

具有测量数据丢失的离散不确定 时滞系统鲁棒 Kalman 滤波

陈博^{1,2} 俞立^{1,2} 张文安^{1,2}

摘要 研究了具有测量数据丢失的离散不确定时滞系统鲁棒 Kalman 滤波问题, 其中时延存在于系统状态和观测值中. 模型的不确定性通过在系统矩阵中引入随机参数扰动来表示, 测量数据丢失现象则通过一个满足 Bernoulli 分布且统计特性已知的随机变量来描述. 基于最小方差估计准则, 利用射影性质和递归射影公式得到一个新的滤波器设计方法, 并且保证了滤波器的维数与原系统相等. 与传统的状态增广方法相比, 当时延比较大时, 该方法可以有效降低计算量. 最后, 给出一个仿真例子说明所提方法的有效性.

关键词 鲁棒 Kalman 滤波, 不确定时滞系统, 测量数据丢失, 递归射影公式

DOI 10.3724/SP.J.1004.2011.00123

Robust Kalman Filtering for Uncertain Discrete Time-delay Systems with Missing Measurement

CHEN Bo^{1,2} YU Li^{1,2} ZHANG Wen-An^{1,2}

Abstract The robust Kalman filtering problem is investigated in this paper for linear uncertain stochastic systems with state delay, observation delay, and missing measurement. For robust performance, stochastic parameter perturbations are considered in the system matrix. The missing measurement can be described by a Bernoulli distributed random variable and its probability is assumed to be known. Based on the minimum mean square error (MMSE) estimation principle, a new filter design method is proposed by using the projection theory. The dimension of the designed filter is the same as the original systems. Compared with conventional state augmentation, the presented approach greatly lessens the computational demand when the delay is large. A simulation example is given to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words Robust Kalman filtering, uncertain discrete time-delay system, missing measurement, recursive projection formula

最优状态估计在信号处理、通信、目标跟踪和控制等领域有着重要的应用, 常用的最优估计准则是线性最小方差 (Minimum mean square error, MMSE) 估计, 即要求信号或状态的最优估计值与真实值误差的方差最小. 针对线性离散随机系统的最优状态估计问题, Kalman 在 1960 年基于 MMSE 估计准则, 利用正交原理推导出了著名的 Kalman 滤波器^[1]. 在许多实际应用系统中, 观测数据丢失现象、滞后现象和模型的不确定性是不可避免的. 例如在网络控制系统和无线传感器网络中, 通信网络的不可靠性会导致观测数据丢

收稿日期 2010-07-09 录用日期 2010-10-13

Manuscript received July 9, 2010; accepted October 13, 2010

国家自然科学基金 (60974017, 60834001) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (60974017, 60834001)

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023 2. 浙江省嵌入式系统联合重点实验室 杭州 310023

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023 2. Zhejiang Provincial United Key Laboratory of Embedded Systems, Hangzhou 310023

失; 元器件的老化、灵敏度不够以及信息传递的延迟等原因会使得系统普遍存在着滞后现象; 在实际系统中统计知识的缺乏会导致所建立的系统模型存在一定的不确定性. 针对此类系统, 文献 [2] 导出了在不确定观测下, 既有状态时延又有观测时延离散随机系统的鲁棒 H_∞ 滤波器, 然而, 针对具有测量数据丢失的既有状态时延又有观测时延离散不确定系统的最优状态估计问题目前还没有得到研究.

通常对数据丢失现象的描述有两种方法: 第一种方法是用一个 Bernoulli 分布的随机变量来描述, 另一种方法将数据丢失现象表示为 Markov 跳变序列. 针对第一种方法, 文献 [3] 利用正交原理推导出了噪声相互独立情况下的线性最小方差滤波器, 文献 [4] 则研究了同时具有不确定性和数据丢失 (丢包) 情况下的离散时变系统的鲁棒 Kalman 滤波问题. 基于线性矩阵不等式方法, 文献 [5–6] 分别给出了不确定观测下离散线性系统的 H_∞ 和 H_2 滤波器设计方法. 当观测数据丢失现象被描述为 Markov 跳变序列时, 文献 [7–8] 给出了线性离散随机系统的最优滤波器设计方法. 另一方面, 时滞系统的状态估计问题广泛出现在信号处理和网络控制系统中, 已有很多文献对此类系统的最优状态估计问题进行了研究. 针对离散时滞系统的最优状态估计问题, 文献 [9–10] 利用新息重组方法讨论了时延存在于测量值时的最优滤波问题. 当系统状态存在时延时, 文献 [11] 通过状态增广法给出最优滤波器的设计方法, 但是状态增广法会增加系统维数, 给计算带来不便. 为此, 文献 [12] 利用正交原理导出一组非增广的滤波器. 此外, 经典 Kalman 滤波方法不适合解决系统模型存在不确定性时的最优估计问题, 为此, 针对不确定性系统最优滤波问题的研究引起了学者们的广泛关注, 其中系统模型的不确定性被描述为以下两类情况: 一类是系统模型不确定性被描述为范数有界^[13]; 另一类是系统模型不确定性被描述为随机参数扰动^[14]. 当考虑系统中既存在模型不确定性又存在时延情况下的最优滤波问题时, 文献 [15–16] 分别给出了时延存在于状态和观测情况下的最优鲁棒滤波器设计方法.

针对带有测量数据丢失情况下的离散不确定时滞系统最优状态估计问题, 一般可以通过状态增广法将原系统转换为无时滞系统, 然后采用类似于文献 [3] 的推导过程可以得到最优滤波器, 但是转换后的系统状态维数比原系统增加了很多, 特别地, 当时滞比较大时, 需要承担较大的计算负担, 这样对一些实时性要求高的系统不能完全实现. 为此, 本文基于 MMSE 准则, 研究此类系统的最优状态估计问题, 其中, 时延存在于系统状态和观测值中, 测量数据丢失现象则通过一个满足 Bernoulli 分布的随机变量来描述, 而模型不确定性表现为系统矩阵受到随机扰动. 然后, 利用射影性质和递推射影公式, 导出一种简单的最优滤波器, 并保证滤波器的参数矩阵维数和原系统相等, 从而可以有效降低计算量. 最后, 将通过数值仿真说明所设计滤波器的有效性.

1 问题描述与分析

考虑如下离散不确定线性时滞系统:

$$\mathbf{x}(t+1) = \left(A + \sum_{l=1}^h A_l \alpha_l(t) \right) \mathbf{x}(t-d) + \Gamma \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \gamma(t) H \mathbf{x}(t-d) + \mathbf{v}(t) \quad (2)$$

其中, t 为离散时间, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为观测信号, $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^r$ 为输入白噪声, $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为观测白噪

声, d 为定常时延, $\alpha_l(t)$ ($l = 1, 2, \dots, h$) 是不相关的白噪声序列. 引入随机序列 $\alpha_l(t)$ 是为了表示系统模型的不确定性, A, A_l, Γ, H 为已知的适当维数矩阵. 不失一般性, 对系统的初始值、噪声统计特性、随机变量 $\gamma(t)$ 做如下假设.

假设 1. $\mathbf{w}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 是零均值、方差各为 W 和 V 的不相关白噪声.

假设 2. $\alpha_l(t)$ ($l = 1, 2, \dots, h$) 是零均值、方差分别为 θ_l 的互不相关的白噪声序列, 且对任意的 t, j 满足:

$$M\{\alpha_l(t)\mathbf{w}^T(j)\} = 0, \quad M\{\alpha_l(t)\mathbf{v}^T(j)\} = 0$$

其中, 符号 M 表示均值, T 表示转置.

假设 3. $\mathbf{x}(-d), \mathbf{x}(-d+1), \dots, \mathbf{x}(0)$ 不相关于 $\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t), \alpha_l(t)$, $l = 1, 2, \dots, h$.

假设 4. 设 $\gamma(t) \in \mathbf{R}$ 是取值为 0 或 1 的 Bernoulli 分布序列, 其统计特性如下:

$$\text{Prob}\{\gamma(t) = 1\} = M\{\gamma(t)\} = \pi$$

$$\text{Prob}\{\gamma(t) = 0\} = 1 - M\{\gamma(t)\} = 1 - \pi$$

其中, π 表示数据到达率.

系统状态方程 (1) 可以重新描述为

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t-d) + \Omega(t) \quad (3)$$

其中

$$\Omega(t) = \sum_{l=1}^h A_l \alpha_l(t) \mathbf{x}(t-d) + \Gamma \mathbf{w}(t) \quad (4)$$

由式 (1)、假设 1 和假设 2 可知, $\Omega(t)$ 的数学期望为零, 且与 $\mathbf{v}(t)$ 互不相关. 为了进一步计算 $\Omega(t)$ 的方差, 定义 $\Lambda(t) = M\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\}$, 则 $\Lambda(t)$ 满足如下递推等式:

$$\begin{aligned} \Lambda(t+1) &= A\Lambda(t-d)A^T + \Gamma W \Gamma^T + \\ &\quad \sum_{l=1}^h \theta_l A_l \Lambda(t-d) A_l^T \end{aligned} \quad (5)$$

其中, 初值 $\Lambda(-d), \dots, \Lambda(0)$ 给定. 随机序列 $\Omega(t)$ 的方差可由下式计算:

$$\Sigma(t) = \sum_{l=1}^h \theta_l A_l \Lambda(t-d) A_l^T + \Gamma W \Gamma^T \quad (6)$$

其中, $\Lambda(t-d)$ 由式 (5) 计算.

本文要解决的问题是: 针对具有测量数据丢失情况下的离散不确定时滞系统 (1) 和 (2), 基于观测序列 $\{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(t)\}$, 设计维数与原系统相等的线性最小方差递推估计器 $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$, 满足:

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}(t|t)} \{M[(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t))^T (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t))]\}$$

2 鲁棒 Kalman 滤波设计

定义算子:

$$\Phi_t(i, j) = M\{[\mathbf{x}(i) - \hat{\mathbf{x}}(i|t)][\mathbf{x}(j) - \hat{\mathbf{x}}(j|t)]^T\}$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}(i|t)$ 表示基于观测 $\{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(t)\}$ 对 $\mathbf{x}(i)$ 的最优状态估计. 令状态估计误差 $\tilde{\mathbf{x}}(i|t) = \mathbf{x}(i) - \hat{\mathbf{x}}(i|t)$, 则 $\Phi_t(i, j) = M\{\tilde{\mathbf{x}}(i|t)\tilde{\mathbf{x}}^T(j|t)\}$.

为了导出本文的主要结果, 首先介绍以下引理.

引理 1^[17]. 设随机变量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, 随机序列 $\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(t), \dots \in \mathbf{R}^n$, 且它们存在二阶矩, 则有递推射影公式:

$$\begin{aligned} \text{Proj}(\mathbf{x}|\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(t)) = \\ \text{Proj}(\mathbf{x}|\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(t-1)) + \\ M\{\mathbf{x}\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\}[M\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t)\}]^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t|t-1)$, $L(\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(t))$ 表示由 $\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(t)$ 张成的线性流形. 符号 $\text{Proj}(\mathbf{x}|\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(t))$ 表示 \mathbf{x} 在 $L(\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(t))$ 上的射影.

引理 2. 对于系统 (1) 和 (2), 当 $i = 0, 1, \dots, d-1$ 时, 有如下等式成立:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t-d|t-i) = \\ \hat{\mathbf{x}}(t-d|t-i-1) + K_{i+1}(t-i)\boldsymbol{\varepsilon}(t-i) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t-i) = \mathbf{y}(t-i) - \pi H\hat{\mathbf{x}}(t-d-i|t-i-1) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P(t-d|t-i) = P(t-d|t-i-1) - \\ \pi K_{i+1}(t-i)H\Phi_{t-i-1}(t-d-i, t-d) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} K_{i+1}(t-i) = \pi\Phi_{t-i-1}(t-d, t-d-i)H^T \times \\ [\pi(1-\pi)H\Lambda(t-d-i)H^T + V + \\ \pi^2HP(t-d-i|t-i-1)H^T]^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $\Lambda(t-d-i)$ 由式 (5) 计算.

证明. 由递推射影式 (7) 可得式 (8) 和式 (9) 成立, 且可得到如下等式:

$$\begin{aligned} K_{i+1}(t-i) = \\ M\{\mathbf{x}(t-d)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-i)\}[M\{\boldsymbol{\varepsilon}(t-i)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-i)\}]^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

由式 (2) 和式 (9) 可得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(t-i) = (\gamma(t) - \pi)H\mathbf{x}(t-d-i) + \mathbf{v}(t-i) + \\ \pi H\hat{\mathbf{x}}(t-d-i|t-i-1) \end{aligned}$$

利用 $M\{(\gamma(t) - \pi)(\gamma(t) - \pi)\} = \pi(1 - \pi)$, $M\{\gamma(t) - \pi\} = 0$, 且 $\mathbf{v}(t-i) \perp \hat{\mathbf{x}}(t-d-i|t-i-1)$, 可得如下等式成立:

$$\begin{aligned} M\{\boldsymbol{\varepsilon}(t-i)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-i)\} = \pi(1-\pi)H\Lambda(t-d-i)H^T + \\ \pi^2HP(t-d-i|t-i-1)H^T + V \end{aligned} \quad (13)$$

由假设 1, 假设 2 及 $\hat{\mathbf{x}}(t-d|t-i-1) \perp \hat{\mathbf{x}}(t-d-i|t-i-1)$ 可得:

$$M\{\mathbf{x}(t-d)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-i)\} = \pi\Phi_{t-i-1}(t-d, t-d-i)H^T \quad (14)$$

将式 (13) 和式 (14) 代入式 (12), 即可得式 (11) 成立.

由式 (8) 可得:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t-d|t-i) = \hat{\mathbf{x}}(t-d|t-i-1) - \\ K_{i+1}(t-i)[(\gamma(t) - \pi)H\mathbf{x}(t-d-i) + \\ \pi H\hat{\mathbf{x}}(t-d-i|t-i-1) + \mathbf{v}(t-i)] \end{aligned}$$

且由射影的正交性可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t-i) \perp \hat{\mathbf{x}}(t-d|t-i-1) \\ \mathbf{v}(t-i) \perp \hat{\mathbf{x}}(t-d-i|t-i-1) \end{aligned}$$

由此可得:

$$\begin{aligned} P(t-d|t-i) = P(t-d|t-i-1) - \\ M\{\hat{\mathbf{x}}(t-d|t-i-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-d-i|t-i-1)\} \times \\ \pi H^T K_{i+1}^T(t-i) - \pi K_{i+1}(t-i)H \times \\ M\{\hat{\mathbf{x}}(t-d-i|t-i-1)\hat{\mathbf{x}}^T(t-d|t-i-1)\} + \\ \pi^2 K_{i+1}(t-i)HP(t-d-i|t-i-1) \times \\ H^T K_{i+1}^T(t-i) + \pi(1-\pi)K_{i+1}(t-i) \times \\ H\Lambda(t-d-i)H^T K_{i+1}^T(t-i) + \\ K_{i+1}(t-i)VK_{i+1}^T(t-i) \end{aligned}$$

将式 (11) 代入上式的最后 3 项可得式 (10) 成立. \square

引理 3. 如果式 (11) 成立, 且 $i = 1, 2, \dots, d-1, j = 0, 1, \dots, d-1-i$, 则可推出如下等式:

$$\begin{aligned} \Phi_{t-i-j}(t-d-i+1, t-d+1) = \\ \Phi_{t-i-j-1}(t-d-i+1, t-d+1) - \\ \pi K_{j+2}(t-i-j)H \times \\ \Phi_{t-j-i-1}(t-d-i-j, t-d+1) \end{aligned} \quad (15)$$

证明. 由递推射影式 (7) 及式 (3) 容易得到:

$$\begin{aligned} \Phi_{t-i-j}(t-d-i+1, t-d+1) = \\ \Phi_{t-i-j-1}(t-d-i+1, t-d+1) - \\ \pi\Phi_{t-i-j-1}(t-d-i+1, t-d-i-j)H^T \times \\ K_{i+j+2}^T(t-i-j) - \pi K_{j+2}(t-i-j)H \times \\ \Phi_{t-i-j-1}(t-i-j-d, t-d+1) + \\ K_{j+2}(t-i-j)M\{\boldsymbol{\varepsilon}(t-i-j)\boldsymbol{\varepsilon}^T(t-i-j)\} \times \\ K_{i+j+2}^T(t-i-j) \end{aligned}$$

将式 (11) 变形后代入上式的最后一项可得式 (15) 成立. \square

引理 4. 当 $i = 1, 2, \dots, d-1$ 时, 定义

$$\begin{aligned} \Psi_i(t) = \Phi_{t-i}(t-d-i+1, t-d+1) \\ K(t-d) = K_{d+1}(t-d) \\ \Psi_d(t) = \Phi_{t-d}(t-2d+1, t-d+1) \end{aligned}$$

则有如下递推等式成立:

$$\begin{aligned} \Phi_{t-d+1}(t-d-i+1, t-d+1) = \\ \{[\Psi_{d-i+1}(t-i)]^T - \pi K_{d-i+2}(t-d)H \times \\ P(t-2d|t-d-1)\}A^T - \\ \pi K_{d-i+1}(t-d+1)H[\Psi_d(t)]^T \end{aligned} \quad (16)$$

证明. 与引理 2 和引理 3 的证明过程类似, 从略. \square

针对离散不确定时滞系统 (1) 和 (2), 基于观测序列 $\{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(t)\}$, 下面定理给出最优滤波器的设计方法.

定理 1. 设系统 (1) 和 (2) 满足假设 1~4, 给定 $0 \leq \pi \leq$

1, 递推的最优鲁棒滤波器为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t+1) = \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) + K(t+1) \times \\ \quad (\mathbf{y}(t+1) - \pi H \hat{\mathbf{x}}(t-d+1|t)) \\ K(t+1) = \pi \Psi_d^T(t+d) H^T [\pi(1-\pi) \times \\ \quad H \Lambda(t-d+1) H^T + V + \\ \quad \pi^2 H P(t-d+1|t) H^T]^{-1} \\ P(t+1|t+1) = P(t+1|t) - \\ \quad \pi K_1(t) H \Psi_d(t+d) \\ \Psi_d^T(t+d) = A[\Psi_1(t) - \pi K_1(t) H \Psi_1(t)] \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = A[\hat{\mathbf{x}}(t-d|t-1) + K_1(t) \times \\ \quad (\mathbf{y}(t) - \pi H \hat{\mathbf{x}}(t-d|t-1))] \\ P(t+1|t) = A[P(t-d|t-1) - \\ \quad \pi K_1(t) H P(t-d|t-1)] A^T + \Sigma(t) \\ K_1(t) = \pi P(t-d|t-1) H^T [\pi(1-\pi) H \times \\ \quad \Lambda(t-d) H^T + V + \\ \quad \pi^2 H P(t-d|t-1) H^T]^{-1} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(t-d+1|t) = \hat{\mathbf{x}}(t-d+1|t-d+1) + \\ \quad \sum_{i=1}^{d-1} K_{i+1}(t-i+1) (\mathbf{y}(t-i+1) - \\ \quad \pi H \hat{\mathbf{x}}(t-d-i+1|t-i)) \\ P(t-d+1|t) = P(t-d+1|t-d+1) - \\ \quad \sum_{i=1}^{d-1} \pi K_{i+1}(t-i+1) H \Psi_i(t) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} K_{i+1}(t-i+1) = \\ \pi \Psi_i^T(t) H^T [\pi(1-\pi) H \Lambda(t-d-i+1) H^T + \\ \pi^2 H P(t-d-i+1|t-i) H^T + V]^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Psi_i(t) = \{[\Psi_{d-i+1}(t-i)]^T - \pi K_{d-i+2}(t-d) \times \\ H P(t-2d|t-d-1)\} A^T - \\ \pi K_{d-i+1}(t-d+1) H [\Psi_d(t)]^T - \\ \sum_{j=0}^{d-1-i} \pi K_{j+2}(t-i-j) H \Psi_{i+j+1}(t) \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $\Psi_i(t) = \Phi_{t-i}(t-d-i+1, t-d+1)$ ($i = 1, 2, \dots, d-1$), 且 $\Psi_d(t) = \Phi_{t-d}(t-2d+1, t-d+1)$, $K(t)$ 是滤波器增益矩阵, $K_{d+1}(t-d) = K(t-d)$, $\Lambda(t)$ 和 $\Sigma(t)$ 分别由式 (5) 和式 (6) 计算.

证明. 根据函数 $\Psi_d(t)$ 的定义, 采用类似于引理 2 的证明过程可得式 (17) 的前 3 个等式和如下等式成立:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1|t) &= A \hat{\mathbf{x}}(t-d|t) \\ P(t+1|t) &= A P(t-d|t) A^T + \Sigma(t) \end{aligned} \quad (22)$$

由式 (22) 可得 $\hat{\mathbf{x}}(t+1|t) = A \hat{\mathbf{x}}(t-d|t) + \Omega(t)$, 且 $\Omega(t) \perp \hat{\mathbf{x}}(t-d+1|t)$, 则下列等式成立:

$$\Phi_t(t+1, t-d+1) = A \Phi_t(t-d, t-d+1) \quad (23)$$

当 $i = 0$ 时, 由引理 2 可得式 (18) 的第 3 个等式成立, 并将 $\hat{\mathbf{x}}(t-d|t)$ 和 $P(t-d|t)$ 代入式 (22), 可得定理 1 中式 (18) 的前两个等式成立.

类似于引理 3 的证明过程, 可得如下结果:

$$\begin{aligned} \Phi_t(t-d, t-d+1) &= \Phi_{t-1}(t-d, t-d+1) - \\ &\quad \pi K_1(t) H \Phi_{t-1}(t-d, t-d+1) \end{aligned} \quad (24)$$

将式 (24) 代入式 (23), 并根据函数 $\Psi_i(t)$ 的定义, 可得到定理 1 中式 (17) 的第 4 个等式成立.

注意到 $\hat{\mathbf{x}}(t-d|t-1)$ 和 $P(t-d|t-1)$ 分别是 $\hat{\mathbf{x}}(t-d+1|t)$ 和 $P(t-d+1|t)$ 的前一时刻值, 因此, 下面需要求出 $\hat{\mathbf{x}}(t-d+1|t)$ 和 $P(t-d+1|t)$ 的递推公式. 根据函数 $\Psi_i(t)$ 的定义, 由引理 2 可得定理 1 中式 (19) 和式 (20) 成立.

由引理 3 可得

$$\begin{aligned} \Phi_{t-i}(t-d-i+1, t-d+1) = \\ \Phi_{t-d+1}(t-d-i+1, t-d+1) - \\ \sum_{j=0}^{d-1-i} \pi K_{j+2}(t-i-j) H \times \\ \Phi_{t-i-j-1}(t-d-i-j, t-d+1) \end{aligned}$$

将式 (16) 代入上式, 可得定理 1 中式 (21) 成立. \square

注 1. 经过分析可知, 状态增广方法与定理 1 所提供的方法在运算量上都主要依赖于误差协方差阵的求解和矩阵求逆, 由于系统 (1) 和 (2) 与状态增广后系统的观测方程维数相等, 则两种方法的矩阵求逆计算量相等. 鉴于以上考虑, 将最优误差协方差阵 $P(t+1|t+1)$ 的计算量作为衡量整体运算量的一个重要指标. 当忽略加、减法运算量时, $P(t+1|t+1)$ 在状态增广方法和定理 1 所提供方法的运算量分别为 $A_u = 3(n+d)^3 + 2hn^3 + r^2n + m^2n$ 和 $N_e = 2[(2h+4)n^3 + r^2n + 2m^2n + (d-1)(m^2n + 3n^3 + (d+1)(m^2n + n^3))] + 2n^3 + m^2n$. 显然 A_u 中 d 的最大次数是 3, 而 N_e 中 d 的最大次数是 2, 特别地, 当时滞 d 很大时, 有 $A_u \gg N_e$, 为了满足实际系统的实时性要求, 利用定理 1 中给出的最优滤波器设计方法可以有效地减小运算量.

注 2. 当 $\pi = 1$ 时, 系统 (1) 和 (2) 是无数据丢失的线性离散不确定系统, 此时由定理 1 可以直接得到此类系统的鲁棒 Kalman 滤波器.

根据定理 1, 最优状态估计 $\hat{\mathbf{x}}(t+1|t+1)$ 实现的算法如下:

步骤 1. 根据式 (21), 从 $i = d-1$ 开始求解, 分别计算 $\Psi_{d-1}(t), \Psi_{d-2}(t), \dots, \Psi_1(t)$. 注意, $\Psi_{d-i}(t-i-1), K_j(t-i-j)$ 在 $[t-d, t]$ 内已经求出, 而且利用 $\{\Psi_d(t), \Psi_{d-1}(t), \dots, \Psi_{i+1}(t)\}$ 来计算 $\Psi_i(t)$, 其中, $\Psi_d(t)$ 由下面的步骤计算;

步骤 2. 将步骤 1 计算的结果代入式 (20), 分别求得 $K_2(t-1), \dots, K_{i+1}(t-i+1), \dots, K_d(t-d)$;

步骤 3. 将步骤 1 和步骤 2 计算的结果代入式 (19), 求得 $\hat{\mathbf{x}}(t-d+1|t)$ 和 $P(t-d+1|t)$;

步骤 4. 将步骤 3 计算的结果代入式 (18), 可求得 $\hat{\mathbf{x}}(t+1|t), P(t+1|t), K_1(t)$. 注意 $\hat{\mathbf{x}}(t-d|t-1), P(t-d|t-1)$ 分别是 $\hat{\mathbf{x}}(t-d+1|t)$ 和 $P(t-d+1|t)$ 的前一时刻值;

步骤 5. 将步骤 1 计算的结果 $\Psi_1(t)$ 和步骤 4 计算的结果 $K_1(t)$ 代入式 (17), 先求得 $\Psi_d(t+d)$, 最后求出 $\hat{\mathbf{x}}(t+1|t+1)$ 和 $P(t+1|t+1)$;

步骤 6. 返回步骤 1, 继续按照以上步骤计算下一时刻的最优估计值.

注 3. 根据以上步骤, 可知算法实现必需的初始条件为 $\Psi_i(0), \Psi_i(1), \dots, \Psi_i(d-1)$ ($i = 1, 2, \dots, d-$

$1), \Psi_d(0), \dots, \Psi_d(d), \hat{\mathbf{x}}(-d) = \mathbf{0}, \dots, \hat{\mathbf{x}}(0|0), P(-d) = P(0), \dots, P(0|0).$

3 仿真算例

考虑如下的线性离散时滞随机系统:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= (A + A_1\alpha_1(t))\mathbf{x}(t-d) + \Gamma\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \gamma(t)H\mathbf{x}(t-d) + \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = [1 \quad 1]^T, \quad H = [0.5 \quad 1]$$

时延 $d = 10$, 数据到达率 $\pi = M\{\gamma(t) = 1\} = 0.8$, 状态 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$, $\mathbf{w}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$ 是零均值、方差都为 0.3 的互不相关的高斯白噪声, $\alpha_1(t)$ 是零均值、方差为 0.1 的高斯白噪声, 给定初始条件, 根据定理 1 求最优估计值 $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$.

最优滤波器 $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$ 的仿真结果如图 1 所示, 其中, 实线表示真实状态 $x_i(t)$, 虚线表示最优状态估计值 $\hat{x}_i(t|t)$. 当 $\pi = 0.8$ 时, 由图 2 可知, 从 $t = 200$ 时起最小误差协方差的迹趋于稳态; 当 $\pi = 1$ 时, 由图 2 可知, 在无数据丢失情况下, 离散时滞系统的最小误差协方差的迹在 $t = 70$ 时已经达到稳态, 显然无数据丢失情况下误差协方差收敛速度快, 且稳态值比有数据丢失的情况小. 由图 3 可知误差协方差的迹随着数据到达率 π 的增大而减小. 另一方面, 为了比较本文方法与传统增广方法的计算量, 针对系统 (25), 即: 当 $m = r = h = 1, n = 2$ 时, 表 1 给出了时滞 d 与运算量 A_u, N_e 的关系, 并由此可知当 d 较大时, 增广方法的计算量明显大于本文的方法.

表 1 不同时滞的计算量

Table 1 Computational cost for various time-delays

d	1	2	3	10	20
A_u	101	212	395	5 204	31 964
N_e	126	238	390	2 574	9 094

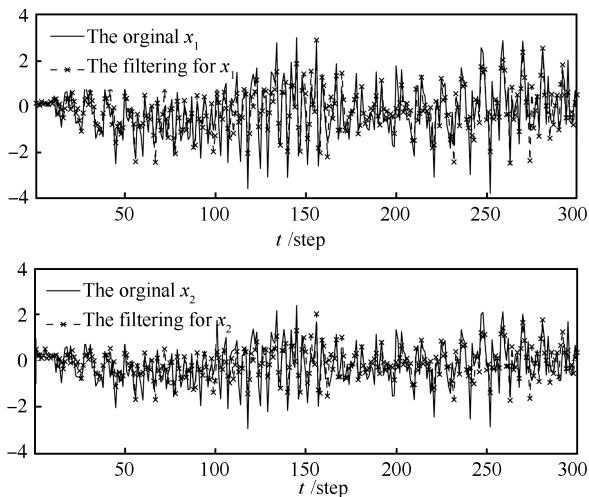


图 1 状态 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$ 的轨迹

Fig. 1 Trajectories of state $\mathbf{x}(t)$ and optimal estimate $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$

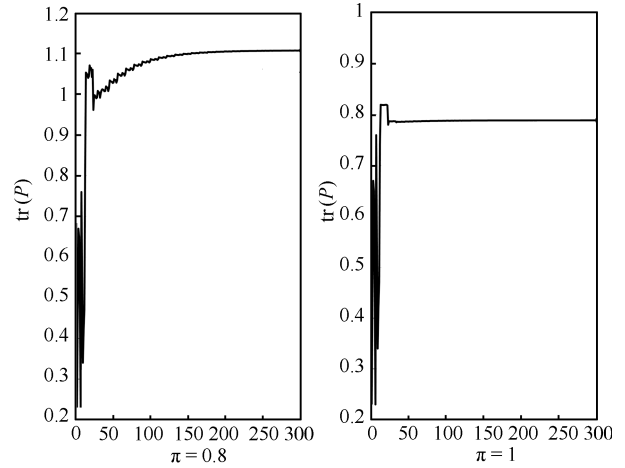


图 2 确定性观测系统和不确定性观测系统的比较

Fig. 2 Comparison of the general observation system and the uncertain observation system

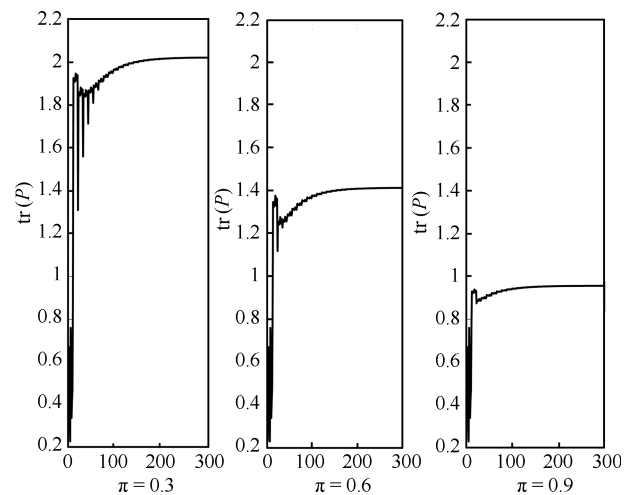


图 3 数据到达率 π 与 $\text{tr}(P)$ 之间的关系

Fig. 3 The relation between π and $\text{tr}(P)$

4 结论

本文考虑了具有数据丢失情况下的线性离散不确定时滞系统最优滤波问题, 基于 MMSE 估计准则, 利用射影性质和递归射影公式导出了一个新的滤波器, 而且保证了滤波器的参数矩阵维数和原系统相等. 与传统的状态增广方法相比, 避免了增维所带来的高维计算和大空间存储等缺点. 最后通过数值仿真表明所提方法的有效性. 另外, 本文所讨论的时滞系统要求状态时延和测量时延是相等的常数, 而在实际系统中时延可能是随机的, 因此, 可以通过本文的研究思路解决此类系统的最优状态估计问题.

References

- 1 Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME Journal of the Basic Engineering*, 1960, **82**(Series D): 35–45
- 2 Wang Z, Yang F, Ho D W C, Liu X. Robust H_∞ filtering for stochastic time-delay systems with missing measure-

- ments. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, **54**(7): 2579–2587
- 3 Nahi N. Optimal recursive estimation with uncertain observation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1969, **15**(4): 457–462
- 4 Guo Ge, Wang Bao-Feng. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems with multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(5): 765–772
(郭戈, 王宝凤. 多丢包不确定离散系统的鲁棒 Kalman 滤波. *自动化学报*, 2010, **36**(5): 765–772)
- 5 Wang Wu, Yang Fu-Wen. H_1 filter design for discrete-time systems with missing measurements. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(1): 107–111
- 6 Wang Wu, Yang Fu-Wen, Zhan Yao-Qing. Robust H_2 state estimation for stochastic uncertain discrete-time systems with missing measurements. *Control Theory and Applications*, 2008, **25**(3): 439–445
(王武, 杨富文, 詹耀清. 测量数据丢失的随机不确定离散系统的鲁棒 H_2 状态估计. *控制理论与应用*, 2008, **25**(3): 439–445)
- 7 Smith S C, Seiler P. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, **48**(12): 2163–2171
- 8 Wang Bao-Feng, Guo Ge. State estimation for discrete-time systems with Markovian time-delay and packet loss. *Control Theory and Applications*, 2009, **26**(12): 1331–1336
(王宝凤, 郭戈. 具有 Markovian 时延与丢包的离散系统的状态估计. *控制理论与应用*, 2009, **26**(12): 1331–1336)
- 9 Lu X, Zhang H S, Wang W, Teo K L. Kalman filtering for multiple time-delay systems. *Automatica*, 2005, **41**(8): 1455–1461
- 10 Han Chun-Yan, Zhang Huan-Shui. Optimal state estimation for discrete-time systems with random observation delays. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(11): 1446–1451
- 11 Kailath T, Sayed A H, Hassibi B. *Linear Estimation*. New Jersey: Prentice Hall, 2000
- 12 Priemer R, Vacroux A. Estimation in linear discrete systems with multiple time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1969, **14**(4): 384–387
- 13 Xie L H, Soh Y C, De S C E. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(6): 1310–1314
- 14 Wang F, Balakrishnan V. Robust Kalman filters for linear time-varying systems with stochastic parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, **50**(4): 803–813
- 15 Zhu X, Soh Y C, Xie L H. Robust Kalman filter design for discrete time-delay systems. *Circuits Systems, and Signal Processing*, 2002, **21**(3): 319–335
- 16 Zhao Hong-Guo, Zhang Huan-Shui, Zhang Cheng-Hui. Optimal robust estimation for linear uncertain systems with single delayed measurements. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(2): 202–207
- 17 Deng Zi-Li. *Information Fusion Filtering Theory with Applications*. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2007
(邓自立. 信息融合滤波理论及其应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2007)
- 陈 博 浙江工业大学硕士研究生. 主要研究方向为最优估计, 时滞系统和鲁棒控制. E-mail: chenbo0012@sina.com
(CHEN Bo Master student at Zhejiang University of Technology. His research interest covers optimal estimation, time-delay systems, and robust control.)
- 俞 立 浙江工业大学教授. 主要研究方向为鲁棒控制, 时滞系统, 分布式控制和网络控制系统. 本文通信作者. E-mail: lyu@zjut.edu.cn
(YU Li Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers robust control, time-delay systems, decentralized control, and networked control systems. Corresponding author of this paper.)
- 张文安 浙江工业大学讲师. 主要研究方向为网络控制系统, 最优控制与估计, 鲁棒控制. E-mail: wazhang@zjut.edu.cn
(ZHANG Wen-An Lecturer at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers networked control systems, optimal control and estimation, and robust control.)