# 单组点动力学方程的同伦分析解法

朱　倩[1]，黎浩峰[2]，罗　磊[1]，陈志云[1]
（1. 海军工程大学 核能科学与工程系，湖北 武汉　430033；2. 海军核化安全研究所，北京　100077）

**摘要**：同伦分析方法是一种求解非线性方程组的级数解析方法。将同伦分析方法应用于单组缓发中子动力方程组的求解，获得了它的级数分析解，并对算法的有效性进行了检验。结果表明：该算法从计算时间和精度上都能达到了工程应用的要求。
**关键词**：同伦分析法；点堆中子动力学；单组缓发先驱核
**中图分类号**：TL327　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-6931（2010）S0-0303-04

# Homotopy Analysis Solutions of Point Kinetics Equations With One Delayed Precursor Group

ZHU Qian[1]，LI Hao-feng[2]，LUO Lei[1]，CHEN Zhi-yun[1]
（1. *Department of Nuclear Energy Science and Engineering*, *Naval University of Engineering*, *Wuhan* 430033, *China*; 2. *Navy Institute for Nuclear and Chemistry Protection*, *Beijing* 100077, *China*）

**Abstract**：Homotopy analysis method is proposed to obtain series solutions of nonlinear differential equations. Homotopy analysis method was applied for the point kinetics equations with one delayed precursor group. Analytic solutions were obtained using homotopy analysis method, and the algorithm was analysed. The results show that the algorithm computation time and precision agree with the engineering requirements.
**Key words**：homotopy analysis method；point kinetics；one delayed precursor group

反应堆动力学和反应堆安全分析都必须利用中子动力学方程对中子增殖进行计算。点堆中子动力学方程组是1组刚性常微分方程组，给数值计算带来了很大难度。如果采用通常的显式数值方法，如显式Euler法、显式四阶Runge-Kutta法等，要确保数值解的准确性和稳定性，时间步长$h$必须受一定的限定[1]。为了摆脱数值方法对时间步长的限制，用同伦分析方法求解点堆中子动力学方程组，并对解的正确性进行简单校验。

## 1　同伦分析解

单组缓发中子的点堆中子动力学方程组为：

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\rho-\beta}{l}N(t)+\lambda C(t)+Q \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\beta}{l}N(t)-\lambda C(t) \tag{2}$$

式中：$N(t)$为中子密度，cm$^{-3}$；$t$为时间，s；$\rho$为反应性；$\beta$为缓发中子总份额；$l$为瞬发中子1代寿命，s；$C(t)$为缓发中子先驱核浓度，cm$^{-3}$；$Q$为外加中子源源强，s$^{-1}$。

将式（1）、（2）进行如下变换：

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\rho}{l}N(t)-F(t)+Q \tag{3}$$

**收稿日期**：2010-07-02；**修回日期**：2010-08-14
**基金项目**：国家自然科学基金资助项目（10575131）
**作者简介**：朱　倩（1979—），男，湖北武汉人，博士研究生，核能科学与工程专业

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}=F(t) \quad (4)$$

$$F(t)=\frac{\beta}{l}N(t)-\lambda C(t) \quad (5)$$

方程组的初始条件为：

$$N(0)=n_0$$
$$C(0)=c_0$$
$$F(0)=\beta/l\cdot n_0-\lambda c_0 \quad (6)$$

首先构造零阶形变方程，方程（3）、（4）、（5）可构造如下：

$$(1-p)\frac{\partial N(t;p,h_1,h_2)}{\partial t}+ph_1(\frac{\partial N(t;p,h_1,h_2)}{\partial t}-\frac{\rho}{l}N(t)+F(t)-Q)=0 \quad (7)$$

$$(1-p)\frac{\partial C(t;p,h_1,h_2)}{\partial t}+ph_1(\frac{\partial C(t;p,h_1,h_2)}{\partial t}-F(t))=0 \quad (8)$$

$$(1-p)[F(t;p,h_1,h_2)-\frac{\beta}{l}N_0+\lambda C_0]+ph_2[F(t;p,h_1,h_2)-\frac{\beta}{l}N(t;p,h_1,h_2)+\lambda C(t;p,h_1,h_2)]=0 \quad (9)$$

$$N(0;p,h_1,h_2)=n_0$$
$$C(0;p,h_1,h_2)=c_0$$

其中：$p$ 是嵌入参数；$h_1$、$h_2$ 是非零同伦参数。

当嵌入参数 $p=0$ 时，式（7）～（9）形变为线性微分方程：

$$\frac{\partial N(t;0,h_1,h_2)}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial C(t;0,h_1,h_2)}{\partial t}=0$$

$$F(t;0,h_1,h_2)=\frac{\beta}{l}n_0-\lambda c_0$$

这些方程都能够解析求解。当嵌入参数 $p=1$ 时，式（7）～（9）形变为非线性微分方程（3）～（5），这就是要求的点堆中子动力学方程组，即：

$$N(t)=N(t;1,h_1,h_2)$$
$$C(t)=C(t;1,h_1,h_2)$$
$$F(t)=F(t;1,h_1,h_2)$$

$N(t;1,h_1,h_2)$、$C(t;1,h_1,h_2)$、$F(t;1,h_1,h_2)$可以通过泰勒展开由 $N(t;0,h_1,h_2)$，$C(t;0,h_1,h_2)$，$F(t;0,h_1,h_2)$表示。即 $N(t;1,h_1,h_2)$、$C(t;1,h_1,h_2)$、$F(t;1,h_1,h_2)$是 $N(t;0,h_1,h_2)$，$C(t;0,h_1,h_2)$，$F(t;0,h_1,h_2)$和 $N(t;1,h_1,h_2)$、$C(t;1,h_1,h_2)$、$F(t;1,h_1,h_2)$的同伦。同伦参数 $h_1$、$h_2$ 影响最终解的收敛。

根据廖世俊[2]同伦分析方法思想，将 $N(t;p,h_1,h_2)$，$C(t;p,h_1,h_2)$，$F(t;p,h_1,h_2)$在 $p=0$ 点用泰勒级数展开：

$$N(t;p,h_1,h_2)=\sum_{m=0}^{+\infty}N_m(t;h_1,h_2)p^m \quad (10)$$

$$C(t;p,h_1,h_2)=\sum_{m=0}^{+\infty}C_m(t;h_1,h_2)p^m \quad (11)$$

$$F(t;p,h_1,h_2)=\sum_{m=0}^{+\infty}F_m(t;h_1,h_2)p^m \quad (12)$$

其中：

$$N_m(t;h_1,h_2)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m N(t;p,h_1,h_2)}{\partial p^m}\Big|_{p=0} \quad (13)$$

$$C_m(t;h_1,h_2)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m C(t;p,h_1,h_2)}{\partial p^m}\Big|_{p=0} \quad (14)$$

$$F_m(t;h_1,h_2)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m F(t;p,h_1,h_2)}{\partial p^m}\Big|_{p=0} \quad (15)$$

当 $p=1$ 时：

$$N(t;1,h_1,h_2)=N(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}N_m(t;h_1,h_2) \quad (16)$$

$$C(t;1,h_1,h_2)=C(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}C_m(t;h_1,h_2) \quad (17)$$

$$F(t;1,h_1,h_2)=F(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}F_m(t;h_1,h_2) \quad (18)$$

其初始条件为：

$$N(0;h_1,h_2)=n_0$$
$$C(0;h_1,h_2)=c_0 \quad (19)$$

$$N_m(0;h_1,h_2)=C_m(0;h_1,h_2)=0 \quad (m\geqslant 1) \quad (20)$$

为了获得 $N_0(t;h_1,h_2)$、$C_0(t;h_1,h_2)$、$F_0(t;h_1,h_2)$，对方程组（7）～（10）的变量 $p$ 求零次偏微分（既不求偏微分）并令 $p=0$，方程组（7）～（9）变为：

$$\frac{\partial N_0(t;h_1,h_2)}{\partial t}=0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial C_0(t;h_1,h_2)}{\partial t}=0 \quad (22)$$

$$F_0(t;h_1,h_2)=\frac{\beta}{l}n_0-\lambda c_0 \tag{23}$$

从式（19）得：

$$N_0(t;h_1,h_2)=n_0 \tag{24}$$

$$C_0(t;h_1,h_2)=c_0 \tag{25}$$

$$F_0(t;h_1,h_2)=\frac{\beta}{l}n_0-\lambda c_0 \tag{26}$$

同样地，对方程组（7）～（9）的变量 $p$ 求 $m$ 次偏微分，令 $p=0$ 并两边同除 $m!$，方程组（7）～（10）变为：

$$\frac{\partial N_m(t;h_1,h_2)}{\partial t}=(1-h_1)\frac{\partial N_{m-1}(t;h_1,h_2)}{\partial t}+\frac{\rho}{l}h_1N_{m-1}(t;h_1,h_2)-h_1F_{m-1}(t;h_1,h_2)+\chi_m h_1Q \tag{27}$$

$$\frac{\partial C_m(t;h_1,h_2)}{\partial t}=(1-h_1)\frac{\partial C_{m-1}(t;h_1,h_2)}{\partial t}+h_1F_{m-1}(t;h_1,h_2) \tag{28}$$

$$F_m(t;h_1,h_2)=(1-h_1)F_{m-1}(t;h_1,h_2)+\frac{\beta}{l}h_2N_{m-1}(t;h_1,h_2)-h_2C_{m-1}(t;h_1,h_2) \tag{29}$$

$$\chi_m=\begin{cases}1 & m=1\\ 0 & m\geqslant 2\end{cases} \tag{30}$$

将式（27）、（28）对变量 $t$ 积分，根据初始条件式（20）计算，可以发现 $N_m(t;\ h_1,\ h_2)$、$C_m(t;\ h_1,\ h_2)$、$F_m(t;\ h_1,\ h_2)$可表示为如下形式[3-4]：

$$N_m(t;h_1,h_2)=\sum_{n=0}^{m}a_{m,n}t^n \tag{31}$$

$$C_m(t;h_1,h_2)=\sum_{n=0}^{m}b_{m,n}t^n \tag{32}$$

$$F_m(t;h_1,h_2)=\sum_{n=0}^{m}c_{m,n}t^n \tag{33}$$

将式（31）～（33）代入式（27）～（29），得：

$$\sum_{n=0}^{m}a_{m,n}t^n=(1-h_1)\sum_{n=0}^{m-1}a_{m-1,n}t^n+\frac{\rho}{l}h_1\int_0^t\sum_{n=0}^{m-1}a_{m-1,n}t^n\mathrm{d}t-\int_0^t h_1\sum_{n=0}^{m-1}c_{m-1,n}t^n\mathrm{d}t+\chi_{m,n}h_1Qt \tag{34}$$

$$\sum_{n=0}^{m}b_{m,n}t^n=(1-h_1)\sum_{n=0}^{m-1}b_{m-1,n}t^n+h_1\int_0^t\sum_{n=0}^{m-1}c_{m-1,n}t^n \tag{35}$$

$$\sum_{n=0}^{m}c_{m,n}t^n=(1-h_1)\sum_{n=0}^{m-1}c_{m-1,n}t^n+\frac{\beta}{l}h_2\sum_{n=0}^{m-1}a_{m-1,n}t^n-h_2\sum_{n=0}^{m-1}b_{m-1,n}t^n \tag{36}$$

因式（34）～（36）对任意 $t$ 都成立，方程左右关于 $t$ 的系数应相等，计算可得：

$$a_{0,0}=n_0,\quad b_{0,0}=c_0,\quad c_{0,0}=\frac{\beta}{l}n_0-\lambda c_0 \tag{37}$$

$$a_{m,n}=(1-h_1)a_{m-1,n}+\frac{\rho}{nl}h_1a_{m-1,n-1}-\frac{h_1}{n}c_{m-1,n-1}+\chi_{m,n}h_1Q\quad (m\geqslant1，1\leqslant n\leqslant m) \tag{38}$$

$$b_{m,n}=(1-h_1)b_{m-1,n}+\frac{h_1}{n}c_{m-1,n-1}\quad (m\geqslant1，1\leqslant n\leqslant m) \tag{39}$$

$$c_{m,n}=(1-h_1)c_{m-1,n}+\frac{\beta}{l}h_2a_{m-1,n}-h_2b_{m-1,n}\quad (m\geqslant1，1\leqslant n\leqslant m-1) \tag{40}$$

$$\chi_{1,1}=1,\chi_{m,n}=0(m\neq1\vee n\neq1),\quad a_{m,n}=b_{m,n}=c_{m,n}=0(m<n) \tag{41}$$

最后，得到点动力方程的级数解析解：

$$N(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{m}a_{m,n}t^n \tag{42}$$

$$C(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{m}b_{m,n}t^n \tag{43}$$

$$F(t)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{m}c_{m,n}t^n \tag{44}$$

## 2　计算实例和分析

对于式（42）～（44），因为它们是无限级数，因此，在保证精度的情况下，取 $N=50$、$h_1=0.5$、$h_2=0.2$ 进行计算，考虑 1 个快堆阶跃反应性加入的慢变瞬态过程，其单组缓发中子等效参数为：$\rho=0.0\,015$、$\beta=0.0\,065$、$\lambda=0.08$、$l=10^{-4}$、$n_0=1.0$、$Q_0=15.0$。

利用 Hermite 方法计算步长为 $h=0.0\,001$ s，计算 0～10 s $N(t)$的近似精确解；用步长 $h=0.001$ s，计算 0～80 s $N(t)$的近似精确解。然后，用本工作所述方法进行计算，并以常用数值方法（Gear 方法和 Taylor 多项式方法）进行比较[5-6]。

所得数值方法和解析法比较列于表 1。

以上计算实例表明，本中所提出的计算方法是相当有效的，在阶跃反应性加入情况下，积分步长可以不受限制，这是其他计算方法所无法比拟的，且计算精度远好与一般的数值计算方法。

表 1　各种方法比较

Table 1　Comparison between Homotopy analysis method and various other methods

| $t$/s | $N(t)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Hermite 法 ($h$=0.0 001 s) | Hermite 法 ($h$=0.01 s) | Gear 法 | Taylor 法 ($h$=0.001 s) | Taylor 法 ($h$=0.01 s) | 解析解 |
| 0.15 | 1.606 536 61 | 1.606 705 38 | 1.606 509 74 | 1.606 535 63 | 1.606 457 32 | 1.606 536 61 |
| 1 | 1.660 475 50 | 1.661 761 95 | 1.660 490 68 | 1.660 475 50 | 1.660 475 54 | 1.660 475 50 |
| 10 | 2.300 443 10 | 2.315 068 60 | 2.302 620 36 | 2.300 443 10 | 2.300 443 15 | 2.300 443 10 |
| 80 | 16.647 096 27 | 16.960 753 55 | 16.699 017 06 | 16.647 096 28 | 16.647 096 54 | 16.647 096 27 |

## 3　结论

本工作提出的级数解析解，从计算时间和计算精度上均可满足实际工作需要。文中对$h_1$、$h_2$选取仅按系数遍历原则选取，并未对$h_1$、$h_2$选取进行优化，如果优化调节$h_1$、$h_2$的值可以在降低$N$值的同时保持算法的精度。

## 参考文献：


[1]　蔡章生. 核动力反应堆中子动力学[M]. 北京：国防工业出版社，2005：29-46.

[2]　LIAO S, TAN Y. A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations[J]. Stud Appl Math, 2007, 119: 297-254.

[3]　ABBASBANDY S. The application of the Homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer[J]. Phys Lett A, 2006, 360: 109-113.

[4]　YAMASHITA M, YABUSHITA K, TSUBOI K. An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method[J]. J Phys A, 2007, 40: 8 403-8 416.

[5]　YEH K. Polymial approach to reactor kinetics equations[J]. Nucl Sci Eng, 1978, 66: 235-242.

[6]　陈昌友. 一个新的求解点堆中子动力学方程组的数值方法[J]. 核科学与工程，1998，18（4）：364-370.
CHEN Changyou. A new numerical method of solving the point reactor neutron kinetics equations[J]. Chinese Journal of Nuclear Science and Engineering, 1998, 18(4): 364-370(in Chinese).