

一类新型超混沌系统的非线性反馈同步研究

郑皓洲*^① 胡进峰^① 徐 威^② 刘立东^① 何子述^①

^①(电子科技大学电子工程学院 成都 611731)

^②(空军大连通信士官学校 大连 116600)

摘 要: 一类由快变和慢变吸引子构成的新型超混沌系统, 具有强的抗噪声能力, 但是采用传统同步算法时, 同步收敛速度较慢, 同步性能对响应系统参数敏感。针对该问题, 该文提出非线性反馈同步算法, 根据 Hurwitz 稳定原理, 设计非线性控制变量, 使得误差方程雅可比矩阵的特征值实部均小于零, 并使得特征值的绝对值较大。该算法比传统同步算法收敛速度快, 并且具有对系统参数不敏感的优点。仿真结果验证了上述算法的有效性。

关键词: 信号处理; 同步; 非线性反馈

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)-04-0844-05

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.00807

Study on Synchronization of a New Class of Hyperchaotic Systems Using Nonlinear Feedback Control

Zheng Hao-zhou^① Hu Jin-feng^① Xu Wei^② Liu Li-dong^① He Zi-shu^①

^①(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

^②(Air Force Dalian Communication Segment College, Dalian 116600, China)

Abstract: The hyperchaotic system, composed of high and slow frequency part, is robust to strong noise. If the conventional synchronization algorithms are used in this system, the convergence rate of synchronization is slow and synchronization performances are sensitive to the parameters of response system. To resolve the problems, the synchronization algorithm using nonlinear feedback control is proposed, according to Hurwitz stability theory, designing a nonlinear controller can make the real parts of the eigenvalues of the error equation's Jacobian matrix negative and the absolutes of the eigenvalues large. So the convergence rate of synchronization is faster than that of conventional synchronization, besides, it has the advantage of parameters insensitivity. Finally, numerical simulations are given to verify the effectiveness of the proposed methods.

Key words: Signal processing; Synchronization; Nonlinear feedback control

1 引言

混沌信号是一类内在确定外在类似随机性的特殊信号, 与随机信号相比, 混沌信号是可控和可同步的, 这使得混沌应用于神经网络、保密通信和混沌雷达中具有更多的潜在优越性。混沌同步是混沌应用于实际工程的主要特色之一^[1,2], 因而, 混沌同步已成为目前的研究热点^[1-9]。但普通混沌系统的同步处理对噪声非常敏感, 所以, 设计抗噪声能力强的混沌系统是当前工程需要, Carroll^[3] 提出一类新型超混沌系统, 具有强的抗噪声能力。

但是, 采用传统同步算法时, 这类超混沌系统的同步性能较差, 所以, 对此类新型超混沌系统的

同步研究具有重要的理论意义和实际价值。目前, 传统混沌同步算法有耦合同步、自适应同步、主动-被动同步和驱动-响应同步(P-C 同步)等方法^[4-7]。其中, 很多文献对超混沌系统进行了同步研究, 比如有驱动-响应同步^[7]、单一耦合同步^[8]和线性反馈同步^[9]等方法。但同步收敛速度较慢和对参数敏感。

针对上述问题, 本文提出非线性反馈同步算法, 并以上述抗噪声能力强的超混沌系统为例, 理论上证明了本文算法具有优异的同步性能和参数不敏感特性。通过设计非线性控制向量, 使得误差方程雅可比矩阵的特征值实部均小于零, 根据 Hurwitz 稳定原理, 两个系统实现了混沌同步。同时, 该算法不需要求得最大 Lyapunov 指数或建立 Lyapunov 函数, 从而减少了计算量。最后, 通过单一耦合同步的性能比较, 仿真表明, 本文同步算法具有好的收敛速度、单调性和对响应系统参数不敏感的优点。

2010-08-05 收到, 2010-11-11 改回

国家部委基金(9140A07011609DZ0216), 博士点基金(200806141026)

和中央高校基本科研业务费专项资金(ZYGX2009J011)资助课题

*通信作者: 郑皓洲 hktk8587161@yahoo.com.cn

2 非线性反馈同步

驱动和响应系统设计如式(1)和式(2):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{h}) + \mathbf{u}(t) \quad (2)$$

其中 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^{n \times 1}$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in R^{n \times 1}$ 。 $\mathbf{u}(t)$ 为非线性控制向量, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)]^T \in R^{n \times 1}$ 。

非线性控制向量分解为两项, 如式(3):

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{W}(t) \quad (3)$$

其中 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 为变量 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 的控制向量, $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_n(t)]^T \in R^{n \times 1}$ $\mathbf{W}(t)$ 为控制函数, 式(2)与式(1)相减得误差方程为

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{W}(t) \quad (4)$$

根据 Hurwitz 稳定原理^[10], 通过设计 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $\mathbf{W}(t)$, 从而使误差方程式(4)的雅可比矩阵特征值实部均小于零, 同时, 当误差向量满足式(5)时:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = 0 \quad (5)$$

其中 $\mathbf{e}(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]^T \in R^{n \times 1}$ 为误差向量, $\|\cdot\|$ 为范数, 此时, 系统达到混沌同步。此外, 当参数向量 \mathbf{g} 、 \mathbf{h} 不一致时, 由于误差方程式(4)中 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $\mathbf{W}(t)$ 向量可控制, 所以, 选择合适的 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $\mathbf{W}(t)$ 使两个系统达到混沌同步成为可能。

3 新型超混沌系统同步设计

3.1 新型超混沌系统

普通混沌系统的同步处理对噪声非常敏感, 当信噪比不足 10 dB 时, 混沌同步会被完全破坏, Carroll 提出一类强抗噪声能力的新型超混沌系统, 当噪声超过混沌信号时, 混沌系统可实现同步^[3]。其原因是这类新型超混沌系统由快变吸引子和慢变吸引子构成, 而慢变吸引子等价于一个滤波器, 从而具有滤除噪声的功能。此系统相图如图 1, 步长为 0.1, 快变吸引子 ($x_1 \sim x_3$) 为宽带高频信号, 如图 1(a), 慢变吸引子 ($x_4 \sim x_6$) 为窄带低频信号, 如图 1(b)。新型超混沌数学模型为

$$\left. \begin{aligned} dx_1/dt &= -(c_1x_1 + 0.5x_2 + x_3) \\ dx_2/dt &= -(-x_1 - c_2x_2 + x_4) \\ dx_3/dt &= -(-g(x_1) + x_3) \\ dx_4/dt &= -c_3(c_4x_4 + 0.5x_5 + x_6 + c_5|x_1|) \\ dx_5/dt &= -c_3(-x_4 + c_6x_5) \\ dx_6/dt &= -c_3(-g(x_4) + x_6) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{其中 } g(x) = \begin{cases} 15(x-3), & x > 3 \\ 0, & x \leq 3 \end{cases}$$

参数变量 $\mathbf{g} = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6]^T$ 如式(7):

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 0.02, \quad c_2 = 0.13, \quad c_3 = 0.01 \\ c_4 &= 0.1, \quad c_5 = 0.5, \quad c_6 = 0.1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

初始条件如式(8):

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) &= 0.7, \quad x_2(0) = 0.8, \quad x_3(0) = 0.1 \\ x_4(0) &= 0.02, \quad x_5(0) = 0.5, \quad x_6(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3.2 混沌同步设计及参数敏感性分析

响应系统设计如式(9):

$$\left. \begin{aligned} dy_1/dt &= -(d_1y_1 + 0.5y_2 + y_3) + u_1(t) \\ dy_2/dt &= -(-y_1 - d_2y_2 + y_4) + u_2(t) \\ dy_3/dt &= -(-g(y_1) + y_3) + u_3(t) \\ dy_4/dt &= -d_3(d_4y_4 + 0.5y_5 + y_6 + d_5|y_1|) + u_4(t) \\ dy_5/dt &= -d_3(-y_4 + d_6y_5) + u_5(t) \\ dy_6/dt &= -d_3(-g(y_4) + y_6) + u_6(t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{其中 } g(y) = \begin{cases} 15(y-3), & y > 3 \\ 0, & y \leq 3 \end{cases}$$

$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t), u_6(t)]^T$ 为非线性控制向量, $\mathbf{h} = [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6]^T$ 为响应系统的参数变量, 它与驱动系统的参数关系如式(10):

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= kc_1, \quad d_2 = kc_2, \quad d_3 = kc_3 \\ d_4 &= kc_4, \quad d_5 = kc_5, \quad d_6 = kc_6 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中 k 为两者参数比例关系。

命题 1 如何设计控制向量 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和控制函数 $\mathbf{W}(t)$ 是混沌同步实现的关键。在本超混沌系统中, 控制向量 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和控制函数 $\mathbf{W}(t)$ 分别设计为

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -0.02(x_1 - ky_1) \\ 0.13(x_2 - ky_2) \\ g(x_1) - g(y_1) \\ -0.001x_4 + 0.001k^2y_4 + 0.005k|y_1| - 0.005|x_1| \\ 0.01(-ky_4 + x_4 + 0.1k^2y_5 - 0.1x_5) \\ 0.01(-kg(y_4) + g(x_4) + ky_6 - x_6) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} -m_1 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -m_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_3 & 0.005 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_5 \end{bmatrix} \mathbf{e}$$

其中 $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, m_3 \geq 0, m_4 \geq 0, m_5 \geq 0$, 误差向量 $\mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]^T \in R^{6 \times 1}$, $e_i = y_i - x_i$, $i = 1, 2, \dots, 6$ 。此时, 响应系统与驱动系统实现混沌同步。

证明 式(9)与式(6)相减得误差方程, 如式(11):

$$\left. \begin{aligned} de_1/dt &= 0.02(x_1 - ky_1) - 0.5e_2 - e_3 + u_1(t) \\ de_2/dt &= e_1 - 0.13(x_2 - ky_2) - e_4 + u_2(t) \\ de_3/dt &= g(y_1) - g(x_1) - e_3 + u_3(t) \\ de_4/dt &= -0.01(0.5e_5 + e_6 + 0.5k|y_1| - 0.5|x_1|) \\ &\quad - 0.01(-0.1x_4 + 0.1k^2y_4) + u_4(t) \\ de_5/dt &= -0.01(-ky_4 + x_4 + 0.1k^2y_5 - 0.1x_5) + u_5(t) \\ de_6/dt &= -0.01(-kg(y_4) + g(x_4) + ky_6 - x_6) + u_6(t) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中 $u(t)$ 与 $W(t)$ 关系如式(12):

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= w_1(t) - 0.02(x_1 - ky_1) \\ u_2(t) &= w_2(t) + 0.13(x_2 - ky_2) \\ u_3(t) &= w_3(t) + g(x_1) - g(y_1) \\ u_4(t) &= w_4(t) - 0.001x_4 + 0.001k^2y_4 \\ &\quad + 0.005k|y_1| - 0.005|x_1| \\ u_5(t) &= w_5(t) + 0.01(-ky_4 + x_4 + 0.1k^2y_5 - 0.1x_5) \\ u_6(t) &= w_6(t) + 0.01(-kg(y_4) + g(x_4) + ky_6 - x_6) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

根据式(12), $G(x, y)$ 可以设计为

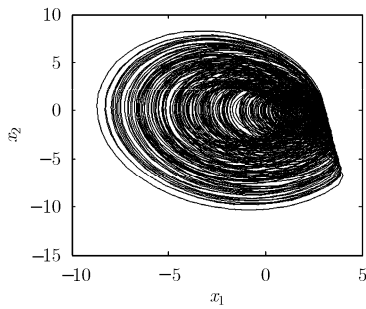
$$\left. \begin{aligned} g_1(x, y) &= -0.02(x_1 - ky_1) \\ g_2(x, y) &= 0.13(x_2 - ky_2) \\ g_3(x, y) &= g(x_1) - g(y_1) \\ g_4(x, y) &= -0.001x_4 + 0.001k^2y_4 + 0.005k|y_1| - 0.005|x_1| \\ g_5(x, y) &= 0.01(-ky_4 + x_4 + 0.1k^2y_5 - 0.1x_5) \\ g_6(x, y) &= 0.01(-kg(y_4) + g(x_4) + ky_6 - x_6) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(12)代入误差方程式(11)得

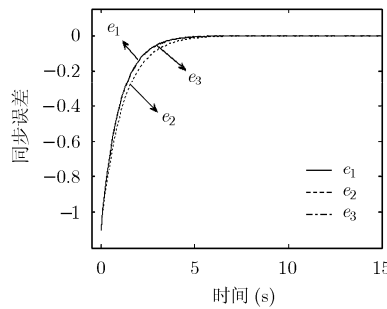
$$\left. \begin{aligned} de_1/dt &= -0.5e_2 - e_3 + w_1(t) \\ de_2/dt &= e_1 - e_4 + w_2(t) \\ de_3/dt &= -e_3 + w_3(t) \\ de_4/dt &= -0.01(0.5e_5 + e_6) + w_4(t) \\ de_5/dt &= w_5(t) \\ de_6/dt &= w_6(t) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

控制函数 $w(t)$ 是误差变量 e 的函数, 根据 Hurwitz 稳定性原理, 当式(14) 雅可比矩阵的特征值实部均小于零, 且当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ 时, 此时两个系统达到同步。为使误差方程的特征值实部小于零, 本文设计了一种 $W(t)$, 如式(15):

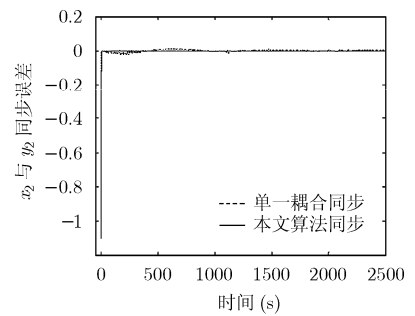
$$\left. \begin{aligned} w_1(t) &= -m_1e_1 + 0.5e_2 + e_3, \quad w_2(t) = -e_1 - m_2e_2 + e_4 \\ w_3(t) &= 0, \quad w_4(t) = 0.005e_5 + 0.01e_6 - m_3e_4 \\ w_5(t) &= -m_4e_5, \quad w_6(t) = -m_5e_6 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$



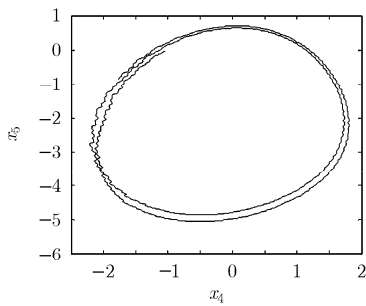
(a) 快变吸引子相图



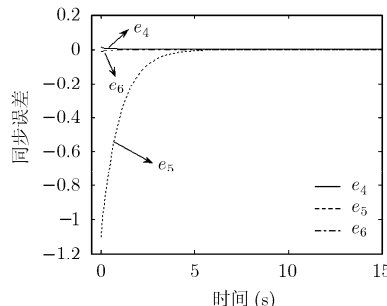
(a) 快变吸引子 $x_1 \sim x_3$ 同步误差图



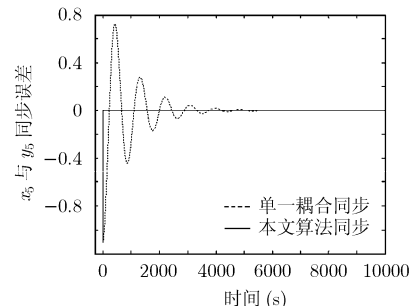
(a) x_2 同步误差



(b) 慢变吸引子相图



(b) 慢变吸引子 $x_4 \sim x_6$ 同步误差图



(b) x_5 同步误差

图1 快变和慢变吸引子相图

图2 吸引子同步误差图

图3 x_2 与 x_5 在两种同步算法下的同步误差比较

其中 $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0, m_3 \geq 0, m_4 \geq 0, m_5 \geq 0$ 。此时，雅可比矩阵为

$$\begin{bmatrix} -m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_5 \end{bmatrix} \quad (16)$$

特征值分别为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 = -m_1, \lambda_2 = -m_2, \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = -m_3, \lambda_5 = -m_4, \lambda_6 = -m_5 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

从式(17)看出，特征值全部小于零，通过选取较大的 $m_1 \sim m_5$ 值，使特征值的绝对值较大，从而使同步收敛速度快。此外，根据式(14)和式(15)，本文设计的控制函数 $W(t)$ 与参数比例系数 k 无关，说明本文设计的非线性反馈同步算法对参数不敏感。

4 数值仿真

4.1 同步仿真

仿真分析以验证上述算法的正确性。假设响应与驱动系统的参数一致，且 $m_1 \sim m_5$ 取值为(1,1, 1, 1, 1)。仿真如图2，驱动和响应系统初始值分别为(0.7, 0.8, 0.1, 0.02, 0.5, 0)和(1.8, 1.9, 1.2,

0.01, 1.6, 0.01)，步长为0.1 s。可看出6个变量在时间 t 约为7 s时，系统便达到混沌同步，说明此混沌同步收敛速度快。此外，该同步误差呈单调上升或下降的特点，即没有振荡性，所以单调性好。

4.2 单一耦合同步对比

本文同步算法与传统单一耦合同步在性能上进行了比较，其中耦合变量为 x_2 ，耦合系数为 40，步长为 1 s，仿真如图 3。可看出本文同步算法收敛速度优于单一耦合同步。此外，采用单一耦合同步算法时， x_2, x_5 同步误差具有振荡性，而本文同步算法下的 x_2, x_5 同步误差呈单调上升的特点，本文已验证其它变量，并得到一致结果。所以，跟单一耦合同步相比，本文同步算法具有好的收敛速度和单调性。

4.3 参数敏感性对比

实际工程中，响应与驱动系统参数无法完全一致，而传统混沌同步对响应系统的参数敏感，文献[11]当响应系统的参数为驱动系统参数的 0.9 倍时，混沌同步性能较差。

图 4(a), 图 4(b) 分别为单一耦合同步下 x_3, x_5 同步仿真图， k 为 0.5，可看出同步性能较差。同理，图 4(c), 图 4(d) 分别为本文同步算法下 x_3, x_5 同步仿真图， k 为 0，可看出同步性能仍然好。此外，本文验证了其它变量的比较，并得到了一致结果，说明此时同步性能没有下降。

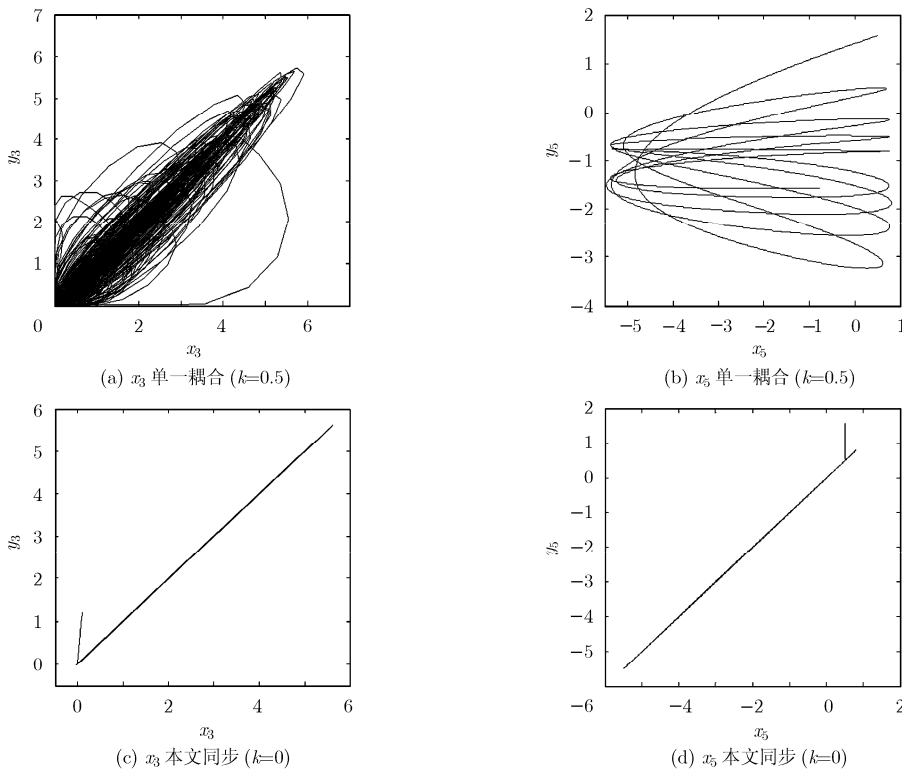


图 4 不同参数 k 下，两种同步算法的仿真比较

5 结束语

本文提出了设计简单的非线性反馈同步算法, 通过设计非线性控制变量, 使得误差方程雅可比矩阵的特征值实部均小于零, 并以一类 6 阶新型超混沌系统为例。通过理论证明和仿真验证, 本文同步比传统同步算法收敛速度快。

同时, 本文算法不需要建立 Lyapunov 函数或求最大 Lyapunov 指数, 从而减少了计算量。本文算法从理论上证明了具有跟系统参数不敏感特性, 这提高了工程应用的潜力。最后, 通过与单一耦合同步收敛速度和参数敏感性能的比较, 仿真验证了上述优点, 综上所述, 本文同步算法具有一定的普遍性和实用性。

参 考 文 献

- [1] Pisarchik A N and Oliveras F R. Optical chaotic communication using generalized and complete synchronization[J]. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 2010, 46(3): 299(a)-299(f).
- [2] Li Ke-zan, Zhao Ming-chao, and Fu Xin-chu. Projective synchronization of driving-response systems and its application to secure communication[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, 2009, 56(10): 2280-2291.
- [3] Carroll T L. Chaotic systems that are robust to added noise[J]. *Chaos*, 2005, 15(1): 013901(1)-013901(7).
- [4] Kurian A P and Leung H. Weak signal estimation in chaotic clutter using model-based coupled synchronization[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers*, 2009, 56(4): 820-828.
- [5] Grosu I, Banerjee R, and Roy P K, *et al.* Design of coupling for synchronization of chaotic oscillators[J]. *Physical Review E*, 2009, 80(1): 016212(1)-016212(8).
- [6] Sorrentino F, Barlev G, and Cohen A B, *et al.* The stability of adaptive synchronization in chaotic systems[J]. *Chaos*, 2010, 20(1): 013103(1)-013103(10).
- [7] Pecora L M and Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 94(8): 821-825.
- [8] 程丽, 张入元, 彭建华. 用单一驱动变量同步混沌与超混沌的一种方法[J]. *物理学报*, 2003, 52(3): 536-541.
Cheng Li, Zhang Ru-yuan, and Peng Jian-hua. A method for synchronizing chaos and hyperchaos by single driving variable[J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(3): 536-541.
- [9] Lorfa A. Master-slave synchronization of fourth-order lithium chaotic oscillators via Linear Output Feedback[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—II: Express Briefs*, 2010, 57(3): 213-217.
- [10] Yang Chun-yu, Zhang Qing-ling, and Lin Yan-ping, *et al.* Positive realness and absolute stability problem of descriptor systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Regular Papers*, 2007, 54(5): 1142-1149.
- [11] Alonge F, Branciforte M, and Motta F. A novel method of distance measurement based on pulse position modulation and synchronization of chaotic signals using ultrasonic radar systems[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation And Measurement*, 2009, 58(2): 318-329.

郑皓洲: 男, 1984年生, 硕士生, 研究方向为随机信号雷达。

胡进峰: 男, 1976年生, 副教授, 从事随机信号雷达研究。

刘立东: 男, 1982年生, 博士, 研究方向为随机信号雷达。