

文章编号:1001-1595(2011)01-0028-05

基于中位参数初值的等价权抗差估计方法

杨 玲¹, 沈云中^{1,2}, 楼立志^{1,2}

1. 同济大学 测量与国土信息工程系, 上海 200092; 2. 现代工程测量国家测绘局重点实验室, 上海 200092

Equivalent Weight Robust Estimation Method Based on Median Parameter Estimates

YANG Ling¹, SHEN Yunzhong^{1,2}, LOU Lizhi^{1,2}

1. Department of Surveying and Geo-informatics Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Advanced Surveying Engineering of SBSM, Shanghai 200092, China

Abstract: The robust estimation based on equivalent weights keeps the outstanding properties of least squares (LS) adjustment in processing normal observations. Nevertheless, its robustness is highly related to the initial values. If the LS estimates, which are insensitive to outliers, are used as initial values it will certainly impact the robust characteristics of equivalent weight robust estimates. Comparatively, the least median (LM) estimates are much robust than LS estimates, but they are computed only with parts of observations, and many available observations are not used. We put forwards the median parameter robust estimation and present an approximate method to estimate its breakdown point in finite observation cases. By integrating the advantages of median parameter estimation with equivalent weight robust estimation, we take the median parameter estimates as the initial values and carry out equivalent weight robust estimation to compute the final results. The numerical experiments show that our robust estimation method of combined median parameter and equivalent weight is much better than individual robust estimations or median parameter estimation.

Key words: robust estimation; equivalent weight; median parameter; breakdown point

摘 要: 等价权抗差估计法保留最小二乘估计处理正常观测值的优良特性, 但其抗差性与初值关系极大, 若用最小二乘估值作初值, 必定会影响其抗差性。中位数法具有很好的抗差特性, 但它只用部分观测数据计算参数估值, 丢失大量有效信息。基于中位参数的抗差估计方法, 在有限样本时, 给出其崩溃污染率的估算方法。根据中位参数法和等价权抗差估计法的各自优点, 先用中位参数法计算初值, 再用等价权抗差估计法计算最终的参数估值。试验结果表明: 该方法比基于最小二乘初值的等价权法具有更强的抗差性, 比中位参数法的计算精度高。

关键词: 抗差估计; 等价权; 中位参数; 崩溃污染率

中图分类号: P207 文献标识码: A

基金项目: 国家自然科学基金(40874016)

1 引 言

等价权抗差估计法的关键是选择具有抗差性的初值和合适的等价权构造算法。Hubert 在 1981 年最早提出等价权函数的概念, 随后出现一些改进方法, 如 P 范最小法、丹麦法、正弦估计法等^[1]。国内的相关研究有李德仁提出的验后方差估计法^[2], 周江文和杨元喜对抗估计理论作了深入的研究, 提出 IGGI 到 IGGIII 方案^[3-4], 抗差拟合推估, 抗差 Bayesian 估计, 相关观测值的抗差估计, 并将抗差估计应用到自适应导航^[5-10]。等价权抗差估计法保留最小二乘估计处理正常观测值的优良特性, 但最小二乘估计对异常观测值非常敏感, 因而以之为初值会降低等价权抗差估计

的性能。为提高等价权抗差估计的效果, 文献^[5]通过调整等价权因子实现自适应抗差估计, 还综合利用中位数估计与等价权抗差估计有效地估计基准转换参数^[11]; 文献^[12]利用参数的一范解构造等价权抗差估计法的初值, 但需要单位权中误差的先验值。

文献^[13]提出的中位数法, 具有很强的抗差能力, 文献^[14]在此基础上提出二次残差中位数极小型估计(LMS)^[14-15]。此外, 文献^[16]提出符号约束的抗差估计^[16], 但该方法计算效率低。Hampel 于 1974 年引入崩溃污染率的概念, 为分析估计方法对观测值的敏感度以及估值的整体抗差性提供有力的理论测度, 崩溃污染率是使参数估值完全失常的粗差的最小比率。

本文根据不同组合的参数估值计算各参数的中位数,选择最接近中位数的一组估值作初值,进行等价权抗差估计,并用算例验证该方法综合中位数法和最小二乘法的优点,计算结果优于中位数法及以最小二乘估值作初值的等价权抗差估计法。

2 等价权与中位数抗差估计方法

对于线性观测方程

$$v = Ax - l \quad (1)$$

式中, A 为 $m \times n$ 阶列满秩阵; x 为 $n \times 1$ 阶参数向量; l 和 v 分别为 $m \times 1$ 阶观测向量和残差向量; P 为 $m \times m$ 阶观测权阵。给定参数 x 和单位权中误差 σ_0 的初值,则等价权抗差估计法解算的迭代形式为

$$\left. \begin{aligned} x^{k+1} &= (A^T \bar{P}^k A)^{-1} A^T \bar{P}^k l \\ v^{k+1} &= Ax^{k+1} - l \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, \bar{P}^k 是与观测值残差和权阵相关的等价权阵^[2-5]。等价权有多种计算方法,本文算例采用 IGGIII 方案^[9],其权函数为

$$\bar{P}_i = \begin{cases} p_i, & |u_i| < k_0 \\ p_i \frac{k_0}{|u_i|} \frac{(k_1 - |u_i|)^2}{(k_1 - k_0)^2}, & k_0 < |u_i| \leq k_1 \\ 0, & k_1 \leq |u_i| \end{cases} \quad (3)$$

式中, \bar{P}_i 是等价权阵的第 i 个对角元素; $|u_i|$ 是第 i 个标准化残差; k_0 、 k_1 是预先确定的参数。

中位数法具有很强的抗差性,最初只用于单参数估计,文献[14]通过选取子样求解多参数情况下二次残差的中位数估值,并提出 LMS 法^[14]。对线性观测方程式(1),从 m 个观测方程中选择 n 个方程,解算参数 x ,共有 $p = C_m^n$ 组解,并根据式(1)计算 p 组残差向量。任意一组残差向量 v_i 中各元素平方的中位数值可表示为

$$\text{med}(v_i^2) = \text{median}[v_{i1}^2 \quad v_{i2}^2 \quad \cdots \quad v_{in}^2]^T \quad (4)$$

式中, $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$ 表示残差向量 v_i 中的元素; median 为取中位数算子。则对 p 组残差向量而言,有

$$v_{\text{med}} = \min(\sqrt{\text{med}(v_1^2)}, \sqrt{\text{med}(v_2^2)}, \dots, \sqrt{\text{med}(v_p^2)}) \quad (5)$$

式中, \min 为取最小值算子,选择残差 v_{med} 对应的那组参数估值为中位数抗差估值,其单位权中误差估值为

$$\sigma_i = 1.483 v_{\text{med}} \quad (6)$$

文献[15]认为 LMS 法的崩溃污染率可高达 50%,但当多个参数或粗差成聚集状偏向真值一侧时,该结论并不成立^[16]。

3 中位数抗差估计理论

3.1 中位数抗差估值计算

从式(1)的 m 个观测方程中选择 n 个方程估计参数 x ,定义 D_x 为参数 x 的解空间,对于任一解向量 x_k ,则有

$$\left. \begin{aligned} x_k \in D_x &= \{x | A_k x = l_k; A_k = (a_{ij})_{n \times n}, \\ & l_k = (l_{i1})_{n \times 1}, k = 1, \dots, p \} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中, A_k, l_k 分别为观测方程(1)中矩阵 A 和向量 l 的一个 n 阶子块。共可选择 $p = C_m^n$ 组子块,求得 p 组解向量。利用各组解向量的第 i 个元素,构成新的 p 维向量 $x^i = [x_1^i \quad x_2^i \quad \cdots \quad x_p^i]$,求取其中位数 $\text{median}(x^i)$,则中位数参数构成的向量为

$$x_{\text{med}} = [\text{median}(x^1) \quad \text{median}(x^2) \quad \cdots \quad \text{median}(x^n)]^T \quad (8)$$

计算各组解与中位数参数的差值

$$dx_k = x_k - x_{\text{med}}, \quad x_k \in D_x, \quad k = 1, \dots, p \quad (9)$$

对 p 组解向量而言,有

$$\min_dx = \min(\|dx_1\|, \|dx_2\|, \dots, \|dx_p\|) \quad (10)$$

式中, $\|dx_k\|$ 表示向量 dx_k 的二次范数。最小值 \min_dx 对应的参数解就是所求的中位数参数解,并根据式(1)计算其对应的残差向量,根据式(6)估计其单位权中误差 σ_0 。

3.2 崩溃污染率的近似估计

众所周知,单参数中位数法的崩溃污染率接近 50%,也就是说如果一半以上的观测值是正常的,其中位数必定是正常的。从这一思想出发,如果含粗差的观测值个数为 r ,则参数 x 的 C_m^n 个解向量中,不含粗差的解向量有 C_{m-r}^n 个。为保证中位数参数估值的抗差性,必须满足

$$C_{m-r}^n \geq C_m^n / 2 \quad (11)$$

此时,不含粗差的组合占有所有组合的 50% 以上,能确保中位数解由不含粗差的观测值求得,因此式(11)可用于估计平差系统从 m 个观测值中能探测的最大粗差个数 r 。由式(11)可知,该最大粗差个数 r 随观测值个数 m 和参数个数 n 变化。根据崩溃污染率的定义,其估值可表示为

$$f = r/m \quad (12)$$

表 1 给出各种情况下根据式(12)求得的崩溃污染率估值。

表 1 崩溃污染率估值与观测值个数和参数个数的关系
Tab. 1 Approximate estimates of breakdown point in finite observation cases

多余观测数	参数个数					
	1	2	3	4	5	6
10	0.455	0.250	0.154	0.071	0.067	0.063
20	0.476	0.273	0.174	0.125	0.080	0.077
50	0.490	0.288	0.189	0.148	0.109	0.089
100	0.495	0.291	0.202	0.154	0.124	0.104
200	0.498	0.292	0.204	0.157	0.127	0.107
500	0.499	0.292	0.205	0.157	0.128	0.107
1 000	0.500	0.292	0.205	0.158	0.129	0.108

表 1 显示,参数个数不变时,多余观测数越多,崩溃污染率估值越大,但当多余观测数超过 100 时,该估值趋于稳定;多余观测数相同时,参数越多,估计的崩溃污染率越低,说明中位数及本文中位参数法的崩溃污染率与参数个数有关。但需说明的是,式(12)所能反映的是平差问题平均崩溃污染率,至于出现在某个特定位置上的粗差能否成功剔除,则需要根据不同网形,应用粗差探测方法具体确定。

4 数据试验与分析

采用模型 $y_i = \beta_1 + x_i\beta_2 + \epsilon_i^{[16]}$, 令 $\beta_1 = 2.0$, $\beta_2 = -0.9$, 对于 m_1 个正常观测值,模拟 x_i 在区间 $[1,6]$ 上服从均匀分布, $\epsilon_i \sim N(0,0.2)$, ($i=1,2,\dots,m_1$), 根据模型计算 y_i , 对于粗差模拟三种分布: ① $x_j \sim N(4.5,0.5)$, $y_j \sim N(2.5,0.5)$, ($j=1,2,\dots,m_2$), m_2 为含粗差的观测值个数; ② x_j 在区间

$[1,6]$ 上服从均匀分布,当 $j=1,2,\dots,[m_2/3]$ (“ $[*]$ ”表示取整)时, $y_j \sim N(-2.5,0.5)$, 当 $j=[m_2/3]+1,\dots,m_2$ 时, $y_j \sim N(2.5,0.5)$; ③ x_j 同分布②,当 $j=1,2,\dots,[m_2/2]$ 时, $y_j \sim N(-2.5,0.5)$, 当 $j=[m_2/2]+1,\dots,m_2$ 时, $y_j \sim N(2.5,0.5)$ 。

每次模拟观测值个数 $m=100$; 参数个数 $n=2$ 。采用独立观测值的 IGG III 等价权函数,根据文献[9],取 $k_0=3.5, k_1=5.5$ 。分以下两种方案进行试验:

(1) 比较三种抗差估计方法的抗差性,即基于最小二乘初值的等价权抗差估计法、中位参数法和基于中位参数法初值的等价权抗差估计法。对每种粗差分布,模拟三组试验,分别用这三种估计方法进行解算。粗差个数与观测值个数之比(粗差比)为 30%, 每组模拟 1 000 次,表 2 为三种方法的外符合精度。

(2) 验证前文所述崩溃污染率估计结果的正确性。对三种粗差分布,分别模拟粗差比从 30% 增加到 50% 的五组试验,每组模拟 400 次,统计粗差比不同时,本文基于中位参数法初值的等价权抗差估计结果的外符合精度,见表 3。

外符合精度计算公式如下

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (x_i - \hat{x})^2} / t \quad (13)$$

式中, t 是每组试验的模拟次数; x_i 是每次计算的参数估值; \hat{x} 是参数的真值; S_x 是参数估值的均方根误差,用来衡量参数估值的外符合精度。

表 2 模拟情况 1 的外符合精度

Tab. 2 Standard deviations of parameters in test 1

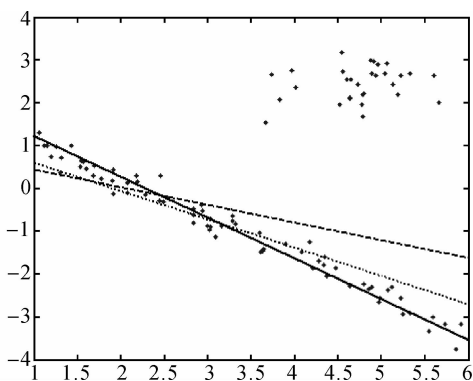
粗差分布	经典等价权抗差估计			中位参数估计			中位参数初值的等价权法		
	S_{β_1}	S_{β_2}	S_σ	S_{β_1}	S_{β_2}	S_σ	S_{β_1}	S_{β_2}	S_σ
1	0.936 3	0.598 7	1.793 2	0.289 4	0.112 2	0.245 2	0.063 2	0.016 9	0.024 9
2	0.698 8	0.294 5	1.528 6	0.141 4	0.047 5	0.137 2	0.070 0	0.019 5	0.044 1
3	0.518 6	0.286 5	1.416 6	0.114 3	0.044 1	0.126 1	0.073 7	0.020 3	0.047 4

表 3 模拟情况 2 的外符合精度

Tab. 3 Standard deviations of parameters in test 2

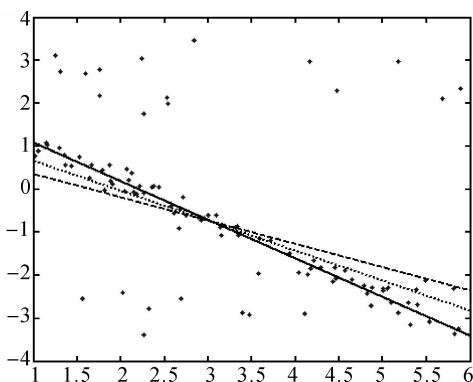
粗差个数	聚集在一侧			两侧不等分布			两侧均匀分布		
	S_{β_1}	S_{β_2}	S_σ	S_{β_1}	S_{β_2}	S_σ	S_{β_1}	S_{β_2}	S_σ
29	0.063 9	0.016 8	0.017 2	0.064 2	0.017 4	0.040 4	0.071 1	0.019 2	0.044 9
30	0.063 8	0.017 1	0.023 2	0.071 9	0.019 3	0.045 3	0.075 7	0.020 7	0.049 9
31	0.068 5	0.028 3	0.140 9	0.073 0	0.020 3	0.050 9	0.077 1	0.022 2	0.059 7
35	0.504 2	0.283 8	0.711 4	0.192 5	0.047 8	0.169 3	0.118 4	0.025 4	0.123 6
40	1.065 1	0.663 9	1.609 1	0.339 0	0.088 3	0.478 6	0.158 1	0.038 8	0.327 5
50	1.471 6	0.929 8	1.865 6	0.843 9	0.383 8	1.613 8	0.791 8	0.323 4	1.323 1

由表 2 可知,无论粗差如何分布,当粗差比小于本文给出的崩溃率时,基于中位参数法初值的等价权法抗差性最好,基于最小二乘初值的等价权法抗差性最差。比较表 2 各行数据可知,粗差比相同时,对基于最小二乘初值的等价权抗差估计法和中位参数法而言,粗差分布越均匀,解算精度越高;而基于中位参数法初值的等价权抗差估计法对聚集状粗差的抑制效果更好。图 1 和图 2 为三种方法 1 000 次计算结果的均值,显然,本文方法与点云数据吻合情况最优。



注:点线是中位参数法,虚线是基于最小二乘初值的等价权法,实线是中位参数法初值的等价权法。

图 1 粗差聚集在观测值一侧时的点云数据和拟合结果
Fig. 1 Estimates of the two parameters from 70 simulated good data, 30 concentrated outliers



注:点线是中位参数法,虚线是基于最小二乘初值的等价权法,实线是中位参数法初值的等价权法。

图 2 粗差在观测值两侧对称分布时的点云数据和拟合结果
Fig. 2 Estimates of the two parameters from 70 simulated good data, 30 scattered outliers

由表 3 第 2 到 4 列可知,当粗差聚集在观测值一侧时,一旦粗差比大于式(12)估计的崩溃污

染率,解算结果即丧失抗差性,验证了式(12)的有效性。第 5 到 10 列显示,当粗差分布在观测值两侧时,参数估值的抗差性有所提高。

5 结 论

结合中位参数法和等价权抗差估计法,利用中位参数估值作为等价权抗差估计法的初值,提高计算结果的抗差性。通过数据试验证明以下结论:

(1) 多维参数情况下,本文所述方法与基于最小二乘初值的等价权抗差估计法相比具有更强抗差性,与中位参数法相比,计算的参数估值也更接近其真值。

(2) 本文方法的崩溃污染率与参数个数明显相关,单参数的崩溃污染率达到 50%,但 2 个参数时,只有 30%。

(3) 本文方法的抗差性随粗差分布不同而不同。当粗差成聚集状分布在观测值一侧时能容忍的粗差较少,最多不能超过本文近似估算的崩溃污染率,说明即使在最不利的条件下,本文的崩溃污染率估算方法也是可行的。

参考文献:

[1] LIU Dajie, TAO Benzao. Practical Measurement Data Processing Method[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2000. (刘大杰,陶本藻.实用测量数据处理方法[M].北京:测绘出版社,2000.)

[2] LI Deren. Gross Error Detection and Position Based on Selecting Weight Iteration Method[J]. Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1984, 9(1): 46-68. (李德仁.利用选权迭代法进行粗差探测定位[J].武汉测绘科技大学学报,1984,9(1):46-68.)

[3] ZHOU Jiangwen. Classical Theory of Errors and Robust Estimation [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1989, 18(2): 115-120. (周江文.经典误差理论与抗差估计[J].测绘学报,1989,18(2):115-120.)

[4] ZHOU Jiangwen, HUANG Youcai, YANG Yuanxi. Robust Least-square Regression [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1997. (周江文,黄幼才,杨元喜.抗差最小二乘法[M].武汉:华中理工大学出版社,1997.)

[5] YANG Yuanxi. Robust Estimation and Application [M]. Beijing: Bayi Press, 1993. (杨元喜.抗差估计理论及其应用[M].北京:八一出版社,1993.)

[6] YANG Yuanxi. Adaptively Robust Least Squares Estimation [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1996, 25(3): 206-211. (杨元喜.自适应抗差最小二乘估计[J].测绘学报,1996,25(3):206-211.)

[7] YANG Yuanxi, SONG Lijie, XU Tianhe. Robust Parameter

- Estimation for Geodetic Correlated Observations [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2002, 31(2): 95-99. (杨元喜, 宋利杰, 徐天河. 大地测量相关观测抗差估计理论[J]. *测绘学报*, 2002, 31(2): 95-99.)
- [8] YANG Y. Robust Estimation for Dependent Observations [J]. *Manuscripta Geodaetica*, 1994, 19(1): 10-17.
- [9] YANG Y, SONG L, XU T. Robust Estimator for Correlated Observations Based on Bifactor Equivalent Weights [J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76: 353-358.
- [10] YANG Yuanxi, GAO Weiguang. Integrated Navigation Based on Robust Estimation Outputs of Multi-sensor Measurements and Adaptive Weights of Dynamic Model Information [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2004, 29(10): 885-888. (杨元喜, 高为广. 基于多传感器观测信息抗差估计的自适应融合导航[J]. *武汉大学学报:信息科学版*, 2004, 29(10): 885-888.)
- [11] YANG Y. Robust Estimation of Geodetic Datum Transformation [J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73(5): 268-274.
- [12] QIU Weining. Method for Selecting Weight Iteration with Robust Initial Value [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2003, 28(4): 452-454. (邱卫宁. 具有稳健初值的选权迭代法[J]. *武汉大学学报:信息科学版*, 2003, 28(4): 452-454.)
- [13] STIGER S M. Do Robust Estimators Work with Real Data [J]. *Annals of Statistics*, 1977, 5(6): 1055-1098.
- [14] ROUSSEEUW P. Least Median of Squares Regression [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1984, 79(14): 871-880.
- [15] ROUSSEEUW P, WAGNER J. Robust Regression with a Distribution Intercept Using Least Median of Squares [J]. *Computational Statistics & Data Analysis*, 1994, 17: 65-76.
- [16] XU P. Sign-constrained Robust Least Squares, Subjective Breakdown Point and the Effect of Weights of Observations on Robustness [J]. *Journal of Geodesy*, 2005, 79(6): 146-159.

(责任编辑:宋启凡)

收稿日期: 2009-12-29

修回日期: 2010-04-23

第一作者简介: 杨玲(1986—), 女, 研究生, 研究方向为 GNSS 理论与应用。

First author: YANG Ling (1986—), female, postgraduate, majors in the GNSS theory and its applications.

E-mail: tongji_043406@yahoo.com.cn

(上接第 14 页)

- [3] LI Deren, YUAN Xiuxiao. Error Processing and Reliability Theory [M]. Wuhan: Press of Wuhan University, 2002: 61-89. (李德仁, 袁修孝. 误差处理与可靠性理论 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002: 61-89.)
- [4] SHEN Yunzhong, ZHAO Caifu. Fictitious Observation Equation and Its Application in Outlier Detecting [J]. *Journal of Tongji University*, 1994, 22(1): 59-62. (沈云中, 赵财福. 虚拟误差方程及其在粗差探测中的应用 [J]. *同济大学学报*, 1994, 22(1): 59-62.)
- [5] WANG Xinzhou, LIU Jingnan, TAO Benzao. Robust Best Invariant Quadratic Unbiased Estimation [J]. *Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping*, 1995, 20(3): 240-245. (王新洲, 刘经南, 陶本藻. 稳健最优不变二次无偏估计 [J]. *武汉测绘科技大学学报*, 1995, 20(3): 240-245.)
- [6] ZHOU Jiangwen. Classic Theory of Errors and Robust Estimation [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 1989, 18(2): 117-120. (周江文. 经典误差理论与抗差估计 [J]. *测绘学报*, 1989, 18(2): 117-120.)
- [7] YANG Yuanxi. The Theory and Application of Robust Estimation [M]. Beijing: Bayi Press, 1993. (杨元喜. 抗差估计理论及其应用 [M]. 北京: 八一出版社, 1993.)
- [8] YANG Yuanxi, XU Tianhe, SONG Lijie. Robust Estimation of Variance Components with Application in Global Positioning System Network Adjustment [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2005, 131(4): 107-112. (杨元喜, 徐天河, 宋利杰. 方差分量稳健估计在 GPS 网平差中的应用 [J]. *测绘工程*, 2005, 131(4): 107-112.)
- [9] LIU Changjian, MA Gaofeng. Blunder Test and Robust Solution of Variance Component Estimation for Helmert Type [J]. *Journal of Geomatics*, 2002, 27(6): 5-7. (刘长建, 马高峰. Helmert 方差分量估计的粗差检验与抗差解 [J]. *测绘信息与工程*, 2002, 27(6): 5-7.)
- [10] QIN Xianping, YANG Yuanxi. Application of Robust Variance Component Estimation to Satellite Orbit Determination [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2003, 23(4): 40-43. (秦显平, 杨元喜. 抗差方差分量估计在卫星定轨中的应用 [J]. *大地测量与地球动力学*, 2003, 23(4): 40-43.)
- [11] XU Peiliang, LIU Yumei, SHEN Yunzhong, et al. Estimability Analysis of Variance and Covariance Components [J]. *Journal of Geodesy*, 2007(81): 593-602.
- [12] WEISSTEIN E. Normal Product Distribution [EB/OL]. [2010-04-16]. <http://mathworld.wolfram.com/NormalProductDistribution.html> (责任编辑:宋启凡)

收稿日期: 2009-11-17

修回日期: 2010-04-24

第一作者简介: 李博峰(1983—), 男, 博士, 研究方向为数据处理, GNSS 理论与应用。

First author: LI Bofeng (1983—), male, PhD, majors in theory of surveying data processing, GNSS theory and application.

E-mail: Bofeng_Li@163.com