯度观测方程的求解

卫星观测方程(3)是大型线性超定方程组, 因此

没有精确解,只有最小二乘解.在方程两边同乘 $\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{E}^{-1}$ 得

$$\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{\Gamma} \cdot \bar{\mathbf{x}}, \quad (10)$$

其中, $\mathbf{E} = \mathbf{D}(y)$ 表示重力梯度观测值噪声的协方差矩阵, \mathbf{D} 表示方差算子. 本文在模拟的卫星轨道位置和重力梯度观测值中引入了色噪声^[35].

由于随着阶数 l 的增加, $\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma}$ 的病态性急剧增强,进而影响地球重力场反演的精度,因此正则化处理较为关键,主要作用是降低 $\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma}$ 的病态性^[38]. 本文采用了 Kaula 正则化

$$\mathbf{K} = K_0 \mathbf{K}_1, \quad (11)$$

其中, K_0 表示 Kaula 正则化参数,本文基于全张量卫星重力梯度反演 250 阶 GOCE 地球重力场, $K_0 = 2 \times 10^{-10}$; \mathbf{K}_1 表示正则化函数:

$$K_1 = \delta_{ij} l^4(i), \quad (12)$$

其中, δ_{ij} 表示 Kronecker 符号, $l(i)$ 表示第 i 行(列)对应的引力位系数的阶数.

在观测方程(10)中加入 Kaula 正则化后可改写为

$$\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{y} = (\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{K}) \cdot \bar{\mathbf{x}}, \quad (13)$$

令 $\mathbf{G} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{y}$, $\mathbf{N} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{\Gamma} + \mathbf{K}$, 则方程(13)可变为

$$\mathbf{G}_{n \times 1} = \mathbf{N}_{n \times n} \cdot \bar{\mathbf{x}}_{n \times 1}. \quad (14)$$

在方程(14)两边同乘 $\mathbf{P}_{n \times n}^{-1}$ 得

$$\mathbf{P}_{n \times n}^{-1} \mathbf{G}_{n \times 1} = \mathbf{P}_{n \times n}^{-1} \mathbf{N}_{n \times n} \cdot \bar{\mathbf{x}}_{n \times 1}. \quad (15)$$

其中, $\mathbf{P}_{n \times n}$ 表示预处理阵.

$\mathbf{\Gamma}_{g \times n}$ 是一个庞大的长方矩阵,存储需占用大量的内存空间,因此直接存储较难实现,而正规方阵 $\mathbf{N}_{n \times n}$ 虽较 $\mathbf{\Gamma}_{g \times n}$ 缩小了许多,但如果直接存储也会占用大量的内存空间(约占 12 Gb). 如图 4 所示, $\mathbf{N}_{n \times n}$

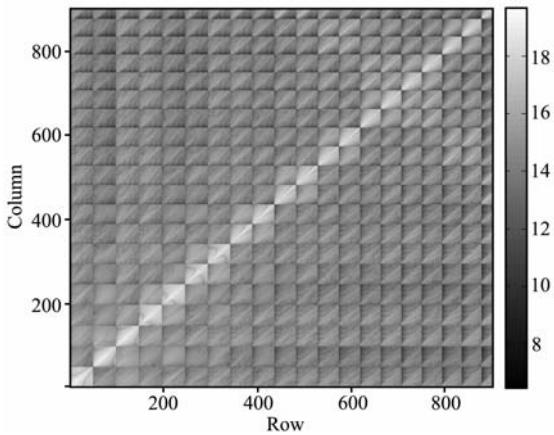


图 4 正规方阵 $\mathbf{N}_{n \times n}$ 的块对角占优特性 ($l=30$)

色标代表矩阵元素数值的大小,色标条采用以 10 为底的对数表示.

Fig. 4 Block-diagonally dominant characteristics of $\mathbf{N}_{n \times n}$ ($l=30$)

The value of matrix elements are represented by color intensity, and values of color bar are denoted by denary logarithm.

是一个块对角占优的方阵,此性质为本文迭代求解的加速提供了有利条件.

预处理共轭梯度迭代法(PCCG)是目前求解大型线性方程组的有效方法之一,主体思想如下:第一,每一步迭代均对待求参量进行修正,直到达到预期精度为止;第二,每一步迭代的方向选择以误差最小为原则;第三,回避最小二乘法的直接矩阵求逆,通过循环迭代求解真值^[39,40]. 利用 PCCG 求解观测方程(15),不需要直接存储 $\mathbf{N}_{n \times n}$,总运算量只需要 900 Mb 的内存空间. PCCG 最关键的部分是 $\mathbf{P}_{n \times n}$ 的选取,标准如下:第一, $\mathbf{P}_{n \times n}^{-1}$ 与 $\mathbf{N}_{n \times n}^{-1}$ 越接近越好,保证了大型线性方程组求解的精度;第二, $\mathbf{P}_{n \times n}^{-1}$ 易于计算,提高了大型线性方程组求解的速度. 本文选取 $\mathbf{N}_{n \times n}$ 的块对角部分作为预处理阵,形成的 $\mathbf{P}_{n \times n}$ 为主对角线上按次数 m 排列且其余部分为 0 的块对角方阵,如此选取不仅保留了 $\mathbf{N}_{n \times n}$ 的主要特征,而且 $\mathbf{P}_{n \times n}^{-1}$ 较 $\mathbf{N}_{n \times n}^{-1}$ 易于计算. 总而言之,适当选取预处理阵可极大地减少 PCCG 求解引力位系数中循环迭代的次数,较直接最小二乘法计算速度至少提高 1000 倍. 本文基于改进的 PCCG^[36] 反演了 250 阶 GOCE 地球重力场,经过 65 步迭代,总计耗时为 46 h.

3 结果

本文首先利用一阶 Tikhonov 正则化反演了 250 阶 GOCE 地球重力场,其与文献[35]的模拟结果符合较好,从而验证了本文整体算法的可靠性. 图 5 表示经过 65 步迭代,基于时空域混合法利用卫星重力梯度分量 ($V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}, V_{xz}$) 结合 Kaula 正

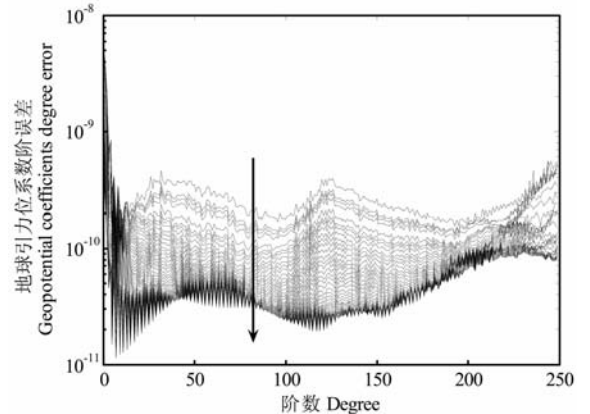


图 5 基于卫星重力梯度分量反演地球引力位系数精度

Fig. 5 Geopotential coefficients degree errors based on the components of SGG tensor

则化反演 250 阶 GOCE 地球引力位系数的精度(由上而下),其中轨道误差为 1 cm,卫星重力梯度误差为 $3 \times 10^{-12} / \text{s}^2$. 在 250 阶处,反演地球引力位系数的精度为 8.402×10^{-11} (第 65 步迭代),在各阶处的统计结果如表 2 所示.

表 2 基于 Kaula 正则化反演 GOCE 地球重力场精度在各阶处的统计结果

Table 2 Statistics of the accuracies of GOCE Earth's gravitational field using Kaula regularization

参 数	误 差				
	50 阶	100 阶	150 阶	200 阶	250 阶
地球引力位系数 (10^{-11})	4.301	2.421	2.699	6.554	8.402
累计大地水准面 (10^{-2} m)	1.163	2.253	2.916	4.864	9.295
累计重力异常 (10^{-7} m/s ²)	0.976	2.698	4.189	9.064	20.372

据图 5 和表 2 可知:(1)在地球重力场长波部分($2 \leq L \leq 50$),地球引力位系数反演精度较低. 由于卫星重力梯度是地球引力位的二阶导数,因此在二次微分的过程中,在一定程度上损失了低频重力场的精度,但可以通过 GRACE 高精度的长波地球重力场精度弥补其不足;(2)在地球重力场中长波部分($50 < L \leq 110$),地球引力位系数反演精度逐渐提高,说明随着球函数阶数的增加,卫星重力梯度对探测地球重力场的敏感性逐步加强;(3)在地球重力场中短波部分($110 < L \leq 250$),地球引力位系数误差增长缓慢,充分体现了基于卫星重力梯度高精度和高空间分辨率感测中高频地球重力场的优越性. 通过本文基于 Kaula 正则化和文献[35]基于一阶 Tikhonov 正则化反演 GOCE 地球重力场精度的对比可知,Kaula 正则化是降低正规阵病态性的有效方法.

如图 6 所示,实线和虚线分别表示在第 65 步迭代处,基于卫星重力梯度分量($V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}, V_{xz}$),利用 Kaula 正则化反演 250 阶 GOCE 累计大地水准面精度和累计重力异常精度. 在 250 阶处,累计大地水准面和累计重力异常的精度分别为 9.295 cm 和 2.037×10^{-6} m/s²,在各阶处的统计结果如表 2 所示.

如图 7 所示,虚线表示德国地学研究中心(GFZ)公布的 120 阶 EIGEN-GRACE02S 地球重力场模型的实测精度,在 120 阶处累计大地水准面精度为 18.938 cm;实线表示基于时空域混合法,利用 Kaula 正则化反演 250 阶 GOCE 地球重力场的模拟精度. GRACE 和 GOCE 卫星工作在不同的地球重力场波

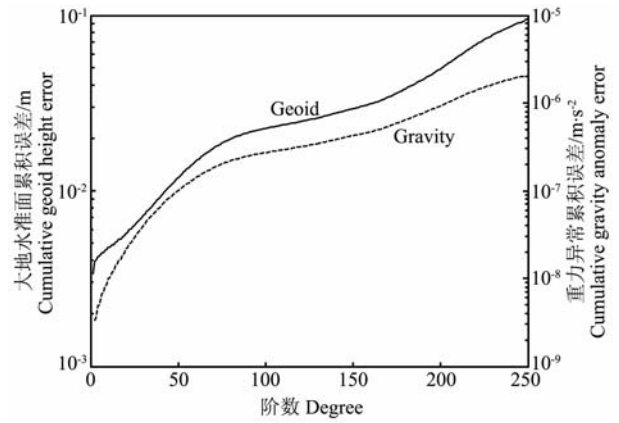


图 6 基于卫星重力梯度分量反演大地水准面和重力异常累积误差

Fig. 6 Errors of cumulative geoid height and gravity anomaly based on the components of SGG tensor

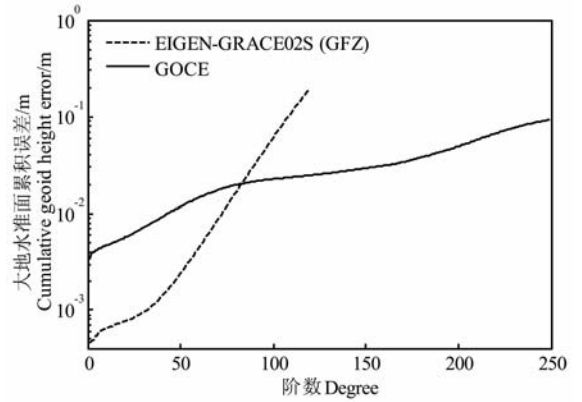


图 7 GRACE 和 GOCE 大地水准面累积误差对比
Fig. 7 A comparison of cumulative geoid height errors between GRACE and GOCE

谱内,它们各自具有不同的科学应用. 由于 GRACE 卫星敏感于中长波地球重力场($2 \leq L < 80$ 阶),而 GOCE 卫星敏感于中短波地球重力场($80 \leq L \leq 250$ 阶),因此 GRACE 和 GOCE 卫星计划不是相互竞争,而明显具有互补性,联合求解二者的观测数据可反演高精度、高空间分辨率和全频段的地球重力场.

4 结 论

(1)为了克服地球引力位随高度的衰减效应,卫星重力梯度技术直接测定地球引力位的二阶导数,进而高精度感测中短波地球重力场的信号.

(2)为高精度和快速解算转换矩阵 $\mathbf{T}_{g \times n}$, 本文将其分解为网格划分矩阵,三维插值矩阵,坐标转换矩阵和重力梯度分量选择矩阵四个部分进行分步解算.

(3)通过本文基于 Kaula 正则化和文献[35]基

于一阶 Tikhonov 正则化反演 GOCE 地球重力场精度的对比可知, Kaula 正则化是降低正规阵病态性的有效方法, 改进的 PCCG 是目前求解大型线性方程组的有效方法之一, 适当选取预处理阵可较大幅度地减少 PCCG 求解引力位系数中循环迭代的次数。

(4) 基于时空域混合法利用卫星重力梯度分量 ($V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}, V_{xz}$) 结合 Kaula 正则化反演了 GOCE 地球重力场, 在 250 阶处, 反演地球引力位系数、累计大地水准面和累计重力异常的精度分别为 8.402×10^{-11} 、9.295 cm 和 0.204 mGal。

(5) 由于 GRACE 和 GOCE 分别敏感于中长波和中短波重力场, 因此联合求解二者的卫星观测数据可反演高精度、高空间分辨率和全频段的地球重力场。

致谢 感谢编辑及评审专家、华中科技大学物理学院罗俊院士对本文的帮助。感谢欧洲空间局 (ESA) 提供了 GOCE 卫星的相关资料。

参考文献 (References)

- [1] 许厚泽, 王谦身, 陈益惠. 中国重力测量与研究的进展. 地球物理学报, 1994, **37**(S1): 339~352
Xu H Z, Wang Q S, Chen Y H. The progress of the gravity survey and research in China. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1994, **37**(S1): 339~352
- [2] 许厚泽, 张赤军. 我国大地重力学和固体潮研究进展. 地球物理学报, 1997, **40**(S1): 192~205
Xu H Z, Zhang C J. Development of the studies on geodetic gravity and earth tides in China. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1997, **40**(S1): 192~205
- [3] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. 国际重力卫星研究进展和我国将来卫星重力测量计划. 测绘科学, 2010, **35**(1): 5~9
Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Research progress in international gravity satellites and future satellite gravity measurement program in China. *Science of Surveying and Mapping* (in Chinese), 2010, **35**(1): 5~9
- [4] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. 国际卫星重力梯度测量计划研究进展. 测绘科学, 2010, **35**(2): 57~61
Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Study progress in international satellite gravity gradiometry programs. *Science of Surveying and Mapping* (in Chinese), 2010, **35**(2): 57~61
- [5] Klees R, Koop R, Visser P, et al. Efficient gravity field recovery from GOCE gravity gradient observations. *Journal of Geodesy*, 2000, **74**: 561~571
- [6] Visser P, van den IJssel J. GPS-based precise orbit determination of the very low earth-orbiting gravity mission GOCE. *Journal of Geodesy*, 2000, **74**(7): 590~602
- [7] Pail R, Wermuth M. GOCE SGG and SST quick-look gravity field analysis. *Advances in Geosciences*, 2003, **1**: 5~9
- [8] 宁津生, 罗志才, 陈永奇. 卫星重力梯度数据用于精化地球重力场的研究. 中国工程科学, 2002, **4**(7): 23~28
Ning J S, Luo Z C, Chen Y Q. Application of satellite gravity gradiometry data to the refinement of the Earth's gravity field. *Engineering Science* (in Chinese), 2002, **4**(7): 23~28
- [9] Reguzzoni M. From the time-wise to space-wise GOCE observables. *Advances in Geosciences*, 2003, **1**: 137~142
- [10] Sneeuw N. Space-wise, time-wise, torus and rosborough representations in gravity field modelling. *Space Science Reviews*, 2003, **108**(1): 37~46
- [11] Migliaccio F, Reguzzoni M, Sanso F. Space-wise approach to satellite gravity field determination in the presence of coloured noise. *Journal of Geodesy*, 2004, **78**(4): 304~313
- [12] Sneeuw N, van den IJssel J, Koop R, et al. Validation of fast pre-mission error analysis of the GOCE gradiometry mission by a full gravity field recovery simulation. *Journal of Geodynamics*, 2002, **33**(1): 43~52
- [13] Arsov K, Pail R. Assessment of two methods for gravity field recovery from GOCE GPS-SST orbit solutions. *Advances in Geosciences*, 2003, **1**: 121~126
- [14] Bouman J, Koop R, Tscherning C C, et al. Calibration of GOCE SGG data using high-low SST, terrestrial gravity data and global gravity field models. *Journal of Geodesy*, 2004, **78**(1): 124~137
- [15] 沈云中, 许厚泽, 吴斌. 星间加速度解算模式的模拟与分析. 地球物理学报, 2005, **48**(4): 807~811
Shen Y Z, Xu H Z, Wu B. Simulation of recovery of the geopotential model based on intersatellite acceleration data in the low-low satellite to satellite tracking gravity mission. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2005, **48**(4): 807~811
- [16] Zheng W, Lu X L, Xu H Z, et al. Simulation of Earth's gravitational field recovery from GRACE using the energy balance approach. *Progress in Natural Science*, 2005, **15**(7): 596~601
- [17] 程芦颖, 许厚泽. 地球重力场恢复中的位旋转效应. 地球物理学报, 2006, **49**(1): 93~98
Cheng L Y, Xu H Z. The rotation of the gravity potential on the Earth's gravity field recovery. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, **49**(1): 93~98
- [18] 郑伟, 邵成刚, 罗俊等. 基于卫-卫跟踪观测技术利用能量守恒法恢复地球重力场的数值模拟研究. 地球物理学报, 2006, **49**(3): 712~717
Zheng W, Shao C G, Luo J, et al. Numerical simulation of Earth's gravitational field recovery from SST based on the energy conservation principle. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, **49**(3): 712~717
- [19] Xu P L. Position and velocity perturbations for the determination of geopotential from space geodetic measurements. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2008, **100**(3): 231~249
- [20] Zheng W, Shao C G, Luo J, et al. Improving the accuracy of GRACE Earth's gravitational field using the combination of different inclinations. *Progress in Natural Science*, 2008, **18**(5): 555~561
- [21] 郑伟, 许厚泽, 钟敏等. 基于半解析法有效和快速估计

- GRACE 全球重力场的精度. 地球物理学报, 2008, **51**(6): 1704~1710
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Efficient and rapid estimation of the accuracy of GRACE global gravitational field using the semi-analytical method. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2008, **51**(6):1704~1710
- [22] Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Physical explanation on designing three axes as different resolution indexes from GRACE satellite-borne accelerometer. *Chinese Physics Letters*, 2008, **25**(12):4482~4485
- [23] 郑 伟, 许厚泽, 钟 敏等. GRACE 星体和 SuperSTAR 加速度计的质心调整精度对地球重力场精度的影响. 地球物理学报, 2009, **52**(6):1465~1473
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Influence of the adjusted accuracy of center of mass between GRACE satellite and SuperSTAR accelerometer on the accuracy of Earth's gravitational field. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, **52**(6):1465~1473
- [24] 郑 伟, 许厚泽, 钟 敏等. GRACE 卫星实测数据有效处理和地球重力场快速解算. 地球物理学报, 2009, **52**(8): 1966~1975
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Effective process of measured data from GRACE key payloads and accurate determination of Earth's gravitational field. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, **52**(8):1966~1975
- [25] 郑 伟, 许厚泽, 钟 敏等. 卫星跟踪卫星测量模式中星载加速度计高低灵敏轴分辨率指标最优设计论证. 地球物理学报, 2009, **52**(11):2712~2720
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Demonstration on the optimal design of resolution indexes of high and low sensitive axes from space-borne accelerometer in the satellite-to-satellite tracking model. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2009, **52**(11):2712~2720
- [26] Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Physical explanation of influence of twin and three satellites formation mode on the accuracy of Earth's gravitational field. *Chinese Physics Letters*, 2009, **26**(2):029101-1~029101-4
- [27] Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Accurate and rapid error estimation on global gravitational field from current GRACE and future GRACE Follow-On missions. *Chinese Physics B*, 2009, **18**(8):3597~3604
- [28] 郑 伟, 许厚泽, 钟 敏等. 卫星跟踪测量模式中轨道高度的优化选取. 大地测量与地球动力学, 2009, **29**(2):100~105
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Optimal design of orbital altitude in satellite-to-satellite tracking model. *Journal of Geodesy and Geodynamics* (in Chinese), 2009, **29**(2):100~105
- [29] 郑 伟, 许厚泽, 钟 敏等. 两种 GRACE 地球重力场精度评定方法的检验. 大地测量与地球动力学, 2009, **29**(5):89~93
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Verification of two methods on evaluating the accuracy of GRACE Earth's gravitational field. *Journal of Geodesy and Geodynamics* (in Chinese), 2009, **29**(5):89~93
- [30] 郑 伟, 许厚泽, 钟 敏等. 利用解析法有效快速估计将来 GRACE Follow-On 地球重力场的精度. 地球物理学报, 2010, **53**(4): 796~806
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Efficient and rapid estimation of the accuracy of future GRACE Follow-On Earth's gravitational field using the analytic method. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2010, **53**(4):796~806
- [31] 郑 伟, 许厚泽, 钟 敏等. 卫星跟踪卫星模式中轨道参数需求分析. 天文学报, 2010, **51**(1):65~74
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Requirement analysis of orbit parameters in the satellite-to-satellite tracking model. *Chinese Astronomy and Astrophysics* (in Chinese), **51**(1): 65~74
- [32] 郑 伟, 许厚泽, 钟 敏等. Improved-GRACE 卫星重力轨道参数优化研究. 大地测量与地球动力学, 2010, **30**(2):43~48
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Research on optimal selection of orbital parameters in the Improved-GRACE satellite gravity measurement mission. *Journal of Geodesy and Geodynamics* (in Chinese), 2010, **30**(2):43~48
- [33] 郑 伟, 许厚泽, 钟 敏等. 地球重力场模型研究进展和现状. 大地测量与地球动力学, 2010, **30**(4):83~91
- Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Progress and present status of the research on Earth's gravitational field models. *Journal of Geodesy and Geodynamics* (in Chinese), 2010, **30**(4): 83~91
- [34] Zheng W, Xu H Z, Zhong M, et al. Efficient calibration on measured non-conservative force of space-borne accelerometer from GRACE twin satellites. *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, 2011, **54**(184) (in Press)
- [35] Ditmar P, Klees R, Kostenko F. Fast and accurate computation of spherical harmonic coefficients from satellite gravity gradiometry data. *Journal of Geodesy*, 2003, **76**:690~705
- [36] 郑 伟. 基于卫星重力测量恢复地球重力场的理论和方法 [博士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2007. 1~135
- Zheng W. Theory and methodology of Earth's gravitational field recovery based on satellite gravity measurement [Ph. D. Thesis]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2007. 1~135
- [37] Overhauser A W. Analytic definition of curves and surfaces by parabolic blending. Tech rep SL68-40, Scientific research staff publication. Ford Motor Company, Detroit, 196
- [38] Xu P L, Fukuda Y, Liu Y M. Multiple parameter regularization: numerical solutions and applications to the determination of geopotential from precise satellite orbits. *Journal of Geodesy*, 2006, **80**(1):17~27
- [39] Hestenes M R, Stiefel E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1952, **49**:409~438
- [40] Schuh W D. Tailored numerical solution strategies for the global determination of the Earth's gravity field. *Mitteilungen geod. Inst. TU Graz*, no. 81, Graz Univ. of Technology, Graz, 1996