

岩土材料不符合 Drucker 公设的一个证明

杨 光 华

(广东省水利水电科学研究院, 广东 广州 510610)

摘 要: Drucker 公设是塑性力学中正交流动法则的基础, 但岩土材料的很多试验表明是不符合 Drucker 公设的, 认为非正交流动法则更符合试验结果, 而非正交流动法则一直缺乏理论基础。通过一个简单摩擦体的应力循环做功过程, 证明了 Drucker 塑性公设是不适用于岩土等摩擦类材料的, 因而 Drucker 公设并不是必须要遵守的公理, 摩擦类材料并不受 Drucker 公设的限制, 因而应力空间的正交流动法则并不适用于岩土等摩擦类材料, 而非正交流动法则是可用的。同时, 以应变作为状态变量的伊留申公设则具有较大的适用范围。

关键词: 岩土材料; 摩擦材料; Drucker 公设

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2010)01-0144-03

作者简介: 杨光华(1962-), 男, 教授级高级工程师, 博士, 博士生导师, 主要从事土的本构理论、深基坑工程、高层建筑基础工程和软土工程的科研及设计。E-mail: ygh@gdsky.com.cn。

A proof of geotechnical materials not in agreement with Drucker's postulate

YANG Guang-hua

(Guangdong Provincial Research Institute of Water Conservancy and Hydropower, Guangzhou 510610, China)

Abstract: The Drucker's postulate is the basis of the normality rules in plasticity, but a lot of experiments indicate that the rock and soil materials do not follow the Drucker's postulate, and that the non-normality rules are fitter for the experiments. The problem is: what is the theoretical basis of the non-normality rules? This paper proves that the Drucker's postulate is not suitable for the friction materials such as geological materials through the process that the stress cycling of a simple friction body does work, and that the normality rules in the stress space are also not suitable for the friction materials, hence the Drucker's postulate is not the axiom that must be followed, and the non-normality rules can be used. It is also proved that the Ильюшина postulate that the strain is used as the state variable has a larger scope of application.

Key words: geotechnical material; friction material; Drucker's postulate

0 前 言

众所周知, 在岩土塑性模型中, 岩土材料更适合采用非关联流动法则, 但采用非关联流动法则存在一个重大理论问题, 就是其不符合 Drucker 公设。这就存在一个非关联流动法则的合理性及其理论依据的问题, 这一直未很好解决。显然, 要解决这一理论问题, 首先必须证明 Drucker 公设对岩土材料的适应性问题。虽然不少文献对 Drucker 公设在岩土材料的适应性问题进行了很多探讨^[1-7], 但还缺乏一个公认的明晰的论证。本文通过一个摩擦材料做功过程的分析, 论证了 Drucker 公设不适用于摩擦材料的情况, 因此, 对于摩擦材料采用的非关联理论不应受限于 Drucker 公设的限制, 从而为非关联理论的合理性提供理论支持。

1 摩擦材料不符合 Drucker 公设的论证

对在荷载 p, q 作用下的摩擦运动进行研究。其对

应的应力状态和屈服规律如图 1 所示, 其摩擦屈服线为图 1 中的 $q = Mp + c'$, 即库仑定律。

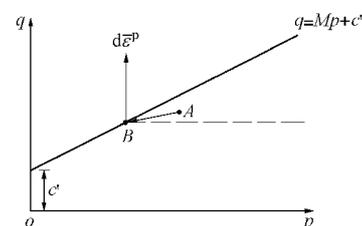


图 1 摩擦材料屈服

Fig. 1 Friction material yield

以图 2 所示物体 C 的应力从 A 点到 B 点, 然后产生应力增量 $d\mathbf{s}_{ij}$ 而产生塑性应变 $d\mathbf{e}_{ij}^p$ 的过程进行分析。具体受力过程对应于图 2 的力学问题^[5-7]。在图 1 中, 在 $q = Mp + c'$ 下方的 A 点时, 相当于在屈服面之

内, 对应于图 2 中的摩擦受力体 C 是不产生运动的。由于摩擦材料的屈服准则为 $q = Mp + c'$, 设定 A 点位于屈服范围内, B 点是位于屈服面 $q = Mp + c'$ 上, 对应于图 1 中 A 点的应力为 (p_A, q_A) , B 点的应力为 (p_B, q_B) , 其中 $p_A > p_B$, $q_A > q_B$, $q_A < Mp_A + c'$, $q_B = Mp_B + c'$ 。当 p 减少, q 也减少, 应力由图 1 中的 A 点到达 B 点时, 物体 C 处于临界状态, 此时增加 dq , 则物体 C 将沿 q 方向产生移动, 即产生塑性应变 $d\bar{e}^p$, 然后增加 p , 使其应力回到屈服面的 B 点, 则物体 C 停止运动, 不再产生塑性应变 $d\bar{e}^p$, 进一步增加 p 和 q 使其应力状态由 B 点回到 A 点, 这是一个应力循环过程, 考察其做功情况: 由于物体 C 沿 p 方向不产生位移, 设整个应力循环 $d\bar{e}_v^p = 0$, 仅发生 $d\bar{e}^p$, $d\bar{e}^p$ 与 q 方向一致。

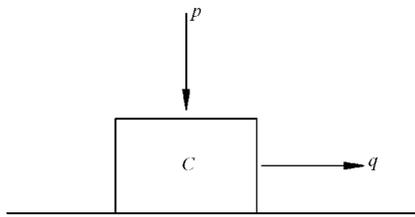


图 2 摩擦受力体

Fig. 2 The mass undergoing friction

(1) 应力循环做功 dW , 显然, 整个循环过程仅在 B 点增加 dq 时物体 C 产生塑性应变 $d\bar{e}^p$, $d\bar{e}^p$ 与 p 垂直, p 不做功, 仅 q 方向上做功, 则整个应力循环外力所做的功为

$$dW = q_B d\bar{e}^p + dq d\bar{e}^p = (q_B + dq) d\bar{e}^p \quad (1)$$

(2) 若按 Drucker 公设, 则应力循环做功大于零的不等式为

$$(s_B + ds - s_A) d\bar{e}^p \geq 0 \quad (2)$$

由于设应力循环过程中 p 不做功, 做功是由应力 q 产生, 则对于以上物体 C 的应力循环, 按 Drucker 公设所得式 (2) 为

$$(q_B + dq - q_A) d\bar{e}^p \geq 0 \quad (3)$$

显然, 由于 $q_A > q_B$, 当 $q_A \neq q_B$ 时, dq 是一个高阶小量, 可以忽略, 则式 (3) 写为

$$(q_B - q_A) d\bar{e}^p \geq 0 \quad (4)$$

由于 $q_A > q_B$, 因此式 (4) 并不成立, 也即 Drucker 公设不成立, 或这一过程是违反 Drucker 公设的, 但是合理和客观存在的。

进一步展开式 (3) 可得

$$(q_B + dq) d\bar{e}^p - q_A d\bar{e}^p \quad (5)$$

由式 (5) 可见, 其第一项 $(q_B + dq) d\bar{e}^p$ 是这一应力循环中外力真实所做的功, 而 $q_A d\bar{e}^p$ 这一项在应力循环过程中是不存在的, 是虚拟而不是真实存在的。

因此, 摩擦物体 C 在这一应力循环所做的真实的功是式 (1), 而不是式 (3) 的左边项。物体在这一过程并没有违反任何物理定律, 式 (1) 表述的功是正确的, 式 (3) 的左边项并不是物体真实存在的, 只能是一种假设, 因而不能把物体这一过程不满足式 (3) 说成是不合理的或违反能量原理的, 只能说式 (3) 的不等式不适合这一力学过程, 也即 Drucker 公设是不适合于摩擦材料的。而对于金属等非摩擦材料, 其屈服面是一个 $q = \text{const.}$ 的直线, 如图 3 所示, 显然, 其任何时候必定是 $q_A < q_B$, 则式 (4) 是必然成立的, 因此是满足 Drucker 公设的。而对于摩擦型材料, 由于其屈服面是一条斜线, 存在 $q_A > q_B$ 的情形, 因此, 摩擦型材料是不符合 Drucker 塑性公设的, 从而摩擦材料是可以不服从由 Drucker 公设所建立的正交流动法则的。

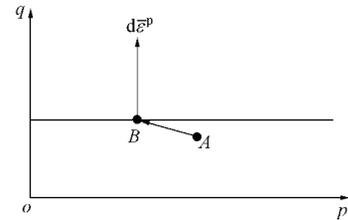


图 3 非摩擦材料屈服

Fig. 3 Non-friction material yield

2 广义塑性公设不等式

其实无论是 Drucker 公设或依留申公设, 公设不等式成立的前提是 $q_A < q_B$, 或 $s_{ij}^A d\bar{e}_{ij}^p < s_{ij}^B d\bar{e}_{ij}^p$, 同样 Drucker 公设之所以不适用于软化材料, 也是由于存在初始应力状态 s_{ij}^A 大于塑性应力状态 s_{ij}^B 的状况, 如图 4 所示, 软化阶段应力减小也会产生屈服, 而依留申公设适用于软化阶段, 是由于其采用应变 e_{ij} 作为屈服的判据, 当状态从图 4 中应力大的 A 点到应力小的屈服点 B 点时, 应变 e_{ij} 则是增加的, 其相应的塑性公设不等式为

$$(e_B + de - e_A) ds^p \geq 0 \quad (6)$$

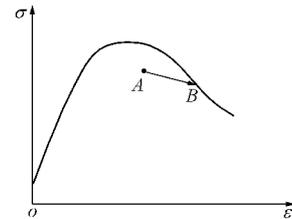


图 4 软化材料

Fig. 4 The softening material

由于 $e_B > e_A$, 因而式 (6) 不等式成立, 但若用应力状态变量表示时, 则 Drucker 公设不等式为

$$(\mathbf{s}_B + d\mathbf{s} - \mathbf{s}_A) d\mathbf{e}^p \geq 0, \quad (7)$$

由于 $\mathbf{s}_B < \mathbf{s}_A$ ，因而不等式(7)是不成立的，因此 Drucker 公设是不适合于材料软化阶段的。因此，塑性公设是否成立关键是选择合适的判断屈服的自变量。设 a_1 为初始状态变量， a_2 为达到屈服时的状态变量，增加一状态变量增量 Δa 时，材料产生一不可恢复的状态增量 Δb ，则广义塑性公设的不等式可写为

$$(a_2 + \Delta a - a_1)\Delta b \geq 0. \quad (8)$$

要使式(8)成立，关键是状态变量 a 的选择，若选择的状态变量处处存在 $a_2 > a_1$ 或 $a_2\Delta b \geq a_1\Delta b$ ，则不等式成立，否则是不成立的。如在应力应变空间中，当取 $a = \mathbf{s}_{ij}$ ， $b = \mathbf{e}_{ij}^p$ 时，则式(8)即为 Drucker 公设不等式。Drucker 公设不等式对软化材料和摩擦材料是不成立的。当取 $a = \mathbf{e}_{ij}$ ， $b = \mathbf{s}_{ij}^p$ 时，则式(8)为依留申公设不等式。依留申公设选择应变表示屈服，由于用应变表示时无论摩擦材料或软化材料，均有屈服时的应变变量 \mathbf{e}_{ij} 大于非屈服时的应变变量 \mathbf{e}_{ij} ，因此，依留申公设不等式具有更大的适用性。当然也可选择 $a = \mathbf{e}_{ij}$ ， $b = \mathbf{e}_{ij}^p$ ，则式(8)是一种新的不等式，因而式(8)可以看作作为一种广义的塑性公设不等式，但其成立是有前提条件的。因此，采用应变空间表述的本构模型具有更大的适用性，而实际中建立以应变表达的屈服准则较少，这是需进一步研究的。要建立以应变空间表述的本构模型可考虑采用广义位势理论^[8]。

3 结 语

已知 Drucker 塑性公设是不适用于软化材料的，本文进一步证明了 Drucker 公设同样不适用于摩擦材料。摩擦材料采用的模型不满足 Drucker 公设并不等于就是不合理的，不能以 Drucker 公设不等式来衡量非关联流动法则的合理性。

塑性公设不等式是否适用关键在于物体状态变量的合理选择，采用以应变表示的屈服变量的塑性公设不等式具有较大的适用范围。

参考文献:

[1] MROZ Z. Non-associated flow laws in plasticity[J]. Journal de

Mecanique, 1963, 2(1): 11 - 14.

- [2] 殷有泉, 曲圣年. 弹塑性耦合和广义正交法则[J]. 力学学报, 1982, 14(1): 29 - 41. (YIN You-quan, QU Sheng-nian. The elasto-plastic coupling and general orthogonal principle[J]. ACTA Mechanica Sinica, 1982, 14(1): 29 - 41. (in Chinese))
- [3] 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式[J]. 岩土工程学报, 1980, 2(2): 11 - 19. (SHEN Zhu-jiang. Rational form of elasto-plastic stress-strain relation for soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1980, 2(2): 11 - 19. (in Chinese))
- [4] 杨光华. 土体材料本构特性的数学分析[C]// 第六届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会议文集. 广州: 广东科技出版社, 1998: 92 - 97. (YANG Guang-hua. Mathematical analysis on the constitutive characteristic of soil materials[C]// Proceedings of the 6th National Conf on the Numerical Analysis and Analytical Method for Rock and Soil Mechanics. Guangzhou: Guangdong Science and Technology Press, 1998: 92 - 97. (in Chinese))
- [5] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. Principle of geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002. (in Chinese))
- [6] 刘元雪. 岩土本构理论的几个基本问题研究[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(1): 45 - 48. (LIU Yuan-xue. Study of several basic problems in constitutive theory of geomaterials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(1): 45 - 48. (in Chinese))
- [7] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975.
- [8] 杨光华, 李广信, 介玉新. 土的本构模型的广义位势理论及其应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007. (YANG Guang-hua, LI Guang-xin, JIE Yu-xin. The general potential theory for soil constitutive model and its application[M]. Beijing: China Waterpower Press, 2007. (in Chinese))