

文章编号:1001-1595(2011)02-0213-07

卫星重力梯度边值问题的点质量调和解析

吴 星^{1,2}, 张传定³, 王 凯⁴

1. 总装备部工程设计研究总院, 北京 100028; 2. 海军海洋测绘研究所, 天津 300061; 3. 中国科学院研究生院地球科学学院, 北京 100049; 4. 信息工程大学 测绘学院, 河南 郑州 450052

Point-mass Harmonic Analysis of Satellite Gradiometry Boundary Value Problem

WU Xing^{1,2}, ZHANG Chuanding³, WANG Kai⁴

1. Center for Engineering Design and Research under the Headquarters of General Equipment, Beijing 100028, China; 2. Naval Institute of Hydrographic Surveying and Charting, Tianjin 300061, China; 3. College of Earth Science, Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 4. Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China

Abstract: The basic equations for the solution of global point-mass model based on the complex combination and complete tensor components of global gravity gradient were studied and established in this paper, from which point-mass harmonic analysis solutions of single determined and over determined boundary value problems based on satellite gravity gradient were attained. The stability of point-mass harmonic analysis solutions was obtained via the decomposition of large linear equations using blocked cyclic matrices. Finally, simulation experiments with EGM2008 were made to validate the validity and feasibility of point-mass harmonic analysis of satellite gravity gradient boundary value problems. Results indicate that with proper depths of the point masses, point-mass harmonic analysis could recover an earth gravity field model at a higher precision which is a little better than that from the generalized torus harmonic analysis.

Key words: point-mass model; satellite gravity gradient; boundary value problem; harmonic analysis; GOCE

摘 要: 研究并建立由全球重力梯度复组合分量及全张量解算全球点质量模型的基本方程, 进一步推导得到基于卫星重力梯度的单定边值问题和超定边值问题的点质量调和解析解。通过采用分块循环矩阵分解大型线性方程组的方法, 实现点质量调和解析解的稳定解算。最后运用 EGM2008 模型进行模拟数值计算, 验证卫星重力梯度边值问题的点质量调和解析法的有效性和可行性。结果表明, 在适当选取埋藏深度的情况下, 点质量调和解析法能够以较高的精度恢复重力场, 并且精度略优于广义轮胎调和解析方法。

关键词: 点质量模型; 卫星重力梯度; 边值问题; 调和解析; GOCE

中图分类号: P223

文献标识码: A

基金项目: 国家自然科学基金(40774031); 解放军信息工程大学博士生创新基金(200707)

1 引言

欧空局研制的“重力场和静态洋流探索”重力梯度卫星 GOCE 于 2009-03-17 日成功发射^[1]。它是首颗同时载有重力梯度仪和星载 GPS 接收机的卫星, 将获得高精度的卫星重力梯度(SGG)数据和卫星跟踪卫星(SST)数据, 主要目标是在空间分辨率达 100 km 的情况下, 获得 1 cm~2 cm 精度的大地水准面和 1 mGal (1 mGal = 10⁻⁵ m/s²) 的重力异常。

GOCE 卫星的数据处理主要包括: 数据预处理^[2], 卫星位置和速度的确定^[3], 地球重力场模型的计算以及相关数据产品进一步科学应用^[4]。地

球重力场模型的构建是数据处理的关键环节, 目前主要有时域法和空域法两大类^[5-6]。其中, 空域法是导出卫星高度处的重力观测值, 将这些观测值延拓到同一轨道高度, 然后进行网格化处理, 将问题转化为某个类型的边值问题的求解。如球谐分析方法^[6-7]或者广义球谐分析方法^[8]、空域最小二乘法^[9]、半解析方法^[10]、广义轮胎调和解析方法^[11]等都属于空域法范畴。然而目前大多数方法只能处理某一种重力梯度张量(复数)分量, 而不能方便地联合处理所有分量。地球重力场的联合求解, 究其本质, 若按数据离散分布的观点, 则属于扰动重力位的配置问题; 若按数据连续覆盖的观点, 则归结为扰动重力位的超定边值问题。

最小二乘配置法由于能够方便地联合处理不同类型的数 据,因而得到了广泛的研究与应用^[12-14],但是其先验协方差阵求逆计算始终制约着其全球应用。点质量法作为一种特殊的配置法,在理论和实践上的优点诸多^[15-16];可综合利用多种观测资料;可以简单地顾及地形效应;核函数比最小二乘配置法中的协方差函数更为简单,有利于快速计算等,因此在计算弹道扰动引力、确定区域截断大地水准面^[17]等领域得到广泛运用。点质量模型隐含了对场元边值界面观测值做自然内插,将边界面观测值解析延拓到地球内部的扰动质点上,在效果上相当于把观测数据的离散型化为连续型,可减小数据离散化误差,文献^[18]首次尝试以点质量模型为过渡,得到基于重力异常的点质量调和与分析方法,有效地抑制传统调和与分析方法的离散化误差,文献^[19]研究基于卫星重力梯度张量构建点质量模型的方法。本文在此基础上,进一步研究卫星重力梯度的单定边值问题和超定边值问题的点质量调和与分析法,并做了相关模拟试算。

2 卫星重力梯度超定边值问题

按照传统做法,选择一合适的参考重力场,则重力场的研究归结为对扰动场的研究。在局部复数共轭坐标系下,扰动引力梯度张量可以表示为^[12]

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_- \bar{\nabla}_- T & \bar{\nabla}_- \bar{\nabla}_0 T & \bar{\nabla}_- \bar{\nabla}_+ T \\ \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_- T & \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 T & \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_+ T \\ \bar{\nabla}_+ \bar{\nabla}_- T & \bar{\nabla}_+ \bar{\nabla}_0 T & \bar{\nabla}_+ \bar{\nabla}_+ T \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, T 为地球扰动引力位; $\bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta$ ($\alpha, \beta = -1, 0, 1$)为局部复数梯度算子,可表示为

$$\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 = 2 \bar{\nabla}_\pm \bar{\nabla}_\mp = \partial_{zz} = \partial_{rr} \quad (2)$$

$$\bar{\nabla}_\pm \bar{\nabla}_0 = \bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_{xz} \pm j \partial_{yz}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_\theta \mp j \frac{\partial_\lambda}{r \sin \theta} \right) = \frac{e^{\pm j\gamma}}{\sqrt{2}} \partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_\psi \right) \quad (3)$$

$$\bar{\nabla}_\pm \bar{\nabla}_\pm = \frac{1}{2} [(\partial_{xx} - \partial_{yy}) \pm 2j \partial_{xy}] = \frac{1}{2r^2} \left[(\partial_{\theta\theta} - \cot \theta \partial_\theta - \frac{\partial_{\lambda\lambda}}{\sin^2 \theta}) \mp 2j \partial_\theta \left(\frac{\partial_\lambda}{\sin \theta} \right) \right] = \frac{e^{\pm j2\gamma}}{2r^2} (\partial_{\psi\psi} - \cot \psi \partial_\psi) \quad (4)$$

式中, $j = \sqrt{-1}$; (r, θ, λ) 为球坐标系, r, θ, λ 分别

表示地心向径、地心余纬和地心经度; (x, y, z) 为对应的北东天局部坐标系, z 轴沿向径方向, x 轴指北, y 轴与 x 轴、 z 轴构成左手坐标系; (r, ϕ, γ) 为以计算点 P 为极点的球极坐标系, ϕ 为点 P 和流动点 Q 的球面角距, γ 为 P 至 Q 的方位角。

由式(1)可知,扰动引力梯度张量是一个对称无迹张量,除去复数共轭,只有3个独立分量,如径向分量 $\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 T$ 、一阶水平分量 $\bar{\nabla}_\pm \bar{\nabla}_0 T$ 和二阶水平分量 $\bar{\nabla}_\pm \bar{\nabla}_\pm T$ 是3个相互独立的分量。选择以卫星标称轨道 R_s 为半径的地心球面 S 作为边界面,并假设卫星轨道面上的重力梯度数据已延拓到该球面上并覆盖整个边界面,则3类独立的卫星重力梯度单定边值问题可表示为

$$\left. \begin{aligned} \Delta T &= 0, \quad \text{在 } S \text{ 上及外部} \\ \bar{\nabla}_\alpha \bar{\nabla}_\beta T|_S &= f_\beta, \quad \text{在 } S \text{ 上}, \quad p = \alpha + \beta = 0, 1, 2 \\ T &= o(r^{-3}), \quad r \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中, f_β 表示边界面上的重力梯度值。

联合利用重力梯度全部分量或部分分量确定地球重力场,理论上应归结为求解卫星重力梯度超定边值问题。

3 重力梯度数据的点质量调和与分析方法

3.1 点质量模型的球谐谱展开

如果把质点系所在 B 氏球面(半径为 R_B)用经、纬线划分成 $N \times 2M$ 个格网, $N, 2M$ 分别表示全球纬度和经度方向的格网分化数,而且每个格网中点 Q_s 处有一个点质量 δM_{st} ,那么外部空间任意一点 $P(r, \theta, \lambda)$ 的扰动位可表示为^[18,20]

$$T(P) = G \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{2M-1} \frac{\delta M_{st}}{l_{PQ_{st}}} \quad (6)$$

式中, G 为地球引力常数; $l_{PQ_{st}}$ 为 P 点到 Q_{st} 点的距离。

通过对比 $1/l_{PQ_{st}}$ 和 $T(P)$ 的球谐级数展开式的系数,可得点质量模型的球谐谱展开式^[18]

$$\begin{aligned} \bar{C}'_{nm} + j \bar{S}'_{nm} &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{R_B}{R} \right)^n \sum_{s=0}^{N-1} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_s) \sum_{t=0}^{2M-1} \delta M_{st} e^{jm\lambda_t} = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left(\frac{R_B}{R} \right)^n e^{j \frac{m\lambda}{2}} \sum_{s=0}^{N-1} \bar{P}_{nm}(\cos \theta_s) \delta M'_s(m) \end{aligned} \quad (7)$$

式中, $\bar{P}_{nm}(\cos \theta_s)$ 为 n 阶 m 次完全正常化 Legendre 函数, $n=0, 1, 2, \dots, N_m; m \leq n; \delta M'_s(m)$ 为频域中

的点质量。式(7)即为点质量调和分折的基本公式,关键问题是如何应用重力梯度观测数据构建全球点质量模型。

3.2 基于全球点质量模型的卫星重力梯度

观测方程

假定重力梯度边界球面与 B 氏球面也做成相同的划分,而观测数据是每个格网中点扰动重力梯度值 $\dot{f}_{p_i,k}$ 或者是格网平均扰动重力梯度值 $\bar{f}_{p_i,k}$ ($i=0,1,\dots,N-1;k=0,1,\dots,2M-1$),则离散球面边值条件方程分别为^[19]

$$\dot{f}_{p_i,k} = G \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{2M-1} \dot{L}_{ikst}^p \delta M_{st} \quad (8)$$

$$\bar{f}_{p_i,k} = G \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{2M-1} \bar{L}_{ikst}^p \delta M_{st} \quad (9)$$

式中,系数 \dot{L}_{ikst}^p 分别表示为

$$\dot{L}_{ikst}^0 = \frac{3(R_s - R_B \cos \psi_{ikst})^2}{\dot{L}_{ikst}^2} - \frac{1}{\dot{L}_{ikst}^3} \quad (10)$$

$$\dot{L}_{ikst}^1 = \frac{3R_B(R_s - R_B \cos \psi_{ikst}) \sin \psi_{ikst}}{\sqrt{2} \dot{L}_{ikst}^5} e^{j\gamma_{ikst}} \quad (11)$$

$$\dot{L}_{ikst}^2 = \frac{3R_B^2 \sin^2 \psi_{ikst}}{2 \dot{L}_{ikst}^5} e^{j2\gamma_{ikst}} \quad (12)$$

如图 1 所示, l_{ikst} 和 ψ_{ikst} 分别为研究点 P_{ik} 至流点 Q_{st} 之间的距离和球心角距,并有如下关系式

$$l_{ikst} = \sqrt{R_s^2 + R_B^2 - 2R_s R_B \cos \psi_{ikst}} \quad (13)$$

$$\cos \psi_{ikst} = \cos \theta_i \cos \theta_s + \sin \theta_i \sin \theta_s \cos (\lambda_t - \lambda_k) \quad (14)$$

γ_{ikst} 为 Q_{st} 点相对于 P_{ik} 点的球面方位角,有如下关系式

$$\sin \psi_{ikst} \sin \gamma_{ikst} = \sin \theta_s \sin (\lambda_t - \lambda_k) \quad (15)$$

$$\sin \psi_{ikst} \cos \gamma_{ikst} = \sin \theta_i \cos \theta_s - \cos \theta_i \sin \theta_s \cos (\lambda_t - \lambda_k) \quad (16)$$

系数 \bar{L}_{ikst}^p 可按下式计算

$$\bar{L}_{ikst}^p = \frac{\iint \dot{L}_{ikst}^p d\sigma_{ik}}{\iint d\sigma_{ik}} \quad (17)$$

式(13)~(16)代入式(10)~(12)即可计算系数 \dot{L}_{ikst}^p 。把 \dot{L}_{ikst}^p 代入式(17),用常用的数值积分方法即可求得 \bar{L}_{ikst}^p 。方程(8)或者(9)即为由扰动引力梯度数据构建点质量模型的基本方程。对于全球 $30' \times 30'$ 的单个重力梯度分量,直接求解需要解算约 26 万阶方程组;若同时处理重力梯度全张量,或者处理更高分辨率的观测数据,则需要解算更高阶方程组,解算如此大型方程组是比较困难的,文献[18]提出利用循环矩阵降阶求逆的方法解决该问题。

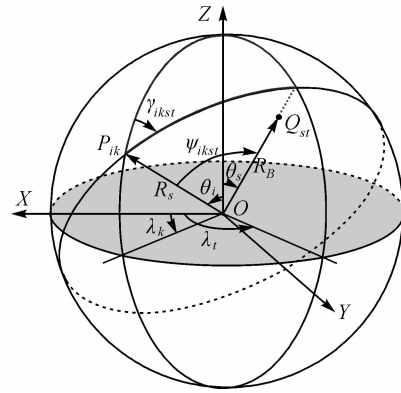


图 1 点质量在球极坐标系和球坐标系中的表示

Fig. 1 Expressions of point-mass both in spherical polar coordinate system and spherical coordinate system

3.3 基于卫星重力梯度的点质量最小二乘解

把离散的重力梯度观测数据 ($\dot{f}_{p_i,k}$ 或 $\bar{f}_{p_i,k}$) 统一简写为 $f_{p_i,k}$,并作以下排列

$$\mathbf{f}_p = [f_{p_i,0} \quad f_{p_i,1} \quad \dots \quad f_{p_i,i} \quad \dots \quad f_{p_i,N-1}]^T \quad (18)$$

式中, f_{p_i} 是第 i 个纬度圈上所有观测值组成的向量

$$\mathbf{f}_{p_i} = [f_{p_i,0} \quad f_{p_i,1} \quad \dots \quad f_{p_i,k} \quad \dots \quad f_{p_i,2M-1}]^T \quad (19)$$

同时,把待求扰动点质量作同样的排列,则方程组(8)和(9)可以改写成

$$\mathbf{A}_p \delta \mathbf{M} = \mathbf{f}_p, \quad p=0,1,2 \quad (20)$$

如此排列后,系数 \dot{L}_{ikst}^p 或 \bar{L}_{ikst}^p 是经差的周期函数,系数阵 \mathbf{A}_p 可以分解成 N^2 个维数为 $2M \times 2M$ 的 Toeplitz 循环矩阵 \mathbf{A}_p^{is} ($i,s=0,1,\dots,N-1$),并且有如下关系式^[21]

$$\mathbf{A}_p^{is} = \mathbf{F} \mathbf{D}_p^{is} \mathbf{F}^{-1}, \quad p=0,1,2 \quad (21)$$

式中, \mathbf{F} 为 $2M$ 阶离散傅里叶变换矩阵, \mathbf{D}_p^{is} 为 \mathbf{A}_p^{is} 的 $2M$ 个特征根 $a_{p,m}^{is}$ ($m=0,1,\dots,2M-1$) 组成的对角阵,即有 $\mathbf{D}_p^{is} = \text{diag} (a_{p,0}^{is}, a_{p,1}^{is}, \dots, a_{p,2M-1}^{is})$, 其中

$$a_{p,m}^{is} = \sum_{t=0}^{2M-1} A_{p,i,t}^{is} e^{-j2\pi \frac{mt}{2M}} \quad (22)$$

下面分重力梯度张量径向实数分量、水平复数分量以及全张量三类情况。

3.3.1 观测量为重力梯度径向实数分量 ($p=0$)

当 $p=0$ 时,系数矩阵 \mathbf{A}_p 和向量 \mathbf{f}_p 均为实数,观测量个数与待求参数个数相同,设观测量矩阵 $\mathbf{P}=\mathbf{I}$,求解式(20),可得

$$\delta \mathbf{M} = (\mathbf{A}_p^T \mathbf{P} \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{P} \mathbf{f}_p = \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{f}_p, \quad p=0 \quad (23)$$

令

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p^{0,0} & \cdots & \mathbf{D}_p^{0,N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{D}_p^{N-1,0} & \cdots & \mathbf{D}_p^{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

则由式(21),可得

$$\mathbf{A}_p^{-1} = \mathbf{F}_D \mathbf{D}_p^{-1} \mathbf{F}_D^{-1}, \quad p=0 \quad (25)$$

上式代入式(23)可得

$$\mathbf{F}_D^{-1} \delta \mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{F}_D^{-1} \mathbf{f}_p \quad (26)$$

令

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{f}_{p;i}) = \mathbf{f}'_{p;i}, \quad i=0,1,\dots,N-1 \quad (27)$$

$$\mathbf{F}^{-1}(\delta \mathbf{M}_s) = \delta \mathbf{M}'_s, \quad s=0,1,\dots,N-1 \quad (28)$$

可得如下线性方程组

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{M}'_0 \\ \vdots \\ \delta \mathbf{M}'_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p^{0,0} & \cdots & \mathbf{D}_p^{0,N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{D}_p^{N-1,0} & \cdots & \mathbf{D}_p^{N-1,N-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_{p;0} \\ \vdots \\ \mathbf{f}'_{p;N-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

追踪指标 m ($m=0,1,\dots,2M-1$), 设

$$\mathbf{R}_p(m) = \begin{bmatrix} a_{p;m}^{0,0} & a_{p;m}^{0,1} & \cdots & a_{p;m}^{0,N-1} \\ a_{p;m}^{1,0} & a_{p;m}^{1,1} & \cdots & a_{p;m}^{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p;m}^{N-1,0} & a_{p;m}^{N-1,1} & \cdots & a_{p;m}^{N-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\delta \mathbf{M}'(m) = [\delta \mathbf{M}'_{0,m} \quad \delta \mathbf{M}'_{1,m} \quad \cdots \quad \delta \mathbf{M}'_{N-1,m}]^T \quad (31)$$

$$\mathbf{f}'_p(m) = [\mathbf{f}'_{p;0,m} \quad \mathbf{f}'_{p;1,m} \quad \cdots \quad \mathbf{f}'_{p;N-1,m}]^T \quad (32)$$

则式(26)可以化简为

$$\delta \mathbf{M}'(m) = \mathbf{R}_p^{-1}(m) \mathbf{f}'_p(m), \quad p=0 \quad (33)$$

3.3.2 观测量为重力梯度水平复数分量($p=1,2$)

当 $p=1,2$ 时,系数矩阵 \mathbf{A}_p 和观测向量 \mathbf{f}_p 均为复数,实数观测量个数是待求参数个数的两倍,设观测量的权阵为 $\mathbf{P}=\mathbf{I}$,运用最小二乘原理可得

$$\delta \mathbf{M} = (\mathbf{A}_p^+ \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{A}_p^+ \mathbf{f}_p, \quad p=1,2 \quad (34)$$

式中,上标符号“+”表示转置复共轭。

当 $p=1,2$ 时,存在类似于式(25)的关系式

$$(\mathbf{A}_p^+ \mathbf{A}_p)^{-1} = \mathbf{F}_D (\mathbf{D}_p^T \mathbf{D}_p)^{-1} \mathbf{F}_D^{-1} \quad (35)$$

代入式(34),可得

$$\mathbf{F}_D^{-1} \delta \mathbf{M} = (\mathbf{D}_p^T \mathbf{D}_p)^{-1} \mathbf{D}_p^T \mathbf{F}_D^{-1} \mathbf{f}_p \quad (36)$$

类似于式(33)的推导过程,可得频域中的最小二乘解为

$$\delta \mathbf{M}'(m) = [\mathbf{R}_p^T(m) \mathbf{R}_p(m)]^{-1} \mathbf{R}_p^T(m) \mathbf{f}'_p(m), \quad p=1,2 \quad (37)$$

由于循环 Toeplitz 复数阵 \mathbf{A}_p^s ($p=1,2$) 的特征根仍为实数, $\mathbf{R}_p(m)$ 是实数矩阵,因此在计算时,只需保存和计算实数部分,既可节约存储空间,又可提高计算速度。

3.3.3 观测量为重力梯度全张量

设三个观测量的权阵分别为 $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$, 并假设 $\mathbf{P}_0 = 2\mathbf{P}_1 = 2\mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$, 则由式(20)可得组合方程

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_0 \delta \mathbf{M} &= \mathbf{f}_0, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_1 \delta \mathbf{M} &= \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{P}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_2 \delta \mathbf{M} &= \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

根据最小二乘原理,得到点质量解为

$$\delta \mathbf{M} = (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2)^{-1} \cdot (\mathbf{A}_0^T \mathbf{f}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1^T \mathbf{f}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_2^T \mathbf{f}_2) \quad (39)$$

类似于式(33)的推导过程,将式(39)转换到频域中,可得

$$\delta \mathbf{M}'(m) = [\mathbf{R}_0^T(m) \mathbf{R}_0(m) + \frac{1}{2} \mathbf{R}_1^T(m) \mathbf{R}_1(m) + \frac{1}{2} \mathbf{R}_2^T(m) \mathbf{R}_2(m)]^{-1} [\mathbf{R}_0^T(m) \mathbf{f}'_0(m) + \frac{1}{2} \mathbf{R}_1^T(m) \mathbf{f}'_1(m) + \frac{1}{2} \mathbf{R}_2^T(m) \mathbf{f}'_2(m)] \quad (40)$$

由式(33)、式(37)和式(40)可知,运用 Toeplitz 循环矩阵的特性,采用分块循环矩阵分解大型线性方程组的方法,解决全球点质量模型构建时大型线性方程组的解算问题。如全球 $30' \times 30'$ 扰动点质量模型 259 200 阶方程组的解算可分解为 720 个 360 阶方程组的解算,有助于降低乘法计算次数和计算机截断表示等引入的误差,提高解算结果的稳定性和计算速度。另外,从式(40)可知,联合处理卫星重力梯度全张量或者多个分量的法方程矩阵相当于单个分量的法方程矩阵相加,从而只增加观测数据的类型,不增加法方程矩阵的维数,因此能够方便地同时处理不同的卫星重力梯度张量分量。

至此,基于点质量法重力梯度调和与分析就是把重力梯度观测数据代入方程(20),分别根据式(33)、式(37)和式(40)求得在谱域中的扰动点质量模型,最后代入式(7)求得球谐系数。

4 模拟试算及分析

4.1 数值模拟试算方法

为了有效地评价点质量调和和分析方法的优劣,采用如图 2 所示数值模拟思路。

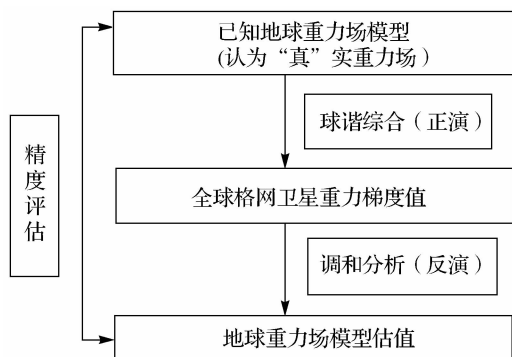


图 2 调和仿真分析方法数值计算流程

Fig. 2 Numerical calculation flow chart of the simulation harmonic analysis

首先选择精度较好的 EGM2008 地球重力场模型作为“真”实的地球重力场;然后采用球谐综合算法解算得到全球分布的分辨率为 $30' \times 30'$ 的三类重力梯度观测数据 ($\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 T$ 、 $\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_0 T$ 和 $\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 T$),由文献[23]可知,直接模拟生成的分辨率为 $30' \times 30'$ 的格网数据的精度优于 10^{-7} mE ($1 \text{ mE} = 10^{-12} \text{ s}^{-2}$),其误差可以忽略不计。最后分别采用基于单分量和全张量的点质量调和和分析方法求解得到地球重力场模型系数估值,并进行精度评定。球谐综合过程是由球谐系数解算重力场元,是正演过程,精度较高;而调和和分析过程是由重力场元解算球谐系数,是反演过程,计算精度相对较差,因此计算所得重力场模型与已知重力场模型必然存在差异,即不能 100% 恢复地球重力场。而且其差异主要是由调和和分析过程引起的,因此通过分析位系数差异的大小来评价调和和分析方法的优劣是可行的方法。

最后采用调和和分析方法求解得到地球重力场模型系数估值,并采用如下两种方式进行精度评估。

(1) 重力场模型系数估值的次方差误差 (error order RMS),即重力场模型系数误差中某次各阶位系数误差平方和的均方值

$$\sigma M_m = \sqrt{\frac{1}{2(N-m+1)} \sum_{n=m}^N (\delta \bar{C}'_{nm}{}^2 + \delta \bar{S}'_{nm}{}^2)} \quad (41)$$

式中,位系数误差为

$$\left. \begin{aligned} \delta \bar{C}'_{nm} &= (\bar{C}'_{nm}{}^{\text{est}} - \bar{C}'_{nm}{}^{\text{EGM}}) \\ \delta \bar{S}'_{nm} &= (\bar{S}'_{nm}{}^{\text{est}} - \bar{S}'_{nm}{}^{\text{EGM}}) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

式中, $(\bar{C}'_{nm}{}^{\text{est}}, \bar{S}'_{nm}{}^{\text{est}})$ 为采用调和和分析方法得到扰动重力场模型系数估值, $(\bar{C}'_{nm}{}^{\text{EGM}}, \bar{S}'_{nm}{}^{\text{EGM}})$ 为 EGM2008 模型减去参考模型所得的扰动重力场模型。

(2) 求解模型系数与参考模型系数的差,即 $\delta \bar{C}'_{nm}$ 和 $\delta \bar{S}'_{nm}$,得到求解模型系数的误差谱,绘图时取系数误差绝对值的常用对数。

4.2 点质量调和仿真分析

分别采用 $\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 T$ 、 $\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_0 T$ 和 $\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 T$ 三类单分量观测数据及其构成的全张量观测数据构建相应分辨率的点质量模型。点质量埋藏深度一般选择与点质量间距大致相等,即构制区域 $30' \times 30'$ 点质量模型最佳埋藏深度约 50 km^[16]。因此质点埋藏深度取为 $D=50 \text{ km}$,点质量调和和分析所求得重力场模型估值的次方差误差和误差谱分别见图 3、图 4。

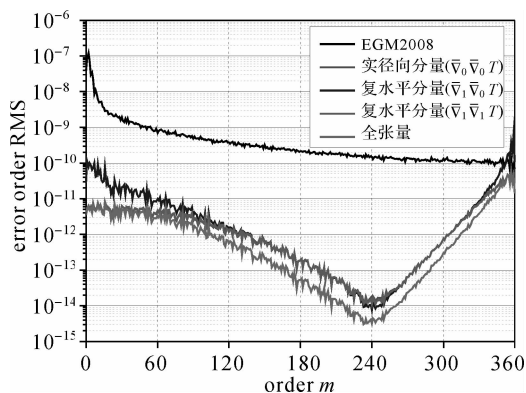


图 3 点质量调和和分析解的次方差误差

Fig. 3 Error order RMS of the solution of point-mass harmonic analysis

从图 3 可以看出,点质量调和和分析的次方差误差曲线呈“V”字形,并且到次数约为 240 时达到最小。主要原因是当埋藏深度 D 一定时,矩阵 $R(m)$ 的结构随着 m 变化,当 m 约为 240 时,矩阵结构较好,求逆准确。联合处理三类重力梯度数据 $\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 T$ 、 $\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_0 T$ 和 $\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 T$ 的结果略优于单独处理任一类重力梯度数据的结果,主要是因为法方程矩阵叠加后改善了单个分量的法矩阵的结构,提高了计算精度。

为更好地与其他方法进行比较,本文采用相同的数据,运用广义轮胎调和和分析方法进行计算,所得模型估值的误差谱如图 5 所示。两种调和和分析解的误差谱统计见表 1。

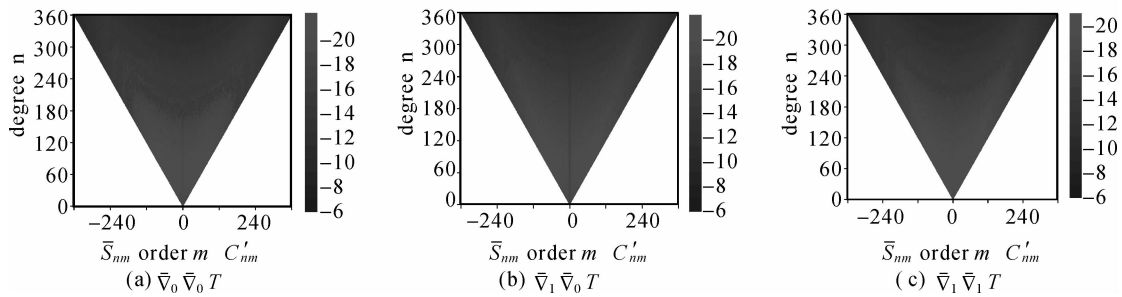


图 4 点质量调和和分析解的误差谱

Fig. 4 Spectral errors of the solution of point-mass harmonic analysis

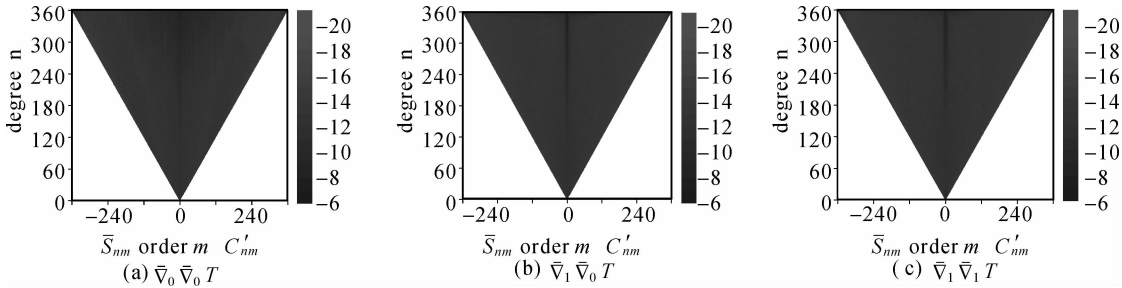


图 5 广义轮胎调和和分析解的误差谱

Fig. 5 Spectral errors of the solution of generalized torus harmonic analysis

表 1 两种调和和分析解的误差谱的统计

Tab. 1 Statistics of spectral errors for the solution of two kinds of harmonic analysis methods

	$\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 T$			$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_0 T$			$\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 T$		
	max	min	mean	max	min	mean	max	min	mean
点质量调和和分析	-10.0	-22.7	-15.2	-8.6	-22.6	-15.2	-10.0	-23.0	-15.3
广义轮胎调和和分析	-7.2	-18.9	-13.2	-7.4	-18.2	-13.2	-7.5	-18.6	-13.2

由图 4、图 5 可知,无论是点质量调和和分析解,还是轮胎调和和分析解,其误差谱的图形关于 m 成对称分布,即当 n 相同时,模型系数 C'_{nm} 与 S_{nm} 具有相同的精度。由表 1 可知,针对三类卫星重力梯度数据($\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_0 T$ 、 $\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_1 T$ 和 $\bar{\nabla}_1 \bar{\nabla}_1 T$),点质量调和和分析解的有效位数均比轮胎调和和分析解的有效位数高 2 位。可见,点质量调和和分析方法要优于广义轮胎调和和分析方法。

5 结论

本文就如何利用重力梯度这一新型重力场观测数据通过点质量模型,构建全球重力场模型系数的方法进行研究。建立由全球分布的重力梯度张量单分量或全张量数据解算全球分布的扰动点质量模型的基本方程,并采用分块循环矩阵分解大型线性方程组的方法解决大规模点质量的解算问题,既改善解算稳定性,又提高解算速度。

点质量调和和分析方法能够方便的解算卫星重力梯度超定边值问题,法矩阵的叠加也有效的改善法矩阵的结构,提高计算精度。数值试验表明,只要在适当选取点质量埋藏深度的情况下,点质量调和和分析方法能以较高精度恢复位系数,并且精度优于广义轮胎调和和分析方法。

参考文献:

[1] European Space Agency. ESA's Gravity Mission GOCE [EB/OL]. [2010-03-20]. <http://www.esa.int/living-planet/goce>.

[2] BOUMAN J, RISPENS S, KOOP R. GOCE Gravity Gradients for Use in Earth Sciences[C]// Proceedings of the 3rd International GOCE User Workshop. Frascati: ESA SP-627, 2007:135-139.

[3] VISSER P, VAN DEN IJSSEL J, VAN HELLEPUTTE T, et al. Rapid and Precise Science Orbit Determination for the GOCE Satellite [C]// Proceedings of the 3rd International GOCE User Workshop. Frascati: ESA SP-627,

- 2007; 235-239.
- [4] GRUBER T, RUMMEL R, KOOP R. How to Use GOCE Level 2 Products [C] // Proceedings of the 3rd International GOCE User Workshop. Frascati: ESA SP-627, 2007; 205-211.
- [5] KOOP R. Global Gravity Field Modeling Using Satellite Gravity Gradiometry [R]. Delft: Netherlands Geodetic Commission, 1992.
- [6] RUMMEL R, VAN GELDEREN M, KOOP R, et al. Spherical Harmonic Analysis of Satellite Gradiometry [R]. Delft: Netherlands Geodetic Commission, 1993.
- [7] LUO Zhicai, CHAO Dingbo, NING Jinsheng. Spherical Harmonic Analysis on Gravity Gradient Tensor [J]. Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1997, 22(4): 346-349. (罗志才, 晁定波, 宁津生. 重力梯度张量的球谐分析 [J]. 武汉测绘科技大学学报, 1997, 22(4): 346-349.)
- [8] ZHANG Chuanding, LU Zhonglian, WU Xiaoping. Generalized Spherical Harmonic Functions and Its Applications on the BVPs of Gravity Gradients [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1998, 27(3): 252-258. (张传定, 陆仲连, 吴晓平. 广义球谐函数及其在重力梯度边值问题中的应用 [J]. 测绘学报, 1998, 27(3): 252-258.)
- [9] RUMMEL R, COLOMBO O L. Gravity Field Determination from Satellite Gradiometry [J]. Bulletin Geodesique, 1985, 59(3): 233-246.
- [10] SNEEUW N. A Semi-analytical Approach to Gravity Field Analysis from Satellite Observation [D]. Munchen: University of Munchen, 2000.
- [11] WU Xing, ZHANG Chuanding, ZHAO Dongming. Generalized Torus Harmonic Analysis of Satellite Gravity Gradients Component [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2009, 38(2): 101-107. (吴星, 张传定, 赵东明. 卫星重力梯度分量的广义轮胎调和解析方法 [J]. 测绘学报, 2009, 38(2): 101-107.)
- [12] ZHANG Chuanding. Satellite-borne Gravity Measurement, Foundation, Modeling Methods, and Data Processing Algorithms [D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2000. (张传定. 卫星重力测量——基础、模型化方法与数据处理算法 [D]. 郑州: 信息工程大学, 2000.)
- [13] SANSÒ F, TSCHERNING C C. Fast Spherical Collocation: Theory and Examples [J]. Journal of Geodesy, 2003, 77(1): 101-112.
- [14] WANG Haihong, LUO Zhicai, LUO Jia, et al. Preliminary Research on Multi-resolution Least Square Collocation [J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2006, 26(1): 115-118. (汪海洪, 罗志才, 罗佳, 等. 多分辨率最小二乘配置法初探 [J]. 大地测量与地球动力学, 2006, 26(1): 115-118.)
- [15] NEEDHAM P E. The Formation and Evaluation of Detailed Geopotential Models Based on Point Masses [R]. Ohio: Ohio State Univ Columbus Dept of Geodetic Science, 1970.
- [16] WU Xiaoping. Point-mass Model of Local Gravity Field [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1984, 13(4): 249-258. (吴晓平. 局部重力场的点质量模型 [J]. 测绘学报, 1984, 13(4): 249-258.)
- [17] VAJDA P, VANÍČEK P. Truncated Geoid and Gravity Inversion for One Point-mass Anomaly [J]. Journal of Geodesy, 1999, 73(2): 58-66.
- [18] WU Xing, ZHANG Chuanding, ZHAO Dongming. Point Mass Harmonic Analysis Method Based on Spherical Boundary Value Problem [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2009, 52(12): 2993-3000. (吴星, 张传定, 赵东明. 基于球面边值问题的点质量调和解析方法 [J]. 地球物理学报, 2009, 52(12): 2993-3000.)
- [19] WU Xing, ZHANG Chuanding, LIU Xiaogang. Point-mass Model Construction Based on Satellite Gravity Gradients [J]. Journal of Geomatics Science and Technology, 2009, 26(6): 414-417. (吴星, 张传定, 刘晓刚. 基于卫星重力梯度数据的点质量模型的构建 [J]. 测绘科学技术学报, 2009, 26(6): 414-417.)
- [20] MORITZ H. Advanced Physical Geodesy [M]. England: Abacus Press, 1980.
- [21] XU Zhong, ZHANG Kaiyuan, LU Quan. Fast Arithmetic of Toeplitz Band Matrices [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2001: 31-33. (徐仲, 张凯院, 陆全. Toeplitz 矩阵类的快速算法 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2001: 31-33.)
- [22] PAVILIS N K, HOLMES S A, KENYON S C, et al. An Earth Gravitational Mode to Degree 2160 [R]. Vienna: EGU, 2008.
- [23] WU Xing, ZHANG Chuanding, YE Xiusong, et al. Simulation of Satellite Gravity Gradient Tensor Observations [J]. Journal of Geomatics Science and Technology, 2008, 25(6): 391-395. (吴星, 张传定, 叶修松, 等. 卫星重力梯度数据的模拟研究 [J]. 测绘科学技术学报, 2008, 25(6): 391-395.)

(责任编辑:宋启凡)

收稿日期: 2010-04-19

修回日期: 2010-09-03

第一作者简介: 吴星(1979—),男,博士,工程师,主要从事大地测量学与测量工程方面的研究工作。

First author: WU Xing(1979—), male, PhD, engineer, majors in the geodesy and survey engineering.

E-mail: wuxing1979@163.com