

文章编号: 1007-7294(2011)04-0377-06

材料衍生比例定律的建立及其在结构屈曲 断裂非线性失效中的应用

熊志鑫¹, 张志平², 佟福山¹

(1 哈尔滨工程大学 船舶工程学院, 哈尔滨 150001; 2 DNV 船级社 上海分部, 上海 200336)

摘要: 基于应变能定理和切线模量理论的内涵, 研究应力应变曲线非线性阶段的实际应力和满足比例关系的线性应力之间的关系, 可以得到不受比例极限限制的材料衍生比例定律。文中重点讨论该定律的建立过程, 并引用大深度潜器耐压球壳弹塑性失稳进行了例证, 最后说明该定律用于计算弹塑性断裂的方法以及与各断裂度量的关系。实例表明, 结构非线性失效问题可以用衍生比例定律得到较好的解决。

关键词: 衍生比例定律; 切线模量理论; 弹塑性屈曲; 潜水器耐压壳; 弹塑性断裂; 非线性失效

中图分类号: O343.5 **文献标识码:** A

Establishment of derivative proportional law and its application in elastic-plastic buckling and fracture of structures

XIONG Zhi-xin¹, ZHANG Zhi-ping², TONG Fu-shan¹

(1 College of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China;

2 Shanghai Branch of Det Norske Veritas, Shanghai 200336, China)

Abstract: Based on the strain energy theory and the connotation of tangent modulus theory, a new law called derivative proportional law of materials is established. This law is the innovation of Hooke's Law which is not limited by proportional limit of material and can reflect general view of stress-strain curve including linear part and nonlinear part. Using the relationship of real material stress and perfect elastic stress, the buildup process of derivative proportional law is discussed. This law can be used to calculate and analyze structure elastic-plastic buckling and elastic-plastic fracture by a four-parameter equation. Some experiment data indicate that the calculation values fit well with experiment results. So it is meaningful for practical application.

Key words: derivative proportional law; tangent modulus theory; elastic-plastic buckling; submersible pressure hull; elastic-plastic fracture; nonlinear failure

1 引 言

力学发展史表明, 非线性问题的建模与求解是极其艰辛和费力的工作, 需要大量繁复的力学推导和数学运算。近年来, 随着大型高速计算机的出现, 国内外许多学者采用能量法、有限元法以及有限差分法对非线性的屈曲和断裂问题作了诸多的数值分析。但由于大挠度带来的几何非线性和屈服所造

收稿日期: 2010-08-23

作者简介: 熊志鑫(1983-), 男, 哈尔滨工程大学船舶工程学院博士研究生。

成的物理非线性的耦合,使问题的分析变得非常困难,并导致计算花费的昂贵。为此,一方面,很多学者继续采用对经典线性理论修正的方法来解决非线性问题;另一方面,人们对非线性理论本身进行反思。衍生比例定律就是综合两方面考虑而产生的必然结果。

2 衍生比例定律的建立和解析模型

2.1 衍生比例定律的理论依据

以切线模量因子为基本参数的强度稳定综合理论可以较好地解决薄壳的承载能力问题和指导实验^[1]。随着该理论的进一步发展,在疲劳、断裂、灰色预测等领域得到了较广泛的应用。因此,研究者对切线模量理论本身进行了反思。

文献[2]利用应变能定理对切线模量理论进行了新的论证,并指出了其应用扩展的可能性。

文献[3]进一步指出切影应变 ε_t 是与应变能密度相对应的平衡状态参数,基于切影应变 ε_t 建立的材料衍生比例定律是用材料参数对材料试件的拉(压)平衡状态做出的数学描述,这种描述适用于各种材料和每一个拉(压)平衡状态。

文献[4]把衍生比例定律概括为胡克定律(Hooke's Law)的革新,称其是材料固有的一种物理性质,它的使用不受材料比例极限的限制,是比胡克定律使用范围更广泛的一个基本定律。

衍生比例定律即是利用切线模量将各种线性理论转化为相应的非线性理论,利用应力应变曲线上的物理参数建立了实际材料应力和理想弹性材料应力间相对应的函数关系。

2.2 衍生比例定律的建立

如图 1 所示,建立材料的 $\bar{\sigma}\sim\bar{\varepsilon}$ 曲线,其中直线 $\bar{\sigma}_L(\bar{\varepsilon}_L)$ 反映理想弹性材料的应力应变关系,该直线表达式为:

$$\bar{\sigma}_L = \bar{\varepsilon}_L \tag{1}$$

材料的实际应力应变关系为曲线 $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ 所示,

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}) \tag{2}$$

通过切影应变,实际应力可表示为

$$\bar{\sigma}_t = \bar{\varepsilon}_t \times (d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon}_t f'(\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon}_t g(\bar{\sigma}) \tag{3}$$

利用理想状态和实际平衡情况在每个极限平衡状态下切影应变相等的内涵,可以建立实际应力和理想弹性应力的关系:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_L g(\bar{\sigma}) \tag{4}$$

理想弹性应力已是经典理论研究比较透彻的,利用材料常数可以方便求得非线性的实际应力。

由于使用参数 Φ_1 表达材料应力应变曲线的广泛性和方便性,所以采用基于切线模量因子 Φ_1 的函数来表达和求解实际应力。这将在下节中作进一步的说明。

2.3 衍生比例定律的解析模型

衍生比例定律数学模型的建立步骤如下:

(1) 建立材料的无量纲相对应力应变 $\bar{\sigma}\sim\bar{\varepsilon}$ 曲线。其中, $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ (σ_0 为屈服极限或其代用值), $\bar{\varepsilon} = E\varepsilon/\sigma_0$ 。

(2) 建立材料 $\bar{\sigma}\sim\Phi_1$ 曲线。其中

$$\Phi_1 = \frac{1}{\bar{\sigma}_L} = \frac{\sigma_0 E_t}{\sigma E} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} \tag{5}$$

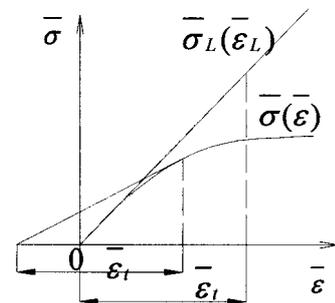


图 1 无量纲应力应变曲线
Fig.1 Dimensionless stress-strain curve

(3) 对 $\bar{\sigma}-\Phi_t$ 曲线进行数据拟合。拟合可以采用特征点的方法^[9],也可以采用最小二乘法,得到表达 $\bar{\sigma}-\Phi_t$ 曲线的四参数解析模型:

$$\bar{\sigma}=(A-B\Phi_t^c)^m, A, B, c, m \text{ 为材料常数} \tag{6}$$

(4) 如果 σ_t 取得的是弹性失效力,则对应的实际非线性应力为临界失效力:

$$\bar{\sigma}=(A-B(n\phi)^c)^m \tag{7}$$

也表达为 $\psi=(A-B(n\phi)^c)^m$,称作强度利用率函数。其中, ψ 表示结构失效时材料的强度利用率; $\phi=\sigma_0/\sigma_E$,对应结构线性失效的参数; n 是综合因子,反映各种因素对结构稳定性的影响。

3 强度利用率函数 $\psi=(A-B\Phi_t^c)^m$ 的适用性

$\psi=(A-B\Phi_t^c)^m$ 是一个曲线族,是一系列应力应变函数的缩简形式,其代表性是很广泛的^[9]。大量的实例证明,强度利用率函数对大多数材料具有很好的适用性。

3.1 实例证明

文献[6]通过引入一个六参数方程来描述材料应力应变的非线性关系,再分四组对其中几个参数取常值进行简化后,得到相应的四个强度利用率函数,(6)式正是这四个函数的通式。考察分组中的第 II 种简化方案^[7-9],利用得到的三参数方程分别对 13 种常用钢材的应力应变关系进行曲线拟合,得到较高的拟合精确度,体现了六参数方程对材料的广泛应用性。

文献[10]通过研究大量的材料曲线指出,“以材料常数 A, B, c 和 m 来表示材料的非线性特征和各种不同材料之间的共性,是一种较好的表示方法”。

3.2 与潜水器规范表达的一致性

文献[6]建议使用(8)式作为计算强度利用率的通式:

$$\psi = \begin{cases} 1/\phi & (\phi > 2.0) \\ 1/(1+0.25\phi^2) & (\phi < 2.0) \end{cases} \tag{8-1}$$

$$\tag{8-2}$$

为便于比较,将(8-2)式转换表达如下:

$$\frac{\sigma}{\sigma_e} = \frac{(\sigma_e/\sigma_s)}{0.25 + (\sigma_e/\sigma_s)^2} \tag{9}$$

表达式(8)与中国潜水器规范^[11]的物理修正曲线 C_s 的比较如图 2 所示。由图可知,在 $\phi < 0.8$ (即 $\sigma_e/\sigma_s > 1.25$)时,(8)式可以作为修正曲线 C_s 的替代值使用。在 $\sigma_e/\sigma_s > 2.0$ 时,三条曲线显示出高度的一致性。

DNV 规范对于耐压壳塑性稳定性的修正系数:

$$\eta = 1/\sqrt{1 + \sigma_e^2/\sigma_s^2} \tag{10}$$

则可通过取 A=1, B=1, c=-2, m=-1/2 得到。

4 衍生比例定律在结构塑性屈曲中的应用

近年来,深海载人潜水器在各国都得到了极大的重视和发展。随着潜水器潜入深度的增加,厚度

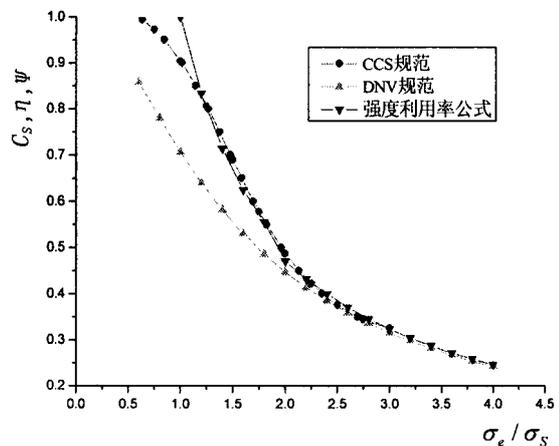


图 2 规范塑性修正系数值和公式(8)的比较
Fig.2 Correction coefficient of non-linearity of three cases

半径比增大,球壳已属于中厚球壳范围。基于应变能定理立论的衍生比例定律是强度稳定综合理论的新发展,适用于拉、压作用下平衡状态的任何构件,这也扩充了强度稳定综合理论的使用范围。所以,基于该定律计算潜水器耐压壳极限承载能力,可以继续对经典稳定理论中的临界应力加以修正使用。

4.1 钛合金球壳的强度利用率函数式

按照 2.3 节的步骤,可以得到深海载人潜水器耐压壳的常用钛合金材料在比例极限以上失稳时的强度利用率函数式:

$$\psi = [-0.0177 + 0.0273\Phi^{(-1.65)}]^{0.0337} \quad (\sigma_j \geq \sigma_p) \quad (11)$$

4.2 材料衍生比例定律算法的结果分析

表 1 计算值与试验结果的比较

Tab.1 Comparison between calculation values and experiment results

编号	Φ mm	t mm	经典应力 σ_E	计算值 σ_{cr}	计算载荷 P_{cr}	试验值 P_{exp}	P_{cr}/P_{exp}	文献[12]的比值
1	500	9	2 708.27	755.98	54.43	58.8	1.080	1.04
2	100	1.6	2 407.35	750.52	48.03	50.8	1.058	1.12
3	100	1.8	2 708.27	755.98	54.43	58.5	1.075	1.11
4	100	1.8	2 708.27	755.98	54.43	60.3	1.108	1.16
5	100	2.0	3 009.19	760.82	60.86	66.2	1.088	1.14
6	700	11.5	2 471.84	751.75	49.40	53.2	1.077	1.03

由表 1 可以看出,计算值与试验结果误差基本都在 10%以内。与文献[13]介绍的简易算法相比,本文的方法立论于应变能定理,应用范围更广泛,使用也更为规范和方便。

4.3 结果误差的调整和 n 的物理意义

上式中的计算值与试验结果存在着误差的原因在于:在实际中,由于工艺或实际需要,球壳总是存在着几何缺陷、残余应力等。这种影响可以通过引入系数 n 来量化。表 1 中,对 n 取 2.55,则计算值与试验值相对误差都在 5%以内。

n 值的大小既可以通过理论分析算出,也可以统计试验数据得出。通过 n 可以反映各种因素等对结构承载能力的影响。如果因素过多,则可以选取主要因素建立 n 的表达式

$$n = f(n_1) f(n_2) \dots \dots \quad (12)$$

显然,充分利用 n 值对实验数据进行整理分析,可以达到通过少数模型实验的方法确定多数原型极限载荷的目的。

5 衍生比例定律在弹塑性断裂中的应用

根据裂纹端部塑性区尺寸的大小,弹塑性断裂问题可以分为小范围屈服断裂,大范围屈服断裂和全面屈服断裂。前者可以通过对应力强度因子修正后进行计算,后两者则通过引入裂纹张开位移(COD)法和 J 积分的方法解决。利用衍生比例定律,可以代替或联合上述的方法来解决弹塑性断裂力学问题。

5.1 对应力强度因子 K_{Ic} 的修正使用

无限宽板 I 型裂纹的线性断裂临界应力为:

$$\sigma_L = K_{Ic} / \sqrt{\pi a} \quad (13)$$

利用(6)式,则对应的非线性断裂临界应力为:

$$\bar{\sigma}_{cr} = [A - B(\sigma_0 \sqrt{\pi a} / K_{Ic})^c]^m \quad (14)$$

文献[14-15]验证了(14)式是一些实验统计经验算式的通式。

5.2 与 COD 法的等效性

COD 方法虽然缺乏严密的理论基础和分析手段,但是由于它能简单有效地解决实际问题,所以仍然得到了工程界广泛的使用。在非线形临界应力的计算中广泛应用的 COD 法经验近似值为:

$$\delta_c = \pi a \frac{\sigma_s}{E} \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (15)$$

取 Φ_1 近似值 σ_s / σ , 并联合(6)式和(15)式,可得:

$$\bar{\sigma}_{cr} = \left[A - B \left(\sigma_0 \sqrt{\pi a} / \sqrt{E \sigma_s \delta_c} \right)^c \right]^m \quad (16)$$

裂纹尖端张开位移值 δ_c 是一个材料常数,此常数和应力强度因子 K_{Ic} 有函数关系^[6]:

$$\delta_c = K_{Ic}^2 / E \sigma_s \quad (17)$$

联立(5)、(13)和(17)式,可得和(16)式相同的表达。

通过 5.1 和 5.2 节的分析可知,衍生比例定律算法与修正 K_{Ic} 法、COD 法不同之处在于考虑了材料常数 A, B, c, m 对实际临界应力的影响。

利用 Φ_1 数可以方便建立断裂的非线形临界应力表达式,这也从一个侧面反映出采用参数 Φ_1 来表达应力应变曲线的优越性。

5.3 Φ_1 与 J 积分的关系

J 积分是与积分路径无关的线积分。可以取其积分回路为以裂纹尖端为圆心,以 r 为半径的圆,则可进一步简化得到 J 积分的如下表达式^[7-10]

$$J = \sigma \varepsilon r Q \quad (18)$$

式中 Q 为一个无因次的量,随参考点的不同而变化。 σ, ε 是参考点处的应力和应变,参考点可在积分路径 Γ 上任意选取,一般选便于计算的点。

当应变增加 $d\varepsilon$ 时,假设裂纹仍不扩展。对(18)式两边取微分并忽略高次项,得

$$dJ = (\sigma d\varepsilon + \varepsilon d\sigma) r Q \quad (19)$$

(19)/(18)可消去参数 rQ,

$$\frac{dJ/d\varepsilon}{J} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \quad (20)$$

引入无量纲数并对照(5)式,可得 J 与 Φ_1 的关系式:

$$d \ln J / d \varepsilon = \Phi_1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} \quad (21)$$

由(2)式和(5)式可知, Φ_1 与 ε 存在函数关系,所以可以通过 $\Phi_1 \sim \varepsilon$ 的关系式求 J 积分的值。

近年来,失效评定图技术正经历着由 COD 理论为依据转向以 J 积分为依据。无论是 EPRI(美国电力研究院)的失效评定图还是 CEBG(英国中央电力局)的新 R6 曲线,都加入了把材料应力应变曲线关系作为判定的基本参考条件。这也体现出和衍生比例定律研究思路的一致性。

6 结 论

- (1) 论证了强度利用率函数对绝大多数材料应力应变曲线的适用性。
- (2) 通过材料应力应变关系建立的衍生比例定律可以较好地解决结构的非线形失稳问题,尤其是方便计算大深度潜水器耐压球壳或圆柱壳的极限承载能力。
- (3) 引入基于材料的平衡状态参数 Φ_1 , 可以与三种断裂度量参数建立关系或等效使用,证明了该定律也可以在弹塑性断裂力学中得到应用,但这方面进一步的研究需要更多试验数据的参与。

(4) 基于参数 Φ_1 建立的材料衍生比例定律可以解决屈曲和断裂的非线性失效问题, 继而可以统一失稳和断裂的双准则失效问题。深入这方面的研究, 从而解决实际结构的失效问题, 将是一项很有意义的工作。

参 考 文 献:

- [1] 罗培林. 结构强度稳定综合理论的梗概和意义[J]. 机械强度, 1986, 2: 56-60.
- [2] 韩 芸, 罗培林, 佟福山. 切线模量理论的内涵和用途的扩展[J]. 中国造船, 2008, 49(3): 98-103.
- [3] 张志平. 广义切线模量理论及其应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2005: 11-18.
- [4] 罗培林. Hooke's Law(胡克定律)的革新与“强度稳定综合理论”的创建和发展[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2008, 29(7): 641-650.
- [5] 罗培林. 材料应力应变图的相似性及其表达形式和应用[J]. 哈尔滨船舶工程学院学报, 1984(1): 9-22.
- [6] 罗培林. 应力应变六参数方程及其在结构稳定性计算和实验中的应用[J]. 中国造船, 1981(3): 65-75.
- [7] 锥高龙, 张淑荭, 任慧龙. 船用钢应力—应变关系的数学表达及其在计算加筋板屈曲应力中的应用[J]. 造船技术, 2006, 3: 13-19.
- [8] 张淑荭, 石德新, 姜志庆, 佟利军. 某种新的高强度钢非线性品质的研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 1996, 17(4): 62-66.
- [9] 张淑荭, 万 磊, 石德新. 材料非线性性质的解析表达[J]. 固体火箭技术, 1996, 19(2): 71-78.
- [10] 石德新. 结构承压能力的模型实验原理和方法[D]. 哈尔滨: 哈尔滨船舶工程学院, 1990: 10-41.
- [11] 中国船级社. 潜水系统和潜水器入级与建造规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 1996: 31-42.
- [12] 刘 涛. 深海载人潜水器耐压球壳设计特性分析[J]. 船舶力学, 2007, 11(2): 214-220.
- [13] 刘 涛. 大深度潜水器耐压壳体弹塑性稳定性简易计算方法[J]. 中国造船, 2001, 42(3): 8-14.
- [14] Luo P L. Relationship between critical stress coefficients of buckling and fracture and its signification[C]// Proceedings of Sixth Pacific Structural Steel Conference. Beijing, China, 2001(10): 15-17, 251-259.
- [15] 戴 光, 刘康林, 齐文浩. 结构断裂强度研究的切线模量因子法[J]. 大庆石油学院学报, 1999, 23(2): 53-56.
- [16] 李志安. 压力容器断裂理论与缺陷评定[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1994: 57-63.
- [17] Broek D. The Practical Use of Fracture Mechanics[M]. Kluwer Academic Pulished, Dordrecht/Boston/London, 1988.
- [18] 刘康林. 结构失效分析的强度稳定综合理论法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 1996: 46-55.