文章编号: 1000-6869(2010)08-0101-05

既有结构可靠性评定中变异系数统计推断

姚继涛, 解耀魁
(西安建筑科技大学 土木工程学院, 陕西西安 710055)

摘要: 在既有结构的可靠性评定中, 对作用、抗力变异系数的推断将成为一项必要的工作。目前已有的变异系数推断方法主要适用于对永久作用、材料强度等正态随机变量变异系数的推断, 但其中的精确方法需采用查表计算, 应用不便, 而近似推断方法中又设定了较为严格的适用条件。通过变换变异系数的概率表达式和引入相关的近似分布, 提出了永久作用、材料强度变异系数的近似推断方法。对比分析结果表明: 该方法不仅应用简便, 而且较目前的近似方法, 包括 GB/T 11791—89中的近似推断方法具有更高的精度, 适用范围更广。同时针对服从对数正态分布的抗力, 提出了变异系数推断方法, 包括直接和间接两种推断方式, 能够满足工程实际的需要。

关键词: 既有结构; 作用; 抗力; 统计推断; 可靠性评定
中图分类号: TU311.2 **文献标志码**: A

Statistical inference for coefficient of variation in reliability assessment of existing structure

YAO Jitao, XIE Yaokui
(School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: In the reliability assessment of existing structures, statistical inference for coefficient of variation of action and resistance is an essential task. The present inference method for coefficient of variations is mainly applicable to normal random variables which are adopted to infer the coefficient of variation of permanent action and material strength, but the application of its precise method of calculation is inconvenient, while the approximate inference method can only be used with stringent conditions. This paper proposes an approximate inference method for coefficient of variation of permanent action and material strength by changing coefficient of variation related to the probability expression and by leading into approximate distribution. Comparative analysis of results shows that the proposed method is not only simple and convenient to use, but is also more accurate compared with the approximate inference method specified in the national standard GB/T 11791—89 and can be suitable for a wider range of application. In addition, the paper proposes inference method for coefficient of variation of structure resistance that obeys the lognormal distribution. The approach can satisfy the needs of practical design, with the consideration of the direct and indirect inference methods.

Keywords: existing structure; action; resistance; statistical inference; reliability assessment

基金项目: 国家自然科学基金项目(50678143)。
作者简介: 姚继涛(1965—), 男, 陕西西安人, 工学博士, 教授。E-mail: yaojitao@163.com
收稿日期: 2009年2月

0 引言

在既有结构的可靠性评定中，构件的校核一般采用现行设计规范规定的设计表达式，只是材料强度、几何参数、作用等根据调查检测的结果确定[1-2]。这种方法实际上并不适用于既有结构，因目前设计表达式中的分项系数是根据特定的作用、抗力变异性确定的[3]，如对于钢筋混凝土受弯构件，其抗力变异系数按特定值 0.1考虑，但在结构建成并投入使用之后，抗力、作用的变异性与设计表达式默认的变异性可能并不相同，甚至存在很大差异，按设计表达式对既有结构进行校核时，其结果并不能反映其实际的可靠度水平。鉴于此，ISO 13822:2003《结构设计基础——既有结构评定》中规定，在校核既有结构构件时，可根据材料强度变异性的检测和试验结果对分项系数进行调整[4]。因此，在既有结构的可靠性评定中，对作用、抗力变异系数的推断将成为一项必要的工作。

目前已有的变异系数推断方法主要适用于正态随机变量，其中的精确方法[5]采用隐式表达，计算中需反查数值表，应用不便，因此文献[5-6]提出了以显式表达的近似推断方法，但其适用条件较为严格，当变异性较强时推断结果具有较大误差。

本文首先介绍目前变异系数的推断方法，然后针对服从正态分布的永久作用和材料强度，通过变换变异系数的概率表达式和引入相关的近似分布，建立新的变异系数近似推断方法，并通过对比分析说明其精度。最后，利用区间估计方法，建立服从对数正态分布的抗力变异系数的推断方法，并考虑直接和间接两种推断方式。

1 变异系数推断方法

目前，变异系数的统计推断方法主要适用于正态随机变量。设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中均值 μ和方差 σ^2未知。假设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一组样本，样本均值和方差分别记为 $\bar{X}$ 和 S^2，则随机变量 $U=\dfrac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}$服从自由度为 $n-1$、参数为$\dfrac{\sqrt{n}}{\delta}$的非中心 t分布，其中 δ为随机变量X 的变异系数，即：

$$\delta=\frac{\sigma}{\mu} \tag{1}$$

令：

$$P\{U \leqslant t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,\alpha)}\}=C \tag{2}$$

式中：$t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,\alpha)}$ 为自由度 $n-1$、参数 $\dfrac{\sqrt{n}}{\delta}$ 的非中心 t 分布的上侧 α分位值，α为显著性水平，其数值一般为 0.05；C 为置信度，且 $C=1-\alpha$。当获得样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及其均值 $\bar{x}$和标准差 s时，由区间估计法可得：

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\delta}}=t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,\alpha)} \tag{3}$$

式中，$\hat{\delta}$是按观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 计算的变异系数，即：

$$\hat{\delta}=\frac{s}{\bar{x}} \tag{4}$$

满足式(3)的 $t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,\alpha)}$ 中的 δ即为随机变量 X 的变异系数的估计值。

如果令：

$$P\{U \geqslant t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,1-\alpha)}\}=C \tag{5}$$

可得变异系数 δ另一估计值，它应满足：

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\delta}}=t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,1-\alpha)} \tag{6}$$

式中，$t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,1-\alpha)}$ 为自由度 $n-1$、参数$\dfrac{\sqrt{n}}{\delta}$的非中心 t 分布的上侧 $1-\alpha$分位值。由式(3)和式(6)所确定的 δ分别为变异系数的置信上限和置信下限。

由于随机变量变异系数的估计值隐含于 $t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,\alpha)}$ 和 $t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,1-\alpha)}$ 中，且难以采用一般的解析式表达，因此在确定变异系数的估计值时，须根据$\dfrac{\sqrt{n}}{\hat{\delta}}$的数值反查 $t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,\alpha)}$ 或 $t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,1-\alpha)}$ 的数值表，这给变异系数 δ的推断带来很大不便。

为克服查表计算带来的不便，文献[5-6]提出了变异系数 δ的近似推断方法。文献[6]指出，当正态分布的变异系数 $\delta \leqslant 0.30$时，由式(7)定义的随机变量 U近似服从自由度为 $n-1$的 χ^2分布：

$$U=\frac{n(S/\bar{X})^2[1+\delta^2]}{[1+(S/\bar{X})^2]\delta^2} \tag{7}$$

分别令：

$$P\{U \leqslant \chi^2_{(n-1,\alpha)}\}=C \tag{8}$$

$$P\{U \geqslant \chi^2_{(n-1,1-\alpha)}\}=C \tag{9}$$

可得变异系数 δ的置信上限和置信下限，它们分别应按式(10)、式(11)计算。

$$\delta=\left[\frac{\chi^2_{(n-1,\alpha)}(1+\hat{\delta}^2)}{n\hat{\delta}^2}-1\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{10}$$

$$\delta=\left[\frac{\chi^2_{(n-1,1-\alpha)}(1+\hat{\delta}^2)}{n\hat{\delta}^2}-1\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

式中，$\chi^2_{(n-1,\alpha)}$、$\chi^2_{(n-1,1-\alpha)}$ 分别为自由度 $n-1$的 χ^2分布上侧 α和 $1-\alpha$分位值。

文献[5]规定，当 $\hat{\delta}<0.3$且 $n \geqslant 6$时，变异系数 δ的置信上限可按式(12)近似计算。

$$\delta = \left[\frac{\chi^2_{(n-1,\alpha)}\left(1+\frac{n-1}{n}\hat{\delta}^2\right)}{(n-1)\hat{\delta}^2} - 1\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{12}$$

本文将在永久作用和材料强度变异系数的推断中提出新的变异系数 δ的近似推断方法。

2 永久作用和材料强度变异系数近似推断方法

永久作用和材料强度一般均服从正态分布, 对其变异系数的推断在数学表达上相同, 以永久作用为例阐述变异系数的近似推断方法。记永久作用 G 的均值、方差、变异系数分别为 μ_G、σ_G^2 和 δ_G, 且均未知。随机变量 $U=\frac{\overline{X}}{S/\sqrt{n}}$服从自由度为 $n-1$、参数为$\frac{\sqrt{n}}{\delta_G}$的非中心 t分布, 令:

$$P\{U \leqslant t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)}\} = P\{\frac{\overline{X}}{S/\sqrt{n}} \leqslant t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)}\} = C \tag{13}$$

根据区间估计方法, 变异系数 δ_G需根据式(14)求解。

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\delta}_G} = t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)} \tag{14}$$

式中, $\hat{\delta}_G$为按永久作用 G的观测值计算的变异系数。

为了建立变异系数 δ_G 的近似推断公式, 将式(13)改写为:

$$P\{\overline{X} - \frac{t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)}}{\sqrt{n}}S \leqslant 0\} = P\{V \leqslant 0\} = C \tag{15}$$

式中:

$$V = \overline{X} - \frac{t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)}}{\sqrt{n}}S \tag{16}$$

由于随机变量 $\overline{X}$服从正态分布 $N(\mu_G, \sigma_G^2/n)$, 当 $n\geqslant 5$时 S近似服从正态分布 $N(\sigma_G, \frac{\sigma_G^2}{2(n-1)})$, 且 $\overline{X}$与 S相互独立[7], 因此随机变量 V亦近似服从正态分布, 其均值和方差分别为:

$$\mu_V = \mu_G - \frac{t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)}}{\sqrt{n}}\sigma_G \tag{17}$$

$$\sigma_V^2 = \left[1+\frac{t^2_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)}}{2(n-1)}\right]\frac{\sigma_G^2}{n} \tag{18}$$

将式(15)进一步改写为:

$$P\{\frac{V-\mu_V}{\sigma_V} \leqslant -\frac{\mu_V}{\sigma_V}\} = C \tag{19}$$

由此可得:

$$-\frac{\mu_V}{\sigma_V} = z_\alpha \tag{20}$$

式中, z_α 为标准正态分布的上侧 α分位值。将式(17) 式(18)代入后整理得:

$$\frac{t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)} - \frac{\sqrt{n}}{\delta_G}}{\sqrt{1+\frac{t^2_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)}}{2(n-1)}}} = z_\alpha \tag{21}$$

将式(14)代入后, 得:

$$\delta_G = \frac{\hat{\delta}_G}{1 - z_\alpha\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}+\frac{\hat{\delta}_G^2}{n}}} \tag{22}$$

利用式(22)便可直接计算变异系数 δ_G, 而不必根据$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\delta}_G}$反查 $t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,\alpha)}$ 的数值表。

如果令:

$$P\{U \geqslant t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta_G,1-\alpha)}\} = C \tag{23}$$

按类似步骤, 并注意到 $z_{1-\alpha} = z_\alpha$, 可得变异系数 δ_G 的另一估计值:

$$\delta_G = \frac{\hat{\delta}_G}{1 + z_\alpha\sqrt{\frac{1}{2(n-1)}+\frac{\hat{\delta}_G^2}{n}}} \tag{24}$$

式(22)和式(24)分别为永久作用变异系数 δ_G 置信上限和置信下限的推断公式。

表 1和表 2分别列举了 $\alpha=0.05$和 $\alpha=0.10$时按不同方法推断变异系数 δ_G 的结果, 其中精确解是按式(14)反查 $t_{(n-1,\sqrt{n}/\delta,\alpha)}$ 数值表的结果。从表中可见, 式(10)的精度最低; 当 $\alpha=0.05$、$\hat{\delta}\geqslant 0.1$、$n\geqslant 5$时及 $\alpha=0.10$、$\hat{\delta}\geqslant 0.2$、$n\geqslant 7$时, 式(22)较式(12)具有更好的精度。实际应用中, 一般取 $\alpha=0.05$, 且大多数情况下有 $\hat{\delta}\geqslant 0.1$和 $n\geqslant 5$。如果取 $\alpha=0.05$, $\hat{\delta}=0.1\sim 0.5$和 $n=5\sim 30$, 则式(10)的平均相对误差为 15.4%, 最大相对误差为 104.3%; 式(12)的平均相对误差为 −3.6%, 最大相对误差为 35.9%; 而式(22)的平均相对误差为 −1.1%, 最大相对误差为 5.0%。因此, 在实际应用中, 式(22)不仅有更高的精度, 而且具有更广的适用范围。

3 抗力变异系数推断方法

3.1 直接推断方法

如果能够获得构件抗力的测试结果, 可根据测试结果直接推断其变异系数。一般认为抗力 R 服从对数正态分布 $LN(\mu_{\ln R}, \sigma^2_{\ln R})$, 即 $\ln R$ 服从正态分布 $N(\mu_{\ln R}, \sigma^2_{\ln R})$, 且抗力 R 的均值 μ_R、变异系数 δ_R 与 $\ln R$ 的均值 $\mu_{\ln R}$、方差 $\sigma^2_{\ln R}$ 之间的关系按式(25)、式(26)计算。

表 1 变异系数 δ_c 的推断结果 ($\alpha = 0.05$)

Table 1 Inference results of variation coefficient δ_c ($\alpha = 0.05$)

n	$\delta_c = 0.10$				$\delta_c = 0.20$				$\delta_c = 0.30$				$\delta_c = 0.50$			
	式(10)	式(12)	式(22)	精确解	式(10)	式(12)	式(22)	精确解	式(10)	式(12)	式(22)	精确解	式(10)	式(12)	式(22)	精确解
20	0.141	0.136	0.137	0.138	0.287	0.269	0.277	0.278	0.442	0.442	0.422	0.425	0.809	0.616	0.740	0.747
25	0.135	0.131	0.132	0.132	0.273	0.258	0.265	0.267	0.419	0.418	0.404	0.406	0.752	0.591	0.703	0.708
30	0.131	0.127	0.128	0.128	0.264	0.251	0.258	0.259	0.403	0.403	0.392	0.393	0.716	0.574	0.678	0.683

表 2 变异系数 δ_c 的推断结果 ($\alpha = 0.10$)

Table 2 Inference results of variation coefficient δ_c ($\alpha = 0.10$)

n	$\delta_c = 0.10$				$\delta_c = 0.20$				$\delta_c = 0.30$				$\delta_c = 0.50$			
	式(10)	式(12)	式(22)	精确解	式(10)	式(12)	式(22)	精确解	式(10)	式(12)	式(22)	精确解	式(10)	式(12)	式(22)	精确解
5	0.221	0.193	0.184	0.195	0.470	0.382	0.376	0.399	0.796	0.562	0.582	0.622	3.953	0.885	1.078	1.170
6	0.196	0.175	0.169	0.177	0.409	0.347	0.344	0.361	0.667	0.510	0.531	0.559	1.711	0.802	0.966	1.030
7	0.180	0.164	0.160	0.166	0.373	0.324	0.324	0.337	0.596	0.477	0.498	0.520	1.320	0.749	0.897	0.943
8	0.170	0.157	0.153	0.158	0.349	0.309	0.310	0.321	0.551	0.454	0.475	0.493	1.139	0.712	0.849	0.885
9	0.162	0.151	0.148	0.152	0.332	0.296	0.299	0.308	0.520	0.437	0.458	0.473	1.032	0.685	0.813	0.843
10	0.156	0.146	0.144	0.148	0.319	0.289	0.291	0.299	0.497	0.424	0.445	0.457	0.960	0.664	0.786	0.811
15	0.139	0.133	0.132	0.134	0.283	0.263	0.267	0.271	0.435	0.386	0.406	0.413	0.791	0.604	0.708	0.721
20	0.131	0.127	0.127	0.128	0.266	0.251	0.255	0.258	0.406	0.368	0.387	0.392	0.723	0.574	0.669	0.678
25	0.127	0.123	0.123	0.124	0.256	0.243	0.248	0.250	0.390	0.356	0.375	0.379	0.685	0.556	0.645	0.652
30	0.124	0.121	0.120	0.121	0.249	0.283	0.242	0.244	0.378	0.349	0.367	0.370	0.660	0.543	0.629	0.634

$$\mu_R = \exp\{\mu_{\ln R} + \frac{1}{2}\sigma^2_{\ln R}\} \tag{25}$$

$$\delta_R = \sqrt{\exp\{\sigma^2_{\ln R}\} - 1} \tag{26}$$

由于 δ_R 与 $\sigma^2_{\ln R}$ 之间为单值对应关系, 因此可通过 $\sigma^2_{\ln R}$ 建立抗力变异系数 δ_R 的推断方法。

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抗力 R 的一组样本, 它们均服从对数正态分布, 令:

$$Y_i = \ln X_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{27}$$

则 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 均服从正态分布, 其样本均值和方差分别记为 $\overline{Y}$ 和 S_Y^2。这时随机变量 $U = \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2_{\ln R}}$ 服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布, 令:

$$P\{U \leqslant \chi^2_{(n-1,\alpha)}\} = C \tag{28}$$

式中, $\chi^2_{(n-1,\alpha)}$ 为自由度 $n-1$ 的 χ^2 分布的上侧 α 分位值, 可由相应的表格[8]查得。根据区间估计的方法, 可得 $\sigma^2_{\ln R}$ 的推断公式为:

$$\sigma^2_{\ln R} = \frac{(n-1)s_Y^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha)}} \tag{29}$$

式中:

$$s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \tag{30}$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{31}$$

$$y_i = \ln x_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{32}$$

其中, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观测值。将式(29)代入式(26)可得抗力变异系数 δ_R 的推断式为:

$$\delta_R = \sqrt{\exp\{\frac{(n-1)s_Y^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha)}}\} - 1} \tag{33}$$

如果令:

$$P\{U \geqslant \chi^2_{(n-1,1-\alpha)}\} = C \tag{34}$$

按照类似的步骤, 可得:

$$\sigma^2_{\ln R} = \frac{(n-1)s_Y^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha)}} \tag{35}$$

$$\delta_R = \sqrt{\exp\{\frac{(n-1)s_Y^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha)}}\} - 1} \tag{36}$$

式中, $\chi^2_{(n-1,1-\alpha)}$ 为自由度 $n-1$ 的 χ^2 分布的上侧 $1-\alpha$ 分位值, 可由相应的表格[8]查得。

式(33)和式(36)分别为抗力变异系数 δ_R 置信下限和置信上限的推断公式。通常取 $\alpha = 0.05$。

3.2 间接推断方法

在一般情况下, 在既有结构的检测中要获得构

件抗力的测试值较为困难,这时只能根据抗力各影响因素的变异性间接推断抗力的变异系数。

作为随机变量,抗力 R 一般可表示为:

$$R = K_p R_p = K_p R_p(X_1, X_2, \cdots, X_m) \qquad (37)$$

式中: K_p 为反映模型不确定性的随机变量,其变异系数 δ_{K_p} 可根据文献[9]统计分析结果确定; $R_p(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 为按规范规定的计算模型确定的构件抗力; $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为材料性能、几何参数等基本变量。根据误差传递公式,抗力变异系数为:

$$\delta_R = \sqrt{\delta_{K_p}^2 + \delta_{R_p}^2} \qquad (38)$$

如果通过对 n 个构件的测试能够获得基本变量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 的 n 组测试值 $x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{mi}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则可得这 n 个构件的抗力计算值为:

$$R_{pi} = R_p(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{mi}) \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (39)$$

这时将 $R_{p1}, R_{p2}, \cdots, R_{pn}$ 作为 $y_1, y_2, \cdots y_n$ 带入式(33)或式(36),可分别得变异系数 δ_{R_p} 的置信下限和置信上限,并可按式(38)进一步估计抗力的变异系数 δ_R。

如果仅对基本变量 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 中的部分变量进行测试,则变异系数 δ_{R_p} 可按式(40)计算。

$$\delta_{R_p} = \frac{\sigma_{R_p}}{\mu_{R_p}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial R_p}{\partial X_i}\Big|_{\mu} \cdot \sigma_{X_i}\right)^2}}{R_p(\mu_{X_1}, \cdots, \mu_{X_m})} \qquad (40)$$

式中, $\frac{\partial R_p}{\partial X_i}\Big|_{\mu}$ 为 R_p 在均值点 $(\mu_{X_1}, \cdots, \mu_{X_m})$ 处关于 X_i 的偏导数, μ_{X_i}、σ_{X_i} 分别为 X_i 的均值和标准差。由于材料性能、几何参数一般均服从正态分布,因此对于 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 中被测试的基本变量,其均值 μ_{X_i} 可取相应测试结果的平均值,标准差 σ_{X_i} 可参照式(29)或式(35)推断;对于 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 中未被测试的基本变量,其均值 μ_{X_i} 和标准差 σ_{X_i} 可根据文献[9]统计分析结果确定。

4 结论

通过对作用、抗力变异系数推断方法的研究,可得以下主要结论:

(1)目前的变异系数推断方法主要适用于永久作用、材料强度等正态随机变量,其中的精确方法需在计算过程中反查数值表,应用不便,而近似方法的适用条件又相对严格。

(2)提出的永久作用、材料强度变异系数的近似推断方法,不仅应用简便,而且较目前的近似方法,包括 GB/T 11791—89 中的近似方法具有更高的精度,并且适用范围更广。

(3)针对服从对数正态分布的抗力而提出的变异系数推断方法,可更全面地满足工程实际的需要,它考虑了直接和间接两种推断方式。

参考文献

[1] GBJ 144—90 工业厂房可靠性鉴定标准[S]. (GBJ 144—90 Standard for appraisal of reliability of industrial buildings and structures[S]. (in Chinese))

[2] GB 50292—1999 民用建筑可靠性鉴定标准[S]. (GB 50292—1999 Standard for appraiser of reliability of civil buildings[S]. (in Chinese))

[3] GB 50068—2001 建筑结构可靠度设计统一标准[S]. (GB 50068—2001 Unified standard for reliability design of building structures[S]. (in Chinese))

[4] ISO 13822: 2003 Bases for design of structures Assessment of existing structures[S].

[5] GB/T 11791—89 正态分布变差系数置信上限[S]. (GB/T 11791—89 Upper confidence limits of coefficient of variation for normal distribution[S]. (in Chinese))

[6] Mckay A T. Distribution of the coefficient of variation and the extended "t" distribution[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1932, 95: 695-698.

[7] 何国伟. 可信性工程[M]. 北京: 中国标准出版社, 1997. (He Guowei. Reliability engineering[M]. Beijing: Standards Press of China, 1997. (in Chinese))

[8] 峁诗松, 王静龙, 史定华, 等. 统计手册[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (Mao Shisong, Wang Jinglong, Shi Dinghua, et al. Statistics handbook[M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))

[9] GBJ 68—86 建筑结构设计统一标准[S]. (GBJ 68—86 Unified standard for design of building structures[S]. (in Chinese))