浅埋隧道工作面破坏模式与支护反力研究

杨 峰,阳军生,赵炼恒

(中南大学土木建筑学院,湖南 长沙 410075)

摘 要:将浅埋隧道工作面稳定性问题简化为二维问题,构造了隧道工作面破坏模式。该破坏模式由一系列刚性滑块 组成,其对应的速度场在隧道工作面正前方可由竖向逐渐变为近水平向,较为符合实际。在此基础上,由破坏模式和 速度场的几何关系递推计算所需的几何参数,得到浅埋隧道工作面支护反力的目标函数,并建立了优化变量的约束条 件。利用 Matlab 编制程序求解该数学优化问题。最后通过算例得到了不同条件下维持浅埋隧道工作面稳定所需的支护 反力及优化得到的破坏模式和速度场,并分析了影响工作面稳定的各个因素。 关键词:浅埋隧道;工作面;支护反力;稳定性;极限分析;上限法;破坏模式

中图分类号: U451 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 4548(2010)02 - 0279 - 06 作者简介: 杨 峰(1981 -), 男,陕西西安人,博士研究生,从事隧道与地下工程研究。E-mail: <u>vf5754@126.com</u>。

Collapse mechanism and support pressure for shallow tunnel face

YANG Feng, YANG Jun-sheng, ZHAO Lian-heng

(School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: The stability of shallow tunnel face is simplified into a two-dimensional problem, and the corresponding collapse mechanism is proposed. The collapse mechanism is composed by a series of rigid blocks with its corresponding velocity field which is characterized by change of velocity vectors from vertical to nearly horizontal in front of the tunnel face. Based on the geometrical relations of the collapse mechanism, constrains of optimized variables for the collapse mechanism are established according to the object function of the shallow tunnel face support pressure, obtained after deducing geometrical parameters of collapse mechanism and velocity field needed for latter calculation. The computer program has been compiled using Matlab software, which can be used to solve the mathematic optimization problem. Finally, results for various conditions of support pressure needed for the stability of shallow tunnel face and optimized collapse mechanisms and corresponding velocity fields are also obtained. The factors that will influence the stability of shallow tunnel face are analyzed.

Key words: shallow tunnel; tunnel face; support pressure; stability; limit analysis; upper bound method; collapse mechanism

0 前 言

在软弱地层的浅埋隧道施工过程中,隧道工作面 可能产生较大范围的垮塌。隧道工作面失稳与围岩强 度参数、工作面几何尺寸,隧道埋深等因素均有关。 目前已有文献对于隧道工作面的稳定性的报道仍较 少。对于纯黏性土地层,Broms等^[1]提出隧道稳定性 系数 N 的计算公式:

$$N = [s_{s} - s_{T} + g(C + D/2)]/c \quad , \tag{1}$$

式中, **s**_s为地表均布荷载, **s**_T为工作面均布荷载, *C*为隧道埋深, *D*为隧道高度, *g*和*c*分别为土体重度和黏聚力。

Davis 等^[2]按照平面应变问题提出浅埋隧道工作 面破坏模式,利用极限分析上、下限法得到式(1)定 义的稳定性系数; Klar 等^[3]按照三维问题建立了隧道 工作面连续的塑性破坏速度场和破坏模式,利用上限 法得到工作面的稳定性系数。姜功良^[4]利用拉格朗日 曾项优化原理及有限元法求解上限问题,得到了浅埋 软土隧道工作面稳定性系数。Augarde 等^[5]利用极限分 析上、下限有限元法,考虑隧道工作面为平面问题, 分别由上限法和下限法得到了浅埋隧道工作面稳定性 系数。

以上研究均考虑地层为纯黏性土,即j=0,而 在砂土地层中,隧道工作面的破坏模式较为复杂,与 纯黏性土地层中并不相同。而式(1)中关于稳定性系 数的定义并未考虑内摩擦角j的影响。Leca 等^[6]针对 砂土地层,构造了隧道工作面的三维破坏模式,利用

基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-08-0569) 收稿日期: 2008 - 09 - 26

极限分析上限法,分别考虑地表均布荷载和土体自重 对于稳定性的影响,列出了相关图表。而后 Soubra^[7] 在此基础上,将该破坏模式中的两个刚性锥体采用圆 顺的连接方式进行改进,得到了较优的上限解。

目前,极限分析理论在边坡稳定、地基承载力以 及土压力问题的研究中取得了较大的进展^[8-11]。除与 有限元相结合的极限分析法日渐成为研究热点外,传 统的刚性滑块极限分析上限法也在进行不断改进之 中。

本文针对浅埋隧道工作面稳定性问题,将破坏区 域分成由刚性滑块组成的机动体系,形成较为严格的 破坏模式和塑性流动速度场,利用极限分析上限法, 可求解维持浅埋隧道工作面稳定所需的最小支护反 力。通过算例及参数分析,研究了工作面稳定性的影 响因素。

1 极限分析上限法

极限分析法是研究岩土工程稳定性问题的一种有效的方法,其理论基础相比极限平衡法更为严格。其中上限法理论基础为上限定理,可表述为在所有的运动许可的塑性应变率场 《 和速度场 v_i* 对应荷载中,极限荷载 F 最小^[8],即

$$\int_{S} F_{i} v_{i}^{*} \mathrm{d}S + \int_{A} g_{i} v_{i}^{*} \mathrm{d}A \leq \int_{A} S_{ij} \mathcal{C}_{ij} \mathrm{d}A + \int_{S} (t - S_{n} \tan j) \Delta v_{t}^{*} \mathrm{d}s \quad , \qquad (2)$$

式中, *F_i*为促使系统产生破坏的荷载。若*F_i*为抵抗系 统产生破坏的荷载,则在上限定理中,极限荷载*F*最 大。式(2)左边分别表示极限荷载*F_i*和自重*g_i*所作 的塑性功率,右边第一项表示变形体A内塑性应变产 生的耗散功率,第二项表示速度间断线(滑动面)*S_D* 上产生的耗散功率。

为简化计算,一般假定破坏模式由刚性滑块体系 组成,内部不产生塑性应变,塑性耗散功率只产生于 速度间断线上。上限法假定材料服从莫尔—库仑屈服 准则和相关联流动法则^[4]。对于二维问题,单位长度 速度间断线上的耗散功率为

$$P_{\rm c} = cv\cos j \quad , \tag{3}$$

式中, c 为黏聚力, j 为内摩擦角, v 为速度间断线 上的相对速度。

2 浅埋隧道工作面破坏模式

2.1 问题描述

严格讲,浅埋隧道工作面稳定性问题为三维问题。 然而,构造三维破坏模式较复杂,计算难度增加。为 简化计算,可将隧道工作面稳定性问题转化为沿隧道 纵向剖开的二维问题考虑。利用此简化模型,仍可粗 略研究隧道工作面失稳与破坏的规律。

图 1 为浅埋隧道工作面稳定性模型。地表水平, 其中隧道埋深为 C,高度为 D。假定支护结构紧跟工 作面并具有足够的刚度和承载力,即破坏仅可能发生 在工作面前方。为维持工作面稳定,需要施加分布荷 载。假定该分布荷载在隧道顶部为 1gC,在隧道底部 为 1g(C+D), 1 可认为侧压力系数。地层土体黏聚 力为 c,内摩擦角 j。于是,浅埋隧道工作面的稳定 性问题可转化为求解工作面上所需的支护反力,也即 求解侧压力系数 1。



图 1 浅埋隧道工作面稳定性模型

Fig. 1 Model of shallow tunnel face stability

2.2 浅埋隧道工作面破坏模式的建立

为求解浅埋隧道工作面稳定性,需预先构造合适的破坏模式。Atkinson 等建议通过模型试验确定真实的破坏模式^[12]。然而,当问题较为简单时,可在简化的基础上进行合理的假定。





Fig. 2 Collapse mechanism obtained by upper bound theory and centrifuge^[6]

图 2 为 Leca 等给出的分别由上限法和离心机试 验得到的浅埋隧道工作面破坏模式。其中虚线部分表 示上限法确定的破坏范围,阴影部分为试验结果。试 验得到的破坏范围较大并延伸到地表是由于破坏发生 之后,渐进破坏继续发生导致的。 Leca 等^[6]提出两种浅埋隧道工作面的三维破坏模式。其中第一种由一个刚性锥体组成,破坏时整体下滑;第二种由两个刚性锥体组成,破坏时上面的锥体向下、底下的锥体向工作面整体滑动。后来 Soubra 将该破坏模式中的两个刚性锥体采用圆顺的连接方式进行改进。

以上破坏模式反映了浅埋隧道发生工作面失稳时的主要破坏特征,但仍显粗糙。笔者认为,工作面发生破坏时,上方易发生竖向速度,而在工作面前方岩土体的速度是逐渐由竖向转变为水平。假定速度方向突然转变是不严格的。另外,受周围岩土体的挟持作用,破坏在工作面正前方难易发生整体滑移,较容易产生挤压破坏。此时,不同区域的岩土体的速度均不相同。为此,参考以上文献,本文提出以下工作面二维破坏模式,见图3。



图 3 浅埋隧道工作面破坏模式

Fig. 3 Collapse mechanism of shallow tunnel face

如图 3,实线表示滑动面,箭头表示速度方向。 将工作面前方区域划分成一系列刚性滑块体系,每个 刚性滑块的速度大小和方向均不相同。而工作面上方 仍为可整体下滑的楔体。所有相邻速度间断线(即滑 动面)上的相对速度方向均与之夹角为*j*,满足相关 联流动法则要求,而速度相容性条件可利用速度矢量 的闭合条件来满足。以下对此进行说明。

2.3 浅埋隧道工作面破坏模式的说明

图 4 为破坏模式及其对应的速度场。在破坏模式 中,工作面正前方的破坏区域内共分成 m·n 个刚性块, 由位于工作面顶部的 m 个三角形滑块和外侧的 m(n-1) 个四边形滑块组成。滑块体系中,沿着径向和切向的 速度间断线分别为 L_{j,i}和 M_{j,i} (j=1,…,n; i=1,…, m)。每 一对 L_{j,i}和 M_{j,i}之间的夹角为π/2+j,而每一对 L_{j,i} 和 L_{j+1,i}之间的夹角的锐角为a_{j,i},靠近工作面顶部的 m 个三角形滑块之间的夹角分别为 b_i。破坏模式最上 方的刚性滑块的速度间断线为 L_z 和 L_y ,其之间的夹 角为2j。另外,图中还示意了计算需要的辅助线, 以虚线表示。其中, b_j (j=1,...,n-1)为速度间断线 $L_{1,1}$ 的 延长,交于 L_y , $L_{1,1}$ 与竖向的夹角为 b_0 。辅助线 N_i (j=1,...,n-1)与 L_y 平行。



图 4 破坏模式和对应的速度场

Fig. 4 Collapse mechanism and its corresponding velocity field

在速度场中, v_0 为破坏模式最上方的刚性滑块的 绝对速度,方向竖直向下。 $v_{n,i}$ (*i*=1,…,*m*)为最外侧靠 近弹性区的刚性滑块的绝对速度。 $v'_{j,i}$ 为对应速度间 断线 $L_{j,i}$ 上的相对速度;而 $v''_{j,i}$ 为对应速度间断线 $M_{j,i}$ 上的相对速度。其余刚性块的绝对速度 $v_{j,i}$ 可由 $v_{n,i}$ 和 $v'_{j,i}$ 进行矢量合成得到。图 4 示意的速度矢量的起点 与各相对速度矢量交点相连即为绝对速度矢量。为满 足相关联流动法则, $v_{n,i} = M_{n,i}$ 夹角为*j*,同样, $v'_{j,i}$ 与 $L_{j,i}$ 夹角为*j*, $v''_{j,i} = M_{j,i}$ 夹角也为*j*。由于速度场 中所有速度矢量相互闭合,破坏模式满足速度相容性 条件。

破坏模式可由以下优化变量确定: ①角度参数 b₀, b_i(*i*=1,…,*m*), a_{j,i}(*j*=1,…,*n*-1;*i*=1,…,*m*); ②边长 参数 L₁₁, b_i(*j*=1,…,*n*-1)。

速度场与破坏模式一一对应,当以上参数确定后, 各速度矢量也随之确定。最上方刚性滑块速度矢量可 取 $v_0 = 1$ 。另外,受隧道埋深 C 的影响,滑动面 L_z 和 L_y 可能相交与地表以下,也可能相交与地表之上。为保 证目标函数的连续性,计算中分两种情况考虑。

3 上限法计算过程

3.1 破坏模式几何参数递推

当一组优化变量确定后,利用破坏模式的几何关

系可递推计算所需的几何参数。具体步骤如下:

(1)由角度参数 b₀, b_i, a_{j,i}, 经变换得到辅助角度参数 q_{i,i} (j=1,…,n; i=1,…,m)。

(2) 递推破坏模式中的几何参数 L_z, L_y, N_j
 (*j*=1,…,*n*-1), 以及 L_{j,i} (*j*=1,…,*n*; *i*=1,…,*m*+1), M_{j,i}
 (*j*=1,…,*n*; *i*=1,…,*m*)。

(3) 计算刚性滑块的面积 S_j (j=1,...,n), S_{j,i}
(j=1,...,n; i=1,...,m)。其中 S₁为破坏模式最上方的刚性 滑块面积, 而 S_j (j=2,...,n)为b_j 与 N_j 一侧刚性滑块的 面积, S_{j,i} 为其余刚性滑块的面积。

3.2 破坏模式速度矢量递推

由一组优化变量,利用速度矢量的几何关系可递 推计算所需的速度矢量,过程如下:

(1)由角度参数 b₀, b_i, a_{j,i}, q_{j,i}, 经变换得
 到辅助角度参数 w_{i,i} (j=1,...,n; i=1,...,m)。

(2) 递推各个速度矢量 v_{n,i} (i=1,…,m), v'_{j,i}
(j=1,…,n; i=1,…,m), 以及速度 v''_{j,i} (j=1,…,n-1;
i=1,…,m)。

(3)计算各刚性滑块在竖向和水平向绝对速度的
 分量 v^y_{ii} 和 v^x_{ii} (j=1,…,n; i=1,…,m)。

3.3 工作面上所需支护反力的目标函数

当参数递推之后,破坏模式的重力功率为

$$P_{g} = g\left(v_{0}\sum_{i=1}^{n} s_{i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} s_{j,i}v_{j,i}^{y}\right) \quad ; \tag{4}$$

破坏模式的耗散功率为

 $P_{\rm c} = c \cos f \Big(v_0 \Big(L_z + L_y \Big) +$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} L_{j,i} v'_{j,i} + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} M_{j,i} v''_{j,i} + \sum_{i=1}^{m} M_{n,i} v_{n,i} \bigg); \quad (5)$$

工作面上支护反力的功率为

$$P_{\rm f} = l g x / 2 \quad . \tag{6}$$

假定支护反力呈线性分布, 经积分可得到:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\left(C + \sum_{k=1}^{j} L_{k,m+1} \right)^2 - \left(C + \sum_{k=1}^{j-1} L_{k,m+1} \right)^2 \right] v_{j,m}^x \right] \circ (7)$$

工作面支护反力可由侧压力系数1经计算得到, 1的目标函数为

$$l = 2(P_g - P_c)/(gx) \quad . \tag{8}$$

3.4 破坏模式的约束条件

为保证破坏模式满足其几何意义和边界条件,即 滑动面在规定范围内,且四边形刚性块不会发生扭曲 畸变,需施加以下约束条件:

$$b_{0} > j ,$$

$$b_{m} < \pi/2 - j ,$$

$$b_{0} + \sum_{i=1}^{m} b_{i} = \pi ,$$

$$0 < \pi - \left(b_{0} + j + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j,1} \right) < \pi/2 - j ,$$

$$-b_{i} + \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,i} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,i+1} < \mathbf{0} \quad (j = 2, \mathbf{L}, n; i = 1, \mathbf{L}, m-1) ,$$

$$0 < b_{m} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,m} < \pi/2 - j \quad (j = 2, \mathbf{L}, n) ,$$

$$L_{j,i} > 0 \quad (j = 1, \mathbf{L}, n; i = 1, \mathbf{L}, m+1) ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} L_{j,m+1} < D .$$

(9)

除以上约束外,其余角度变量 $a_{j,i}$ 应介于0与 $\pi/2$ 之间,另外,需要分别考虑 L_z 和 L_y 是否相交于地表之上或之下。

至此,浅埋隧道工作面稳定性问题转化为一个非 线 性 规 划 问 题 。 在 上 述 约 束 条 件 下 ,寻 求 $l = f(b_0, b_i, a_{j,i}, L_{1,1}, b_j)$ 的最大值。计算通过 Matlab 编程并调用 fmincon 函数来实现,破坏模式和速度场 可通过导入数据到 CAD 进行绘图。

4 工作面支护反力算例分析

为研究埋深*C*、地层土体内摩擦角*j*、黏聚力*c*等 参数对浅埋隧道工作面支护反力的影响,选取隧道高 度*D*=8.0 m、土体重度*g*=20.0 kN/m³为不变量,其 余参数均为变量。隧道埋深*C*取 8,16,24 和 32 m, 内摩擦角*j*取 10°,15°,20°和 25°,黏聚力*c*取 0,10 和 20 kPa。刚性滑块数目参数*m*和*n*均取为 10。 利用 Matlab 进行计算,结果如表 1~3。

表1 浅埋隧道工作面支护反力计算结果(c=0 kPa)

Table 1 Support pressure on shallow tunnel face (c=0 kPa)

				kPa	l
C/m	j =10°	$j = 15^{\circ}$	j =20°	j =25°	
8	132.1 (0.5503)	93.4 (0.3891)	65.5 (0.2728)	45.5 (0.1893)	
16	176.8 (0.4419)	114.8 (0.2871)	71.3 (0.1782)	45.5 (0.1137)	
24	215.4 (0.3847)	126.1 (0.2251)	71.3 (0.1274)	45.2 (0.0808)	
32	253.6 (0.3522)	135.4 (0.1880)	71.9 (0.0998)	45.5 (0.0632)	

注:支护反力数值表示工作面 D/2 处的支护反力,括号内数值表示侧压力系数 1,以下同。

表2 浅埋隧道工作面支护反力计算结果(c=10 kPa)

Table 2 Support pressure on shallow tunnel face (c=10 kPa)

				KPa	
C/m	j =10°	j =15°	j =20°	j =25°	
8	97.6	64.6	39.5	24.0	
	(0.4065)	(0.2691)	(0.1645)	(0.0997)	
16	142.7	80.4	43.1	24.0	
	(0.3568)	(0.2010)	(0.1078)	(0.0599)	
24	178.0	90.4	43.6	23.8	
	(0.3179)	(0.1615)	(0.0779)	(0.0425)	
32	200.3	95.0	44.1	23.8	
	(0.2782)	(0.1320)	(0.0613)	(0.0331)	

表3 浅埋隧道工作面支护反力计算结果(c=20 kPa)

Table 3 Support pressure on shallow tunnel face (c=20 kPa)

				KPa
C/m	\boldsymbol{j} =10°	j =15°	j =20°	j =25°
0	63.1	35.0	14.9	2.4
0	(0.2629)	(0.1459)	(0.0620)	(0.0101)
16	102.2	46.5	16.8	2.5
10	(0.2556)	(0.1162)	(0.0419)	(0.0062)
24	134.6	52.8	16.7	2.5
24	(0.2402)	(0.0943)	(0.0298)	(0.0045)
20	154.8	59.3	16.9	2.5
32	(0.2150)	(0.0823)	(0.0235)	(0.0035)

从表 1~3 可以看出,当内摩擦角取较小值时,随 着隧道埋深的增加,工作面所需的最小支护反力也相 应增加;反之,当内摩擦角取较大值时,工作面所需 的最小支护反力变化较小,这由于土体较小的内摩擦 角易产生较大范围的失稳,失稳范围可能延伸至地表。 而内摩擦角较大时,随隧道埋深的增加,土体失稳趋 于一定范围,并不会延伸至地表。当其它参数一定时, 随土体黏聚力的增加,工作面所需的最小支护反力减 小。

从表中还可以看出,随隧道埋深、土体内摩擦角 或黏聚力的增加,侧压力系数1相应减小;这由于土 体内摩擦的增加,将减小隧道工作面的破坏范围,而 土体黏聚力的增加,提高了工作面的稳定性,侧压力 系数1相应减小。而隧道埋深增加,折算得到的支护 反力增加,于是侧压力系数1减小。

值得说明的是,假定土体服从相关联流动法则, 由此得到的剪胀量较大,文中未考虑该因素。但可以 肯定,当考虑该因素时,得到的浅埋隧道工作面支护 反力相应增大。

为分析隧道工作面失稳后的经过优化的破坏模式,将以上表中部分结果对应的破坏模式和相应的速度场示意如图 5~8。

图 5~8 表示的速度场中,箭头的大小和方向分别 表示相应刚性滑块绝对速度矢量的大小和方向。其中 v₀为破坏模式最上方的刚性滑块的绝对速度,方向竖 直向下,取为单位大小,即v₀=1。



图 5 优化后的破坏模式和速度场(j =15°, C=16 m, c=0 kPa)

Fig. 5 Collapse mechanisms and velocity field after optimization $(j = 15^\circ, C=16 \text{ m}, c=0 \text{ kPa})$



图 6 优化后的破坏模式和速度场(*j* =15°, *C*=32 m, *c*=0 kPa) Fig. 6 Collapse mechanisms and velocity field after optimization (*j* =15°, *C*=32 m, *c*=0 kPa)



图 7 优化后的破坏模式和速度场(*j* =20°, *C*=16 m, *c*=0 kPa) Fig. 7 Collapse mechanisms and velocity field after optimization (*j* =20°, *C*=16 m, *c*=0 kPa)



图 8 优化后的破坏模式和速度场(*j* =20°, *C* =32 m, *c*=0 kPa) Fig. 8 Collapse mechanisms and velocity field after optimization (*j* =20°, *C*=32 m, *c*=0 kPa)

图 5 为*j* =15°, *C*=16 m, *c*=0 kPa 时经优化得到的破坏模式和速度场。可看出,破坏模式上部延伸至地表,下部呈网格状刚性滑块体系,其中工作面前方为整体三角形刚性滑块,工作面下部各滑动面相交于一点。从速度场可看出,工作面前方岩土体的速度逐渐由竖向转变为水平,速度矢量的大小也相应增大。 图 6 为*j* =15°, *C*=32 m, *c*=0 kPa 时经优化得到的破坏模式和速度场。与图 5 相比,破坏模式和速度场的形式都较为接近,但破坏范围更广,速度矢量变化更剧烈。

图 7 和图 8 分别为j =20°, C=16 m, c=0 kPa 和 j =20°, C=32 m, c=0 kPa 时经优化得到的破坏模式 和速度场。破坏模式和速度场的形式与图 5,6 基本相 同。但破坏范围相应减小,而速度矢量变化却更为剧 烈。另外,图 8 中工作面正上方的破坏范围并未延伸 至地表。

5 结 论

在已有文献基础上,提出了浅埋隧道工作面二维 破坏模式,由一系列刚性滑块组成。由破坏模式及速 度场的几何关系,递推计算所需几何参数,得到工作 面支护反力的目标函数及约束条件,利用 Matlab 求 解。最后,通过算例分析得到以下结论:

(1)土体内摩擦角和黏聚力对浅埋隧道工作面稳 定性的影响较大。较大的内摩擦角将产生较小的破坏 范围,而较大的黏聚力将增加工作面的稳定性,相应 所需维持工作面稳定的支护反力也越小。

(2)当土体的内摩擦角和黏聚力较小时,隧道埋 深对于工作面稳定性影响更为明显;土体内摩擦角较 小时,往往更易产生贯通地表的破坏;而土体内摩擦 角较大时,随隧道埋深的增加,破坏不易贯通地表, 而局限于一定范围。

(3)由于假定土体服从相关联流动法则,由此得 到的剪胀量大于实际,此因素对计算工作面支护反力 的影响未进行考虑,需要进一步研究。

参考文献:

 BROMS B B, BENNERMARK H. Stability of clay in vertical openings[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1967, 193: 71 - 94.

- [2] DAVIS E H, GUNN M J, MAIR R J, et al. The stability of shallow tunnel and underground openings in cohesive material[J]. Géotechnique, 1980, 30(4): 397 - 416.
- [3] KLAR A, OSMAN A S, BOLTON M. 2D and 3D upper bound solutions for tunnel excavation using elastic flow fields[J]. International Journal for Numerical and Analytucal Methods in Geomechanics, 2007, 31(12): 1367 - 1374.
- [4] 姜功良. 浅埋软土隧道稳定性极限分析[J]. 土木工程学报, 1998, 31(5): 65 - 71. (JIANG Gong-liang. Shallow tunnel stability limit analysis in soft soil ground[J]. China Civil Engineering Journal, 1998, 31(5): 65 - 71. (in Chinese))
- [5] AUGARDE C E, LYAMIN A V, SLOAN S W. Stability of an undrained plane strain heading revisited[J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(5): 419 - 430.
- [6] LECA E, DORMIEUX L. Upper and lower bound solutions for the face stability of shallow circular tunnels in frictional material[J]. Géotechnique, 1990, 40(4): 581 – 606.
- [7] SOUBRA A H. Three-dimensional face stability analysis of shallow circular tunnels[C]// International Conference on Geotechnical and Geological Engineering, Melbourne, 2000.
- [8] CHEN W F. Limit analysis and soil mechanics[M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- [9] DONALD I, CHEN Z Y, Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1997, 34(6): 853 - 862.
- [10] WANG Y J, YIN J H, CHEN Z Y. Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method[J]. International Journal for Nummerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, 25(8): 841 – 851.
- [11] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土 工程学报, 2002, 24(1): 1 - 11. (CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(1): 1 - 11. (in Chinese))
- [12] ATKINSON J H, POTTS D M. Stability of shallow tunnel in cohesionless soil[J]. Géotechnique, 1977, 27(2): 203 – 215.