

La formule du caractère et la mesure de Plancherel pour les groupes de Lie résolubles unimodulaires sur un corps p -adique.

Khemais Maktouf

Université de Monastir, Faculté des Sciences de Monastir, Département de Mathématiques, 5019 Monastir, Tunisie

Abstract

We establish a character formula for admissible unitary representations of p -adic almost algebraic solvable groups and we deduce the Plancherel measure in the unimodular case.

Keywords: Metaplectic group, Unitary representation, Character formula, Descent method, Plancherel measure, Solvable group

1991 MSC: 22E35-22E50

Résumé

Nous établissons une formule du caractère pour les représentations unitaires admissibles des groupes résolubles presque algébriques sur un corps p -adique et nous en déduisons la mesure de Plancherel dans le cas unimodulaire.

Mots-clés: Groupe métaplectique, Représentation unitaire, Formule du caractère, Méthode de descente, Mesure Plancherel, Groupe résoluble

1991 MSC: 22E35-22E50

1 Introduction. Le but de ce travail est de donner une démonstration de la formule de Plancherel pour une large classe de groupes de Lie résolubles unimodulaires qui s'inscrit dans le cadre de la méthode des orbites de Kirillov-Duflo. Pour ce faire, nous donnons une description globale des caractères des représentations unitaires irréductibles génériques : en fait nous établissons au voisinage de chaque élément semi-simple une formule du caractère. Notre formule s'inspire fortement de celles établies dans le cas réel par Duflo-Heckman-Vergne [11] (séries discrètes des groupes réductifs), Bouaziz [4] (représentations tempérées des groupes réductifs), Khalgui-Torasso [21] (groupes presque algébriques réels). Notre démonstration de la formule de Plancherel s'inspire également de celles mises en œuvre dans le cas réel par Duflo-Vergne [14] pour

Email address: khemais.maktouf@fsm.rnu.tn (Khemais Maktouf).

les groupes réductifs et par Khalgui-Torasso [22] pour les groupes presque algébriques réels.

Soient k un corps local non archimédien de caractéristique zéro et ς un caractère non trivial de $(k, +)$. On considère (G, F, \mathbf{G}) un groupe résoluble presque algébrique sur k (voir le numéro 2.8 ci-après), on note \mathfrak{g} son algèbre de Lie et \mathfrak{g}^* le dual de \mathfrak{g} . Dans [9], M. Duflo a donné une paramétrisation du dual unitaire de G , l'ensemble des classes des représentations unitaires irréductibles de G : pour chaque forme linéaire g sur \mathfrak{g} , on note $G(g)$ le stabilisateur de g dans G et $\mathfrak{g}(g)$ son algèbre de Lie ; on désigne par $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ le groupe métaplectique de Weil et on considère $G(g)^\natural$ le produit fibré de $G(g)$ par $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$, c'est un revêtement d'ordre deux de $G(g)$ dont l'élément non trivial du noyau est noté $(1, -1)$. On définit un caractère χ_g de ${}^uG(g)^\natural$, radical unipotent de $G(g)^\natural$, en posant,

$$\chi_g(\exp(X)) = \varsigma(\langle g, X \rangle), \quad X \in {}^u\mathfrak{g}(g).$$

On note $Y_G(g)$ l'ensemble des classes des représentations unitaires irréductibles τ de $G(g)^\natural$ dont la restriction à ${}^uG(g)^\natural$ est multiple de χ_g et telle que $\tau(1, -1) = -\text{Id}$. Si g est de type unipotent (i.e. g est nulle sur un facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$) et τ un élément de $Y_G(g)$, M. Duflo [9] a associé au couple (g, τ) une classe de représentations unitaires irréductibles de G , notée $\pi_{g,\tau}$. Si on désigne par Y_G l'ensemble des couples (g, τ) , où g est de type unipotent et $\tau \in Y_G(g)$, le groupe G opère naturellement dans Y_G et la correspondance $(g, \tau) \mapsto \pi_{g,\tau}$ induit une bijection de $G \backslash Y_G$ sur le dual unitaire de G .

Supposons désormais que G est résoluble presque connexe, c'est-à-dire $G/(F \cdot {}^uG)$ est abélien, uG étant le radical unipotent de G . Nous montrons qu'il existe un voisinage \mathcal{U} de 0 dans \mathfrak{g} tel que, pour tout $g \in \mathfrak{g}^*$ de type unipotent et $\tau \in Y_G(g)$, il existe une forme linéaire λ_τ sur $\mathfrak{g}(g)$ dont la restriction à ${}^u\mathfrak{g}(g)$ est égale à celle de g et tel que, si $X \in \mathcal{U} \cap \mathfrak{g}(g)$, on ait

$$\tau(\exp X) = \varsigma(\langle \lambda_\tau, X \rangle) \text{Id} . \tag{1.1}$$

Nous considérons ainsi l'orbite co-adjointe $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau}$ construite à partir d'un élément f qui a même restriction que g au radical unipotent de \mathfrak{g} et dont la restriction à $\mathfrak{g}(g)$ est λ_τ .

Soit s un élément semi-simple de G , $G(s)$ son centralisateur dans G , et $\mathfrak{g}(s)$ son algèbre de Lie. On note $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$ l'ensemble des points fixes de s dans $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau}$. Lorsqu'il n'est pas vide, $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$ est une sous-variété localement fermée de $\mathfrak{g}(s)^*$, réunion d'un nombre fini de $G(s)$ -orbites. On munit $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$ de la mesure canonique (de Liouville) $d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}}$, celle dont la restriction à chaque $G(s)$ -orbite qu'il contient est la mesure de Liouville. Nous définissons une fonction $\phi_{g,\tau,s}$ sur $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$: si $l = x.f \in \mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$ tel que $(1 - s)$ soit un endomorphisme inversible de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$, on a,

$$\phi_{g,\tau,s}(l) = \Phi(\rho_x(\tilde{s})) \text{Tr}({}^x\tau(\tilde{s})), \tag{1.2}$$

où \tilde{s} est un relevé de s dans $G(l)^\mathfrak{g}$, $\rho_x(\tilde{s})$ est l'image de \tilde{s} dans $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l))$, et Φ est le caractère de la représentation métaplectique de $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l))$ associée à ς (le membre de droite de (1.2) ne dépend ni du choix de $x \in G$ tel que $l = x.f$, ni du choix de \tilde{s} situé au-dessus de s). La fonction $\phi_{g,\tau,s}$ est $G(s)$ -invariante. Voir le numéro 8.1.

Depuis [28], on sait que si l'orbite co-adjointe $\mathcal{O}_g = G.g$ est fermée dans \mathfrak{g}^* alors $\pi_{g,\tau}$ est admissible (à trace). On note $\Theta_{g,\tau}$ son caractère, c'est la fonction généralisée, G -invariante, sur G , définie par

$$\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = \text{Tr}(\pi_{g,\tau}(\varphi d_G x)), \quad \varphi \in C_c^\infty(G),$$

où $d_G x$ est une mesure de Haar sur G .

Si \mathcal{V} est un voisinage ouvert $G(s)$ -invariant assez petit de 1 dans $G(s)$, l'image \mathcal{W} de $G \times \mathcal{V}$ par l'application $\Psi : (x, y) \mapsto xsyx^{-1}$ est un voisinage ouvert G -invariant de s dans G et Ψ induit un difféomorphisme de l'espace fibré $G \times_{G(s)} \mathcal{V}$ sur \mathcal{W} . Par suite, suivant la méthode de descente, $\Theta_{g,\tau}$ possède une restriction $\theta_{g,\tau,s}$ à \mathcal{V} , symboliquement définie par :

$$\theta_{g,\tau,s}(y) = \Theta_{g,\tau}(sy), \quad y \in \mathcal{V}.$$

Le résultat principal de la première partie du présent travail est le suivant.

Théorème 1.0.1 *Soit s un élément semi-simple de G . Il existe un voisinage ouvert \mathcal{V}_s , $G(s)$ -invariant, de 1 dans $G(s)$ tel que pour tout $(g, \tau) \in Y_G$, pourvu que l'orbite co-adjointe \mathcal{O}_g soit fermée dans \mathfrak{g}^* , l'on ait, pour tout $\beta \in C_c^\infty(\mathcal{V}_s)$,*

$$\theta_{g,\tau,s}(\beta d_{G(s)} x) = \int_{\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}} (\beta \circ \widehat{\exp d_{\mathfrak{g}(s)} X})_{\mathfrak{g}(s)}(l) \phi_{g,\lambda_\tau,s}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}}(l), \quad (1.3)$$

où λ_τ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}(g)$ vérifiant la condition (1.1), $d_{G(s)} x$ et $d_{\mathfrak{g}(s)} X$ sont des mesures de Haar sur $G(s)$ et $\mathfrak{g}(s)$ respectivement qui se correspondent.

Il convient de rappeler ici que dans [28], nous avons démontré pour les groupes de Lie à radical co-compact une formule du caractère au voisinage d'éléments semi-simples en termes de transformées de Fourier de l'ensemble de points fixes de s dans \mathcal{O}_g , d'une fonction bien définie sur ce dernier, et du caractère de la représentation τ . Cela dit, l'ouvert de validité de la formule du caractère dépend de la représentation τ . De ce fait, cette formule est insuffisante pour démontrer la formule de Plancherel de G .

Dans la deuxième partie, comme application de la formule (1.3), nous donnons, dans le cas où G est unimodulaire, la mesure de Plancherel de G . Pour cela, nous étudions les formes linéaires fortement régulières sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Un élément $g \in \mathfrak{g}^*$ est dit régulier si $\dim \mathfrak{g}(g)$ est minimale. Alors $\mathfrak{g}(g)$ est commutative, on note \mathfrak{j}_g l'unique facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$. On dit que g est fortement régulier si de plus \mathfrak{j}_g est de dimension maximale. L'ensemble des éléments fortement réguliers de \mathfrak{g}^* , noté $\mathfrak{g}_{t,r}^*$, est un ouvert de Zariski, G -invariant, non vide de \mathfrak{g}^* . On montre qu'il existe un ouvert de Zariski

Ω_G , G -invariant, non vide de \mathfrak{g}^* , contenu dans $\mathfrak{g}_{t,r}^*$ et invariant par translation par les éléments de $({}^u\mathfrak{g})^\perp$ tel que, pour tout $g \in \Omega_G$, l'orbite co-adjointe $G.g$ est fermée dans \mathfrak{g}^* . Notons Ω_U , image de Ω_G par l'application restriction de \mathfrak{g}^* à $({}^u\mathfrak{g})^*$. Alors, Ω_U est un ouvert de Zariski, non vide, G -invariant de $({}^u\mathfrak{g})^*$.

Les sous-algèbres de Lie \mathfrak{j}_g , $g \in \mathfrak{g}_{t,r}^*$, sont appelées sous-algèbres de Cartan-Duflo. Toutes les sous-algèbres de Cartan-Duflo dans \mathfrak{g} sont G -conjuguées (Proposition 12.1.1). Fixons un représentant \mathfrak{j} de cette classe que l'on munit d'une mesure de Haar $d_{\mathfrak{j}}X$. On se donne une mesure de Haar $d_{\mathfrak{g}}X$ (resp. $d_{{}^u\mathfrak{g}}X$) sur \mathfrak{g} (resp. ${}^u\mathfrak{g}$). Par la suite, nous montrons que, pour chaque $u \in \Omega_U$, l'orbite $G.u$ admet une mesure positive G -invariant $d\beta_{G.u}$ (cette mesure dépend de $d_{\mathfrak{g}}X$, $d_{{}^u\mathfrak{g}}X$, et $d_{\mathfrak{j}}X$). Ainsi, il existe une unique mesure borélienne positive μ_u sur $G \setminus ({}^u\mathfrak{g})^*$ telle que l'on ait,

$$\int_{({}^u\mathfrak{g})^*} \psi(l) d_{({}^u\mathfrak{g})^*} l = \int_{G \setminus ({}^u\mathfrak{g})^*} d\mu_u(\omega) \int_{\omega} \psi(l) d\beta_{\omega}(l) \quad (1.4)$$

pour toute fonction ψ , borélienne positive, ou intégrable sur $({}^u\mathfrak{g})^*$.

Pour $u \in \Omega_U$, soit $g \in \Omega_G$ de type unipotent dont la restriction à ${}^u\mathfrak{g}$ est u . Notons \mathfrak{j}_g l'unique facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$. Il existe alors $x \in G$ tel que $\mathfrak{j}_g = x.\mathfrak{j}$. On munit ainsi \mathfrak{j}_g de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{j}_g}X$, image de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{j}}X$ par l'application $\mathfrak{j} \rightarrow \mathfrak{j}_g, X \mapsto x.X$. Soit R_g un facteur réductif de $G(g)$. On désigne par $d_{R_g^{\mathfrak{g}}}x$ la mesure de Haar sur $R_g^{\mathfrak{g}}$ tangente à la mesure de Haar $d_{\mathfrak{j}_g}X$ sur \mathfrak{j}_g et par $d_{\widehat{(R_g^{\mathfrak{g}})}}\tau$ la mesure de Plancherel de $R_g^{\mathfrak{g}}$ correspondante. On note $\widehat{(R_g^{\mathfrak{g}})}_-$ l'ensemble des classes des représentations unitaires irréductibles τ de $R_g^{\mathfrak{g}}$ telles que $\tau(1, -1) = -\text{Id}$. On note $d_g\tau$ la mesure image de $d_{\widehat{(R_g^{\mathfrak{g}})}}\tau$ sur $Y_G(g)$ par l'application $\widehat{(R_g^{\mathfrak{g}})}_- \rightarrow Y_G(g), \tau \mapsto \tau \otimes \chi_g$ (voir le numéro 14.1). On définit une fonction généralisée, G -invariante, $\Theta_{G.u}$ sur G par :

$$\Theta_{G.u}(\varphi d_Gx) = 2 \int_{Y_G(g)} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_Gx) d_g\tau, \quad \varphi \in C_c^\infty(G),$$

où d_Gx est la mesure de Haar sur G tangente à la mesure de Haar $d_{\mathfrak{g}}X$ sur \mathfrak{g} . Le résultat principal de la deuxième partie du présent travail est le suivant.

Théorème 1.0.2 *Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(G)$, on a :*

$$\varphi(1) = \int_{G \setminus ({}^u\mathfrak{g})^*} \Theta_{\omega}(\varphi d_Gx) d\mu_u(\omega). \quad (1.5)$$

Pour établir la formule (1.5), nous devons démontrer le résultat suivant :

$$\Theta_{G.u}(\varphi d_Gx) = \int_{G.u} (\varphi|_{{}^uG} \circ \widehat{\exp d_{{}^u\mathfrak{g}}X})_{u_{\mathfrak{g}}}(l) d\beta_{G.u}(l), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(G). \quad (1.6)$$

Pour ce faire, la formule (1.6) s'interprète comme une égalité entre fonctions généralisées G -invariantes. En utilisant la formule (1.3), nous démontrons qu'elle est satisfaite sur les voisinages semi-simples de chaque élément semi-simple de G . Les formules (1.4) et (1.6) donnent alors la formule (1.5).

2 Notations et généralités

2.1 Dans la suite, k désigne un corps local non archimédien de caractéristique zéro, \mathcal{O} l'anneau des entiers, et ϖ une uniformisante de \mathcal{O} . Le corps résiduel $\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}$ est fini de cardinal q et de caractéristique p . On note v la valuation normalisée de k : $v(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x \in \varpi^n\mathcal{O}\}$. On définit une valeur absolue sur k : $|x|_p = q^{-v(x)}$, $x \in k$. On fixe une clôture algébrique \bar{k} de k et on prolonge la norme p -adique $|\cdot|_p$ de k à \bar{k} de la manière suivante : si $x \in \bar{k}^\times$, on considère un corps $L \subset \bar{k}$ contenant k et x et tel que l'on ait $[L : k] < \infty$. On pose

$$|x|_{\bar{k}} = |N_{L/k}(x)|_p^{\frac{1}{[L:k]}},$$

où $N_{L/k}$ désigne l'application norme de L sur k .

On fixe un caractère ς de k dans \mathbb{C}^\times tel que

$$\varsigma|_{\mathcal{O}} = 1 \quad \text{et} \quad \varsigma|_{\varpi^{-1}\mathcal{O}} \neq 1.$$

Pour $a \in k$, on note ς_a le caractère de k dans \mathbb{C}^\times défini par : $\varsigma_a(t) = \varsigma(at)$, $t \in k$. D'après [41], l'application $a \in k \mapsto \varsigma_a$ est un isomorphisme du groupe $(k, +)$ sur le groupe de ses caractères. Enfin, on désigne par $d\mu$ la mesure de Haar sur k telle que $d\mu(\mathcal{O}) = 1$.

2.2 Si X est un espace topologique totalement discontinu (i.e. chaque point de X admet une base de voisinages formée par des parties compactes ouvertes) on note $C_c^\infty(X)$ le \mathbb{C} -espace des fonctions localement constantes à support compacts. Si A est une partie de X , on désigne par 1_A sa fonction caractéristique.

2.3 Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur k . On désigne par V^* l'espace des formes linéaires sur V . Un réseau de V est un \mathcal{O} -module, compact et ouvert. On sait qu'un \mathcal{O} -module L est un réseau de V si et seulement s'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de V telle que $L = \mathcal{O}e_1 + \dots + \mathcal{O}e_n$. On note $L^\perp = \{l \in V^* / \varsigma(\langle l, v \rangle) = 1, \text{ pour tout } v \in L\}$ le réseau de V^* que l'on appelle réseau dual de L relativement au caractère ς .

Si $\varphi \in C_c^\infty(V)$ et $d_V v$ est une mesure de Haar sur V , on note $(\widehat{\varphi d_V v})_V$ ou $(\varphi d_V v)^\wedge_V$ la transformée de Fourier de la densité $\varphi d_V v$ relativement à ς , c'est l'élément de $C_c^\infty(V^*)$ défini par :

$$(\widehat{\varphi d_V v})_V(l) = \int_V \varphi(v) \varsigma(\langle l, v \rangle) d_V v, \text{ pour tout } l \in V^*.$$

La base (e_1, \dots, e_n) de V est dite univolumique pour la mesure de Haar $d_V v$ si l'on a $d_V v(L) = 1$. Si tel est le cas, on a :

$$(\widehat{1_L d_V v})_V = 1_{L^\perp}.$$

On appelle mesure duale (relativement à ς) de la mesure de Haar $d_V v$, la mesure de Haar $d_{V^*} l$ sur V^* telle que l'on ait :

$$\varphi(0) = \int_{V^*} (\widehat{\varphi d_V v})_V(l) d_{V^*} l, \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(V).$$

Soit W un sous-espace vectoriel de V et $d_W w$ une mesure de Haar sur W . On appelle mesure quotient de $d_V v$ par $d_W w$, la mesure de Haar $d_{V/W} \dot{v}$ sur V/W donnée par :

$$\int_V \varphi(v) d_V v = \int_{V/W} \int_W \varphi(v+w) d_W w d_{V/W} \dot{v}, \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(V).$$

D'autre part $W^\perp = \{l \in V^*, l|_W = 0\}$ s'identifie naturellement à $(V/W)^*$. On munit alors W^\perp de la mesure de Haar $d_{W^\perp} \lambda$ duale de la mesure de Haar $d_{V/W} \dot{v}$. On a, pour tout $l \in W^*$,

$$(\widehat{\varphi|_W d_W w})_{W^\perp}(l) = \int_{W^\perp} (\widehat{\varphi d_V v})_V(\tilde{l} + \lambda) d_{W^\perp} \lambda, \quad \varphi \in C_c^\infty(V),$$

où \tilde{l} est un élément de V^* dont la restriction à W est l .

Soit Q une forme quadratique non dégénérée sur V . Il existe un nombre complexe $\gamma(Q)$ de module 1 satisfaisant l'équation suivante :

$$\int_V \int_V \varphi(v-w) \varsigma\left(\frac{1}{2}Q(w)\right) d_V w d_V v = c_Q \gamma(Q) \int_V \varphi(v) d_V v, \quad \varphi \in C_c^\infty(V), \quad (2.1)$$

où c_Q est une constante strictement positive (voir [40]).

2.4 On appelle k -espace symplectique tout couple (V, B) où V est un k -espace vectoriel de dimension finie et B une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur V . Une base $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ de V est dite symplectique si

$$B(e_i, e_j) = B(f_i, f_j) = 0 \text{ et } B(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \text{ pour tout } 1 \leq i, j \leq n,$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker. Si on identifie V et son dual V^* par B alors le réseau $r = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}e_i \oplus \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}f_i$ est autoduale (i.e. $r^\perp = r$) et la mesure de Haar sur V telle que r soit de mesure 1 est la mesure de Haar autoduale, relativement à ς .

On note $Sp(V, B)$ ou plus simplement $Sp(V)$ le groupe symplectique associé à (V, B) :

$$Sp(V) = \{x \in GL(V) / B(xv, xw) = B(v, w), \text{ pour tout } v, w \in V\}.$$

Un lagrangien de V est un sous-espace vectoriel totalement isotrope par rapport à B et de dimension maximale. Pour qu'un sous-espace vectoriel de V soit un lagrangien il faut et il suffit qu'il soit égal à son orthogonal par B . Le groupe symplectique $Sp(V)$ opère transitivement sur les lagrangiens de V .

2.5 Soit G un groupe localement compact. Par une mesure de Haar sur G , on entend une mesure de Haar invariante à gauche. On se donne une mesure de Haar $d_G x$ sur G . On note Δ_G la fonction module de G :

$$\int_G \varphi(xy^{-1})d_G x = \Delta_G(y) \int_G \varphi(x)d_G x, \quad \varphi \in C_c^\infty(G), y \in G.$$

Soit H un sous-groupe fermé de G . On désigne par $\Delta_{H,G}$ le morphisme de groupes de H dans \mathbb{R}_+^* défini par :

$$\Delta_{H,G}(y) = \frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}, \quad \text{pour tout } y \in H,$$

et par $C_c(G; H)$ le \mathbb{C} -espace des fonctions φ sur G , continues à support compact modulo H , vérifiant

$$\varphi(xy) = \Delta_{H,G}(y)\varphi(x), \quad \text{pour tout } x \in G, y \in H.$$

Le groupe G opère par translations à gauche dans $C_c(G; H)$ et il existe, à une constante positive près, une unique forme linéaire positive, G -invariante, sur cet espace. Une telle forme linéaire est appelée dans la suite une mesure invariante sur G/H . En particulier, si $d_H x$ est une mesure de Haar sur H , il existe une unique mesure invariante $d_{G/H} \dot{x}$ sur G/H telle que

$$\int_G \varphi(x)d_G x = \int_{G/H} \left\{ \int_H \varphi(xy)\Delta_{H,G}(y)^{-1}d_H y \right\} d_{G/H} \dot{x}, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(G).$$

La mesure invariante $d_{G/H} \dot{x}$ s'appelle le quotient des mesures de Haar $d_G x$ et $d_H x$.

2.6 Soit G un groupe localement compact. Par représentation unitaire de G , on entend une représentation unitaire continue de G dans un espace de Hilbert séparable. Soit π une représentation unitaire de G dans \mathcal{H} . Si $\varphi \in C_c^\infty(G)$ et $d_G x$ est une mesure de Haar sur G , on définit l'opérateur $\pi(\varphi d_G x) = \int_G \varphi(x)\pi(x)d_G x$ agissant dans \mathcal{H} , en posant, pour tout $v, w \in \mathcal{H}$,

$$\langle \pi(\varphi d_G x)v, w \rangle = \int_G \varphi(x) \langle \pi(x)v, w \rangle d_G x,$$

où \langle, \rangle désigne le produit scalaire dans \mathcal{H} .

On suppose de plus que la topologie sur G est totalement discontinue. Pour chaque sous-groupe K de G , on désigne par

$$\mathcal{H}^K = \{v \in \mathcal{H}, \pi(x)v = v, \text{ pour tout } x \in K\}.$$

La représentation π est dite admissible si, pour tout sous-groupe compact ouvert K de G , on a $\dim \mathcal{H}^K < +\infty$. On voit que π est admissible si et seulement si les opérateurs $\pi(\varphi d_G x)$, $\varphi \in C_c^\infty(G)$, sont de rang finis. Si tel est le cas, on définit le caractère de π comme étant la fonction généralisée sur G :

$$\Theta_\pi(\varphi d_G x) = \text{Tr}(\pi(\varphi d_G x)), \quad \varphi \in C_c^\infty(G).$$

2.7 Soit \mathbf{G} un groupe algébrique défini sur k dont l'ensemble des points rationnels est noté \mathbf{G}_k . On désigne par ${}^u\mathbf{G}$ son radical unipotent, c'est le plus grand sous-groupe normal fermé unipotent de \mathbf{G} . Il est défini sur k . Un facteur réductif défini sur k de \mathbf{G} est un sous-groupe réductif \mathbf{R} (i.e. ${}^u\mathbf{R} = \{1\}$) défini sur k tel que \mathbf{G} soit produit semi-direct de \mathbf{R} et de ${}^u\mathbf{G}$. Le sous-groupe \mathbf{R} est appelé aussi un k -facteur réductif de \mathbf{G} . D'après ([3], Proposition 5.1) \mathbf{G} possède un k -facteur réductif \mathbf{R} et tout sous-groupe réductif défini sur k de \mathbf{G} est conjugué à un sous-groupe de \mathbf{R} par un élément de ${}^u\mathbf{G}_k$.

2.8 Un groupe presque algébrique est un triplet (G, F, \mathbf{G}) , où \mathbf{G} est un groupe algébrique défini sur k , G un groupe localement compact et F un sous-groupe fini du centre de G tels que G/F soit un sous-groupe d'indice fini de \mathbf{G}_k , dense pour la topologie de Zariski, et la projection canonique p_G de G dans \mathbf{G}_k soit continue.

Comme G/F est d'indice fini dans \mathbf{G}_k , il est ouvert dans \mathbf{G}_k et p_G est un homéomorphisme local. Si bien que l'on peut munir G d'une structure de groupe de Lie sur k de telle sorte que p_G soit un difféomorphisme local. L'algèbre de Lie de G est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de \mathbf{G}_k . Nous dirons que \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie du groupe presque algébrique (G, F, \mathbf{G}) . Etant donné qu'un sous-groupe unipotent \mathbf{U}_k de \mathbf{G}_k n'a pas de sous-groupe propre d'indice fini, il est contenu dans G/F . D'après ([9], Lemme II.11) G contient un unique sous-groupe fermé U isomorphe à \mathbf{U}_k par p_G . Les éléments de U sont appelés éléments unipotents de G . Il est clair que p_G réalise une bijection de l'ensemble des éléments unipotents de G sur ceux de \mathbf{G}_k . Lorsque \mathbf{U}_k est le radical unipotent ${}^u\mathbf{G}_k$ de \mathbf{G}_k , le sous-groupe correspondant de G , noté uG , est appelé le radical unipotent de G . Si \mathbf{R} est un k -facteur réductif de \mathbf{G} alors G est produit semi-direct de $p_G^{-1}(\mathbf{R}_k)$ et de uG . Le sous-groupe $p_G^{-1}(\mathbf{R}_k)$ est appelé facteur réductif de G . Si $p_G^{-1}(\mathbf{R}_k)/F$ est abélien, G est dit un groupe résoluble presque connexe .

Un élément de G est dit semi-simple si son image par p_G est semi-simple de \mathbf{G}_k . On obtient une décomposition de Jordan dans G : chaque élément x de G s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_s \cdot x_u = x_u \cdot x_s, \tag{2.2}$$

où x_s est semi-simple appelé partie semi-simple de x et x_u est unipotent appelé partie unipotente de x .

Sauf mention explicite du contraire le groupe G opère sur lui-même par automorphismes

intérieurs, sur \mathfrak{g} par l'action adjointe, et sur \mathfrak{g}^* par l'action co-adjointe. Si Ω est une orbite co-adjointe dans \mathfrak{g}^* , nous désignons par $d\mu_\Omega$ la mesure de Liouville sur Ω (voir [28], Paragraphe 11).

3 Voisinages semi-simples, Application exponentielle.

3.1 Soit (G, F, \mathbf{G}) un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On rappelle qu'un ouvert \mathcal{W} de G est dit semi-simple (ou G -semi-simple s'il est nécessaire de préciser le groupe G) s'il est invariant par conjugaison, et si, pour tout $x \in G$, on a $x \in \mathcal{W}$ si et seulement si $x_s \in \mathcal{W}$, où x_s est la partie semi-simple de x .

De même un ouvert \mathcal{V} de \mathfrak{g} est dit semi-simple (ou G -semi-simple s'il est nécessaire de préciser G) s'il est invariant par l'action adjointe de G , et si, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $X \in \mathcal{V}$ si et seulement si $X_s \in \mathcal{V}$, où X_s est la partie semi-simple de X .

Les ouverts semi-simples de G (resp. \mathfrak{g}) sont les ouverts d'une topologie, appelée la topologie semi-simple, sur G (resp. \mathfrak{g}).

3.1.1 On choisit désormais une réalisation de \mathbf{G} comme un sous-groupe algébrique de $GL_m(\bar{k})$, défini sur k , et donc \mathfrak{g} comme une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_m(k)$. On pose, pour $X \in \mathfrak{gl}_m(k)$,

$$\rho(X) = \sup_{\lambda \in \text{spec}(X)} |\lambda|_{\bar{k}},$$

où $\text{spec}(X)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de l'action de X dans \bar{k}^m . Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$\mathfrak{g}_\varepsilon = \{X \in \mathfrak{g}, \rho(X) \leq \varepsilon\}, \mathbf{G}_k^\varepsilon = \{x \in \mathbf{G}_k, \rho(x-1) \leq \varepsilon\}.$$

Le résultat suivant est démontré dans [28].

Théorème 3.1.1 *i) Les ouverts \mathbf{G}_k^ε , $\varepsilon > 0$, forment une base de voisinages semi-simples de 1 dans \mathbf{G}_k .*

ii) Les ouverts \mathfrak{g}_ε , $\varepsilon > 0$ sont invariants par translations par ${}^u\mathfrak{g}$ et forment une base de voisinages semi-simples de 0 dans \mathfrak{g} .

3.1.2 On fixe $0 < a < 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{|n!|_p} = 0$ et que $a > \frac{a^n}{|n!|_p}$, pour tout $n \geq 2$ (voir [39], Lemme V.4). Le lemme suivant est dû à Harish-Chandra (non publié).

Lemme 3.1.1 *L'application exponentielle*

$$\exp : \mathfrak{gl}_m(k)_a \longrightarrow GL_m(k)^a, X \longmapsto \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!},$$

est un difféomorphisme, dont l'inverse est l'application logarithme :

$$\log(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad x \in GL_m(k)^a.$$

Si $X \in \mathfrak{gl}_m(k)_a$ et $x \in GL_m(k)^a$, on a :

$$\exp(yXy^{-1}) = y \exp(X)y^{-1}, \quad \log(yxy^{-1}) = y \log(x)y^{-1}, \quad \text{pour tout } y \in GL_m(k).$$

Pour $0 < \varepsilon \leq a$, on pose $\mathbf{G}_{k,\varepsilon} = \exp(\mathfrak{g}_\varepsilon)$. On a la proposition suivante :

Proposition 3.1.1 *Pour tout $0 < \varepsilon \leq a$, $\mathbf{G}_{k,\varepsilon}$ est un voisinage \mathbf{G}_k -semi-simple de 1 dans \mathbf{G}_k et l'application exponentielle \exp réalise un difféomorphisme de \mathfrak{g}_ε sur $\mathbf{G}_{k,\varepsilon}$.*

Démonstration : Soit $0 < \varepsilon \leq a$. D'après ([6], Paragraphe II.12), si $X = X_s + X_u \in \mathfrak{g}_\varepsilon$ alors $x = \exp(X) \in \mathbf{G}_k$ et on a $x_s = \exp(X_s)$, $x_u = \exp(X_u)$. De plus, l'application exponentielle induit une bijection de l'ensemble des éléments nilpotents de \mathfrak{g} sur l'ensemble des éléments unipotents de \mathbf{G}_k . Ceci prouve que $\mathbf{G}_{k,\varepsilon}$ est un voisinage \mathbf{G}_k -semi-simple de 1 dans \mathbf{G}_k . D'après le lemme 3.1.1, $\exp : \mathfrak{g}_\varepsilon \longrightarrow \mathbf{G}_{k,\varepsilon}$ est un difféomorphisme de \mathfrak{g}_ε sur $\mathbf{G}_{k,\varepsilon}$. ■

3.1.3 Maintenant, nous allons remonter l'application exponentielle à G . On note

$$(G/F)_{inv} = \bigcap_{x \in \mathbf{G}_k} x(G/F)x^{-1}.$$

Alors $(G/F)_{inv}$ est un sous-groupe normal, fermé, et d'indice fini de \mathbf{G}_k ; il contient tous les éléments unipotents de \mathbf{G}_k . Ainsi $(G/F)_{inv}$ est un ouvert \mathbf{G}_k -semi-simple dans \mathbf{G}_k . On pose

$$a_G = \sup\{0 < \varepsilon \leq a, \text{ tel que } \mathbf{G}_{k,\varepsilon} \subset (G/F)_{inv}\}, \quad n_F = \text{cardinal de } F,$$

et pour $0 < \varepsilon < a_G$,

$$G_\varepsilon = \{x^{2n_F}, x \in p_G^{-1}(\mathbf{G}_{k,\varepsilon})\}.$$

On a le résultat suivant.

Proposition 3.1.2 *Pour tout $0 < \varepsilon < a_G$, on a :*

i) G_ε est un ouvert G -semi-simple de G .

ii) la restriction de p_G à G_ε est un difféomorphisme de G_ε sur $\mathbf{G}_{k,\varepsilon|2n_F|p}$.

Démonstration : On note $\alpha_1 : p_G^{-1}(\mathbf{G}_{k,\varepsilon}) \longrightarrow p_G^{-1}(\mathbf{G}_{k,\varepsilon|2n_F|p})$, $x \longmapsto x^{2n_F}$,

$$\alpha_2 : \mathbf{G}_{k,\varepsilon} \longrightarrow \mathbf{G}_{k,\varepsilon|2n_F|p}, \quad x \longmapsto x^{2n_F}, \quad \text{et } \alpha_3 : \mathfrak{g}_\varepsilon \longrightarrow \mathfrak{g}_{\varepsilon|2n_F|p}, \quad X \longmapsto 2n_F X.$$

On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{g}_\varepsilon & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{G}_{k,\varepsilon} & \xleftarrow{p_G} & p_G^{-1}(\mathbf{G}_{k,\varepsilon}) \\
\alpha_3 \downarrow & & \alpha_2 \downarrow & & \alpha_1 \downarrow \\
\mathfrak{g}_{\varepsilon|2n_F|p} & \xrightarrow{\exp} & \mathbf{G}_{k,\varepsilon|2n_F|p} & \xleftarrow{p_G} & p_G^{-1}(\mathbf{G}_{k,\varepsilon|2n_F|p})
\end{array}$$

Puisque \exp et α_3 sont des difféomorphismes donc α_2 l'est aussi. Comme p_G est un difféomorphisme local et α_1 est continue, on déduit que α_1 est un difféomorphisme local. Il s'en suit que G_ε est un ouvert de G , invariant par conjugaison par les éléments de G . Soit $x = x_s x_u \in G$, où x_s est la partie semi-simple et x_u la partie unipotente de x . Si $x_s \in G_\varepsilon$ alors il existe $y \in p_G^{-1}(\mathbf{G}_{k,\varepsilon})$ tel que $x_s = y^{2n_F}$. Écrivons $p_G(y) = \exp(Y)$, avec $Y \in \mathfrak{g}_\varepsilon$ semi-simple, et $p_G(x_u) = \exp(2n_F Z) = z^{2n_F}$, avec $Z \in \mathfrak{g}$ unipotent. On a : $[Y, Z] = 0$. En effet, puisque $p_G(x_s)$ commute avec $\exp(2n_F Z)$ donc $p_G(x_s)$ commute avec $\exp(tZ)$, $t \in k$. Si bien que l'on a $\exp(t \operatorname{ad} Z)Y = Y$, pour tout $t \in k$. Par suite $[Y, Z] = 0$. On en déduit que $p_G(y)z = zp_G(y) \in \mathbf{G}_{k,\varepsilon}$. Soit \tilde{z} l'élément unipotent de G correspondant à z . Alors, il existe $f \in F$ tel que $y\tilde{z} = f\tilde{z}y$. Mais $f^{n_F(2n_F-1)} = 1$, on a $x = y^{2n_F} \tilde{z}^{2n_F} = (y\tilde{z})^{2n_F} \in G_\varepsilon$. Réciproquement, il est clair que si $x \in G_\varepsilon$ alors $x_s \in G_\varepsilon$. Concernant le deuxième point, on a : $p_G(G_\varepsilon) = \mathbf{G}_{k,\varepsilon|2n_F|p}$. L'injectivité de la restriction de p_G à G_ε se démontre sans difficulté. Le résultat se déduit du fait que p_G est un difféomorphisme local et de la proposition 3.1.1. \blacksquare

Pour $0 < \varepsilon < a_G$, on vient de démontrer que $p_G : G_\varepsilon \rightarrow \mathbf{G}_{k,\varepsilon|2n_F|p}$ est un difféomorphisme; on note q_G l'application inverse. On définit ainsi une application, appelée application exponentielle, $\exp_G : \mathfrak{g}_{\varepsilon|2n_F|p} \rightarrow G_\varepsilon$, $\exp_G = q_G \circ \exp$.

3.1.4 Soit x un élément de G . On note $\mathbf{G}_k(p_G(x))$ le centralisateur de $p_G(x)$ dans \mathbf{G}_k . C'est un sous-groupe algébrique de \mathbf{G}_k d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(x)$. Soit $0 < \varepsilon \leq a$. On a : $\mathbf{G}_k(p_G(x))_\varepsilon = \mathbf{G}_{k,\varepsilon} \cap \mathbf{G}_k(p_G(x))$ et l'application exponentielle \exp induit un difféomorphisme de $\mathfrak{g}(x)_\varepsilon$ sur $\mathbf{G}_k(p_G(x))_\varepsilon$. D'autre part, l'application :

$$p_G^{-1}(\mathbf{G}_k(p_G(x))) \rightarrow F, y \mapsto xyx^{-1}y^{-1},$$

est un morphisme de groupes. Son noyau est $G(x)$, le centralisateur de x dans G , qui est un sous-groupe fermé et d'indice fini de $p_G^{-1}(\mathbf{G}_k(p_G(x)))$. De plus, si $y \in G(x)$ et $y = y_s y_u$ sa décomposition de Jordan, on a : $y_s, y_u \in G(x)$. Pour $0 < \varepsilon < a_G$, on pose

$$G(x)_\varepsilon = \{y^{2n_F}, y \in p_G^{-1}((\mathbf{G}_k(p_G(x)))_\varepsilon)\}.$$

Lemme 3.1.2 Soit $x \in G$ et $0 < \varepsilon < a_G$. On a $G(x)_\varepsilon = G_\varepsilon \cap G(x)$ et la restriction de \exp_G à $\mathfrak{g}(x)_{\varepsilon|2n_F|p}$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}(x)_{\varepsilon|2n_F|p}$ sur $G(x)_\varepsilon$.

Démonstration : Si $y \in p_G^{-1}(\mathbf{G}_k(p_G(x))_\varepsilon)$, il existe $f \in F$ tel que $y.x = f.x.y$; par suite $y^{2n_F} \in G(x)$. Ainsi $G(x)_\varepsilon \subset G_\varepsilon \cap G(x)$. Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit

$z \in G_\varepsilon \cap G(x)$. Par définition, il existe $y \in p_G^{-1}(\mathbf{G}_{k,\varepsilon})$ tel que $z = y^{2n_F}$. Ecrivons $p_G(y) = \exp(Y)$ avec $Y \in \mathfrak{g}_\varepsilon$. On voit que $Ad(p_G(x)).Y = Y$, et par suite $\exp(Y) \in \mathbf{G}_k(p_G(x))_\varepsilon$. Si bien que $z \in G(x)_\varepsilon$.

La deuxième assertion du lemme résulte du fait que p_G induit un difféomorphisme de $G(x)_\varepsilon$ sur $\mathbf{G}_k(p_G(x))_{\varepsilon|2n_F|p}$, d'inverse la restriction de q_G à $\mathbf{G}_k(p_G(x))_{\varepsilon|2n_F|p}$, et du fait que \exp réalise un difféomorphisme de $\mathfrak{g}(x)_{\varepsilon|2n_F|p}$ sur $\mathbf{G}_k(p_G(x))_{\varepsilon|2n_F|p}$. ■

3.1.5 Soit \mathfrak{u} un idéal algébrique G -invariant de \mathfrak{g} et u une forme linéaire sur \mathfrak{u} . On note $H = G(u)$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(u)$. Si $0 < \varepsilon < a_G$, on pose

$$H_\varepsilon = \{y^{2n_F}, y \in p_G^{-1}((\mathbf{G}_k(u))_\varepsilon)\}.$$

Lemme 3.1.3 *Soit $0 < \varepsilon < a_G$. On a $H_\varepsilon = G_\varepsilon \cap H$ et la restriction de \exp_G à $\mathfrak{h}_{\varepsilon|2n_F|p}$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{h}_{\varepsilon|2n_F|p}$ sur H_ε .*

Démonstration : Soit $x \in G_\varepsilon \cap H$. Il existe $y \in p_G^{-1}(\mathbf{G}_{k,\varepsilon})$ tel que $x = y^{2n_F}$. Ecrivons $p_G(y) = \exp(Y)$, $Y \in \mathfrak{g}_\varepsilon$. On a : $p_G(y^{2n_F}) = \exp(2n_F Y) \in \mathbf{G}_k(u)$. Puisque $\mathbf{G}_k(u)$ est un sous-groupe algébrique de \mathbf{G}_k , on a $\exp(2n_F Y_s), \exp(2n_F Y_u) \in \mathbf{G}_k(u)$. Il en résulte que $Y_s, Y_u \in \mathfrak{h}$ et que $Y \in \mathfrak{h}$. Ainsi $\exp(Y) \in (\mathbf{G}_k(u))_\varepsilon$. Si bien que $x \in H_\varepsilon$. D'où $H_\varepsilon = G_\varepsilon \cap H$. ■

3.1.6 Dans ce paragraphe, on suppose que \mathfrak{g} est résoluble. Soit \mathfrak{t} un facteur réductif de \mathfrak{g} et \mathbf{T}_k un facteur réductif de \mathbf{G}_k d'algèbre de Lie \mathfrak{t} . Pour $0 < \varepsilon \leq a$, on note $\mathbf{T}_{k,\varepsilon} = \exp(\mathfrak{t}_\varepsilon)$, $T = p_G^{-1}(\mathbf{T}_k)$, et $T_\varepsilon = \{y^{2n_F}, y \in p_G^{-1}(\mathbf{T}_{k,\varepsilon})\}$.

Proposition 3.1.3 *Si a est suffisamment petit alors, pour tout $0 < \varepsilon \leq a$, on a :*

$$\mathbf{G}_{k,\varepsilon} = \mathbf{T}_{k,\varepsilon} {}^u\mathbf{G}_k,$$

qui est un sous-groupe normale de \mathbf{G}_k . La loi dans $\mathbf{G}_{k,\varepsilon}$ est donnée par la formule de Campbell Hausdorff. Si de plus $0 < \varepsilon < a_G$, on a $G_\varepsilon = T_\varepsilon {}^uG$, qui est un sous-groupe normal de G .

Démonstration : Il est clair que, pour tout $\varepsilon > 0$, \mathfrak{t}_ε est un réseau de \mathfrak{t} et que la famille $(\mathfrak{t}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une base de voisinages de 0 dans \mathfrak{t} . Il résulte de ([20], Lemme 1.1) et du théorème 3.1.1 que si a est suffisamment petit, pour tout $0 < \varepsilon \leq a$, $\mathbf{G}_{k,\varepsilon}$ est un sous-groupe normal de \mathbf{G}_k et la loi dans $\mathbf{G}_{k,\varepsilon}$ est donnée par la formule de Campbell Hausdorff. Comme $\mathbf{T}_{k,\varepsilon}$ et ${}^u\mathbf{G}_k$ sont des sous-groupes de $\mathbf{G}_{k,\varepsilon}$, on a $\mathbf{T}_{k,\varepsilon} {}^u\mathbf{G}_k \subset \mathbf{G}_{k,\varepsilon}$. Démontrons l'inclusion inverse. D'après le théorème 3.1.1, on a $\mathfrak{g}_\varepsilon = \mathfrak{t}_\varepsilon + {}^u\mathfrak{g}$. Soit $X \in \mathfrak{t}_\varepsilon$ et $Y \in {}^u\mathfrak{g}$. En utilisant la formule de Campbell Hausdorff, on voit que $\exp(-X) \exp(X+Y) \in {}^u\mathbf{G}_k$. Si bien que $\exp(X+Y) \in \mathbf{T}_{k,\varepsilon} {}^u\mathbf{G}_k$.

Supposons maintenant $0 < \varepsilon < a_G$. Soit $x \in G_\varepsilon$ et $y \in p_G^{-1}(\mathbf{G}_{k,\varepsilon})$ tel que $x = y^{2n_F}$. Écrivons $y = y_s y_u$ sa décomposition de Jordan. Quitte à conjuguer y par un élément de ${}^u G$, on peut supposer que $y_s \in p_G^{-1}(\mathbf{T}_{k,\varepsilon})$. Ainsi $y_s^{2n_F} \in T_\varepsilon$ et par suite $x = y_s^{2n_F} y_u^{2n_F} \in T_\varepsilon {}^u G$. Si bien que $G_\varepsilon \subset T_\varepsilon {}^u G$. D'autre part la restriction de p_G à $T_\varepsilon {}^u G$ réalise une bijection de $T_\varepsilon {}^u G$ sur $\mathbf{T}_{k,\varepsilon|2n_F|p} {}^u \mathbf{G}_k = \mathbf{G}_{k,\varepsilon|2n_F|p}$. D'après la proposition 3.1.2, on a $G_\varepsilon = T_\varepsilon {}^u G$. La dernière assertion de la proposition découle du fait que T_ε est un sous-groupe normal de T et ${}^u G$ est un sous-groupe normal de G . ■

3.2 Dans ce paragraphe, on se donne un élément semi-simple s de G . On désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ (resp. ν_1, \dots, ν_l) les valeurs propres distinctes de $p_G(s)$ dans \bar{k}^m (resp. de Ads dans $\mathfrak{g}_{\bar{k}} = \bar{k} \otimes_k \mathfrak{g}$). On définit les nombres $a'_g(s)$ et $a_G(s)$ que l'on note simplement $a'(s)$ et $a(s)$ lorsque aucune confusion n'est possible,

$$a(s) = \inf_{i \neq j} \{ |\lambda_i \lambda_j^{-1} - 1|_{\bar{k}}, a_G \}, \quad a'(s) = \inf_{\nu_i \neq 1} \{ |\nu_i - 1|_{\bar{k}}, |\nu_i^{-1} - 1|_{\bar{k}}, a_G \}. \quad (3.1)$$

Il est clair que $a(s) \leq a'(s)$, $a(1) = a_G$, et que si $Ads = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$, $a'(s) = a_G$. On a le résultat suivant :

Lemme 3.2.1 *Soit $0 < \varepsilon'(s) < a'(s)$ et $0 < \varepsilon(s) < a(s)$.*

i) Soit $y \in G(s)_{\varepsilon'(s)}$. Si un vecteur d'un sous-quotient s -invariant de \mathfrak{g} ou de \mathfrak{g}^ est fixé par sy , alors il est fixé par s .*

ii) Soient $g \in G$, $y, y' \in G(s)_{\varepsilon(s)}$ tels que l'on ait $sy' = gsyg^{-1}$. Alors $g \in G(s)$.

Démonstration : On commence par démontrer la première assertion du lemme. Soit W un sous-quotient Ads -invariant de \mathfrak{g} et $v \in W$ un vecteur fixé par $Ad(sy)$. On peut supposer que $v \neq 0$. Écrivons $v = \sum_{\nu} v_{\nu}$, où ν parcourt l'ensemble des valeurs propres de Ads dans $W_{\bar{k}}$ et v_{ν} appartient au sous-espace propre correspondant. Soit ν tel que $v_{\nu} \neq 0$. Comme Ads et Ady commutent, on a $Ad(sy).v_{\nu} = v_{\nu}$ et par suite v_{ν} est vecteur propre de Ady pour la valeur propre ν^{-1} . Ainsi, ν est le quotient de deux valeurs propres α_1 et α_2 de $p_G(y)$ dans \bar{k}^m . On a :

$$|\nu^{-1} - 1|_{\bar{k}} = \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1 \right|_{\bar{k}} \leq \max\{ |\alpha_1 - 1|_{\bar{k}}, |\alpha_2 - 1|_{\bar{k}} \} \leq \varepsilon'(s).$$

Compte tenu du choix de $\varepsilon'(s)$, on a nécessairement $\nu = 1$. Si bien que l'on a $Ads.v = v$. On démontre de la même façon que si un sous-quotient Ad^*s -invariant de \mathfrak{g}^* est fixé par $Ad^*(sy)$ alors il est fixé par Ad^*s .

Démontrons maintenant la deuxième assertion : si λ est une valeur propre de $p_G(s)$, on note V_{λ} le sous-espace propre correspondant. Chacun de ces sous-espaces propres est stable par $p_G(y_s)$ et $p_G(y'_s)$. Soit $1 \leq i \leq l$ et $v \in V_{\lambda_i}$ un vecteur propre de $p_G(sy'_s)$ pour une valeur propre λ . Comme sy'_s est conjugué à sy_s , λ est aussi une valeur propre

de $p_G(sy_s)$. Il existe donc $1 \leq j \leq l$ et α (resp. α') une valeur propre de $p_G(y_s)$ (resp. $p_G(y'_s)$) tels que $\lambda = \lambda_j \alpha = \lambda_i \alpha'$. On a :

$$\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_j} - 1 \right|_{\bar{k}} = \left| \frac{\alpha}{\alpha'} - 1 \right|_{\bar{k}} \leq \max\{|\alpha - 1|_{\bar{k}}, |\alpha' - 1|_{\bar{k}}\} \leq \varepsilon(s) |2n_F|_p \leq \varepsilon(s).$$

Vu le choix de $\varepsilon(s)$, $j = i$ et donc $\alpha = \alpha'$. On en déduit que $p_G(g).v \in V_{\lambda_i}$. Si bien que, $p_G(g)$ commute à $p_G(s)$. Ainsi, il existe $f \in F$ tel que $gsg^{-1} = fs$. Mais, ceci implique que $y' = fgyg^{-1}$ et par suite $f = 1$. D'où $g \in G(s)$. ■

3.3 Soit (M, F, \mathbf{M}) un groupe presque algébrique réductif d'algèbre de Lie \mathfrak{m} .

Proposition 3.3.1 *On a :*

- i) Si $X \in \mathfrak{m}$ est nilpotent, 0 est dans l'adhérence de l'orbite de X sous l'action adjointe de M (pour la topologie p -adique).
- ii) Si $x \in M$ alors x_s , la partie semi-simple de x , appartient à l'adhérence de l'orbite de x sous l'action conjugaison de M (pour la topologie p -adique).
- iii) Si $X \in \mathfrak{m}$ alors X_s , la partie semi-simple de X , appartient à l'adhérence de l'orbite de X sous l'action adjointe de M (pour la topologie p -adique).

Démonstration : D'après ([3], Corollaire 6.6), les éléments nilpotents de \mathfrak{m} forment un nombre fini de classes pour l'action adjointe de \mathbf{M}_k . Etant donné que M/F est d'indice fini de \mathbf{M}_k , on a le même résultat pour l'action adjointe de M . Soit $X \in \mathfrak{m}$ nilpotent et $t \in k^\times$ tel que $|t|_p < 1$. On considère la suite $(t^n X)_{n \in \mathbb{N}}$. D'après ce qui précède, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ avec $n_1 < n_2$ tels que $t^{n_1} X$ et $t^{n_2} X$ soient dans une même M -orbite; soit $y \in M$ tel que $y.X = t^{n_2 - n_1} X$. Alors la suite $(y^m.X)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Montrons maintenant l'assertion ii). Soit $x = x_s x_u \in M$, où x_s est la partie semi-simple et x_u la partie unipotente de x . Écrivons $x_u = \exp(X)$, $X \in \mathfrak{m}(x_s)$ nilpotent. Comme $\mathfrak{m}(x_s)$ est réductive, en utilisant le raisonnement précédent, on en déduit qu'il existe $y \in (M/F)(p_M(x_s))$ tel que la suite $(y^m.X)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, p_M étant la projection canonique de M dans \mathbf{M}_k . Ainsi la suite $(y^m x_u y^{-m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. Soit $\tilde{y} \in M$ tel que $p_M(\tilde{y}) = y$. Alors \tilde{y}^{n_F} commute avec x_s et la suite $(\tilde{y}^{n_F m} x \tilde{y}^{-n_F m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers x_s . La preuve de iii) est de même style que celle de ii). ■

Lemme 3.3.1 *Soit Ω un voisinage ouvert M -invariant de 0 (resp. 1) dans \mathfrak{m} (resp. M). Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathfrak{m}_\varepsilon \subset \Omega$ (resp. $M_\varepsilon \subset \Omega$).*

Démonstration : En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait construire une suite $(X_m)_{m \in \mathbb{N}^\times}$ d'éléments de \mathfrak{m} telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^\times$,

- (1) $X_m \in \mathfrak{m}_{\frac{1}{m}}$;

(2) $X_m \notin \Omega$.

On note $X_{m,s}$ la partie semi-simple de X_m , $m \in \mathbb{N}^\times$. On a $X_{m,s} \in \mathfrak{m}_{\frac{\perp}{m}}$, $m \in \mathbb{N}^\times$. Comme $X_{m,s}$ est dans l'adhérence de l'orbite de X_m (Proposition 3.3.1), on voit que $X_{m,s} \notin \Omega$, $m \in \mathbb{N}^\times$. On peut supposer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^\times$, X_m est semi-simple. Puisque \mathfrak{m} ne possède qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan (voir [3], Corollaire 6.5), on peut supposer également qu'il existe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} telle que $X_m \in \mathfrak{h}_{\frac{\perp}{m}}$, pour tout $m \in \mathbb{N}^\times$. Comme $(\mathfrak{h}_{\frac{\perp}{m}})_{m \in \mathbb{N}^\times}$ est une base de voisinages de 0 dans \mathfrak{h} donc $(X_m)_{m \in \mathbb{N}^\times}$ converge vers 0. Si bien que $X_m \in \Omega$ pour m suffisamment grand.

Soit $0 < \varepsilon' < a_M$. Alors $\exp_M(\mathfrak{m}_{\varepsilon'|2n_F|_p}) \cap \Omega$ est un voisinage ouvert M -invariant de 1 dans M . D'après le raisonnement précédent, il existe $0 < \varepsilon < a_M$ tel que $\exp_M(\mathfrak{m}_{\varepsilon|2n_F|_p}) \subset \exp_M(\mathfrak{m}_{\varepsilon'|2n_F|_p}) \cap \Omega$. \blacksquare

3.4 Soit (G, F, \mathbf{G}) un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie \mathfrak{g} et $0 < \varepsilon < a_G$. Soit \mathfrak{m} est un réseau de \mathfrak{g} contenu dans $\mathfrak{g}_{\varepsilon|2n_F|_p}$ et tel que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Si m est un entier suffisamment grand alors $\exp_G(\varpi^m \mathfrak{m})$ est un sous-groupe compact ouvert de G contenu dans G_ε . On se donne une mesure de Haar $d_G x$ (resp. $d_{\mathfrak{g}} X$) sur G (resp. \mathfrak{g}). On dit que $d_G x$ et $d_{\mathfrak{g}} X$ sont tangentes (ou se correspondent) si

$$\int_G 1_{\exp_G(\varpi^m \mathfrak{m})}(x) d_G x = \int_{\mathfrak{g}} 1_{\varpi^m \mathfrak{m}}(X) d_{\mathfrak{g}} X.$$

Soit H un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , et $d_H x$ (resp. $d_{\mathfrak{h}} X$) une mesure de Haar sur H (resp. \mathfrak{h}) telles que ces deux mesures soient tangentes. Alors la mesure invariant $d_{G/H} \dot{x}$ ne dépend de $d_{\mathfrak{g}} X$ et $d_{\mathfrak{h}} X$ que par la mesure quotient $d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \dot{X}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. On dit aussi que $d_{G/H} \dot{x}$ et $d_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \dot{X}$ sont tangentes.

4 Méthode de descente. Dans ce paragraphe, nous allons exposer la méthode de descente due à Harish-Chandra dans le cas réductif p -adique (voir [19]), à M. Duffo et M. Vergne dans le cas des groupes presque algébriques réels (voir [13]), et étendu par l'auteur au cas des groupes presque algébriques p -adiques (voir [28]).

4.1 On a le résultat suivant qui est dû à Harish-Chandra (voir [19]).

Proposition 4.1.1 *Soient X et Y deux variétés k -analytiques et $f : X \rightarrow Y$ une submersion surjective. Soient μ_X et μ_Y deux formes volumes sur X et Y respectivement. Alors, pour tout $\alpha \in C_c^\infty(X)$, il existe une unique fonction $f_\alpha \in C_c^\infty(Y)$ telle que, pour tout $\beta \in C_c^\infty(Y)$, on ait*

$$\int_X \alpha(x) (\beta \circ f)(x) d\mu_X(x) = \int_Y f_\alpha(y) \beta(y) d\mu_Y(y). \quad (4.1)$$

De plus, $\text{supp}(f_\alpha) \subset f(\text{supp } \alpha)$ et si β est une fonction mesurable sur Y alors β est localement intégrable sur Y si et seulement si $\beta \circ f$ l'est sur X et, dans ce cas, l'égalité

(4.1) reste vraie. L'application $\alpha \mapsto f_\alpha$ est surjective de $C_c^\infty(X)$ sur $C_c^\infty(Y)$.

4.2 Considérons la situation suivante : soit (G, F, \mathbf{G}) un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie \mathfrak{g} et s un automorphisme de G dont la différentielle, notée encore s , est un automorphisme semi-simple de \mathfrak{g} . On note $G(s)$ le sous-groupe des points fixes de s dans G et $\mathfrak{g}(s)$ son algèbre de Lie. On désigne par ν_1, \dots, ν_l les valeurs propres distinctes de s dans $\mathfrak{g}_{\bar{k}} = \bar{k} \otimes_k \mathfrak{g}$. On pose

$$a'(s) = \inf_{\nu_i \neq 1} \{|\nu_i - 1|_{\bar{k}}, |\nu_i^{-1} - 1|_{\bar{k}}, a_G\}.$$

Pour $0 < \varepsilon < a'(s)$, on considère l'application $\psi : G \times G(s)_\varepsilon \longrightarrow G$, $(y, z) \mapsto yzs(y^{-1})$. C'est une submersion en tout point. Ainsi l'image de ψ , notée $\mathcal{W}(s, \varepsilon)$, est un ouvert de G , $*$ -invariant, où $*$ est l'opération de G sur lui-même définie par :

$$y * z = yzs(y^{-1}), \quad y, z \in G.$$

On munit G (resp. $G(s)$) d'une mesure de Haar d_Gx (resp. $d_{G(s)}y$). Si $\alpha \in C_c^\infty(G \times G(s)_\varepsilon)$, on désigne par β_α l'élément de $C_c^\infty(G(s)_\varepsilon)$, défini par

$$\beta_\alpha(y) = \int_G \alpha(x, y) d_Gx, \quad y \in G(s)_\varepsilon.$$

Théorème 4.2.1 *On suppose que G est unimodulaire. Soit $0 < \varepsilon < a'(s)$. Soit Θ une fonction généralisée $*$ -invariante sur $\mathcal{W}(s, \varepsilon)$. Il existe une unique fonction généralisée θ_s sur $G(s)_\varepsilon$, $G(s)$ -invariante telle que, pour toute $\alpha \in C_c^\infty(G \times G(s)_\varepsilon)$, on ait*

$$\Theta(\psi_\alpha d_Gx) = \theta_s(\beta_\alpha d_{G(s)}y).$$

De plus, si $\theta_s = 0$ alors $\Theta = 0$.

Exemple : Soit π une représentation admissible de G et S un opérateur borné et inversible dans l'espace de π tels que l'on ait

$$S\pi(x)S^{-1} = \pi(s(x)), \quad \text{pour tout } x \in G.$$

La fonction généralisée Λ sur G définie par :

$$\Lambda(\varphi d_Gx) = \text{Tr}(S \circ \pi(\varphi d_Gx)), \quad \varphi \in C_c^\infty(G)$$

est $*$ -invariante. On obtient ainsi une fonction généralisée λ_s sur $G(s)_\varepsilon$, $G(s)$ -invariante, qui détermine entièrement Λ sur $\mathcal{W}(s, \varepsilon)$.

4.3 Dans ce paragraphe, on se donne un groupe presque algébrique (G, F, \mathbf{G}) d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , s un élément semi-simple de G . On reprend les notations de la section

3.2. Pour $0 < \varepsilon(s) < a'(s)$, on considère l'application analytique :

$$\Psi : G \times G(s)_{\varepsilon(s)} \longrightarrow G, (x, y) \longmapsto xsyx^{-1}.$$

Alors, Ψ est une submersion et son image, noté $\mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s))$ ou simplement $\mathcal{W}(s, \varepsilon(s))$ lorsque aucune confusion n'est possible, est un ouvert G -semi-simple. De plus, d'après le lemme 3.2.1, si $\varepsilon(s) < a(s)$, alors Ψ induit un difféomorphisme $\bar{\Psi}$ de l'ouvert $G \times_{G(s)} G(s)_{\varepsilon(s)}$ du fibré vectoriel $G \times_{G(s)} G(s)$ sur $\mathcal{W}(s, \varepsilon(s))$. On choisit une mesure de Haar $d_G x$ (resp. $d_{G(s)} y$) sur G (resp. $G(s)$). On munit $G/G(s)$ de la mesure invariante $d_{G/G(s)} \dot{x}$. On a le résultat suivant.

Théorème 4.3.1 *Soit $0 < \varepsilon(s) < a'(s)$ tel que $\bar{\Psi}$ soit un difféomorphisme. Soit Θ une fonction généralisée G -invariante sur $\mathcal{W}(s, \varepsilon(s))$. Il existe une unique fonction généralisée θ , $G(s)$ -invariante, sur $G(s)_{\varepsilon(s)}$, telle que, pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{W}(s, \varepsilon(s)))$, on ait*

$$\int_{\mathcal{W}(s, \varepsilon(s))} \Theta(x) \varphi(x) d_G x = \int_{G/G(s)} |\det Adx_{\mathfrak{g}}|_p \left\{ \int_{G(s)_{\varepsilon(s)}} \theta(y) \varphi(xsyx^{-1}) \times \right. \\ \left. \times |\det(Ad(sy)^{-1} - 1)_{(Ad s - 1)\mathfrak{g}}|_p d_{G(s)} y \right\} d_{G/G(s)} \dot{x}. \quad (4.2)$$

Réciproquement : si θ est une fonction généralisée, $G(s)$ -invariante, sur $G(s)_{\varepsilon(s)}$, la formule (4.2) définit une fonction généralisée Θ , G -invariante, sur l'ouvert $\mathcal{W}(s, \varepsilon(s))$.

Extensions de représentations du groupe de Heisenberg

5 Dans cette section, nous rappelons certains résultats sur la représentation de Weil et le groupe métaplectique. On peut consulter [28], [40], [32] et [26].

5.1 Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé de G , et π une représentation unitaire de H dans un espace de Hilbert \mathcal{H} . On note $\text{Ind}_H^G \pi$ la représentation induite que l'on réalise dans l'espace des fonctions φ sur G à valeurs dans \mathcal{H} mesurables telles que

$$\varphi(xy) = \Delta_{H,G}(y)^{\frac{1}{2}} \pi(y^{-1}) \varphi(x), \text{ pour } x \in G, y \in H \text{ et } \int_{G/H} \|\varphi(x)\|_{\mathcal{H}}^2 d_{G/H} \dot{x} < \infty.$$

Le groupe G agit sur cet espace par translations à gauche.

5.2 Soit \mathbf{U} un groupe algébrique unipotent défini sur k dont \mathbf{U}_k est l'ensemble des points rationnels. On désigne par \mathfrak{u} l'algèbre de Lie de \mathbf{U}_k . À toute forme linéaire u sur \mathfrak{u} , on associe une classe de représentations unitaires irréductibles de \mathbf{U}_k par la méthode des orbites de Kirillov [23]. Soit \mathfrak{l} une polarisation en u et on note $L = \exp(\mathfrak{l})$ le sous-groupe unipotent de \mathbf{U}_k d'algèbre de Lie \mathfrak{l} . On définit un caractère $\chi_{u, \mathfrak{l}}$ de L , en posant :

$$\chi_{u, \mathfrak{l}}(\exp X) = \varsigma(\langle u, X \rangle), \text{ pour tout } X \in \mathfrak{l}.$$

On considère la représentation induite $\text{Ind}_L^{\mathbf{U}_k} \chi_{u,\mathfrak{l}}$, notée $\pi_{u,\mathfrak{l}}$, réalisée dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathfrak{l}}$ défini en numéro 5.1. Alors $\pi_{u,\mathfrak{l}}$ est une représentation unitaire irréductible de \mathbf{U}_k . Sa classe ne dépend pas de \mathfrak{l} , on la note π_u . Rappelons que π_u ne dépend que de l'orbite co-adjointe de u .

5.3 On reprend les notations du numéro 5.2. Soit $u \in \mathfrak{u}^*$, \mathfrak{l} et \mathfrak{l}' deux polarisations en u . On note $F_{\mathfrak{l}',\mathfrak{l}}$ l'opérateur d'entrelacement canonique de $\mathcal{H}_{\mathfrak{l}}$ dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{l}'}$. Il est défini par la propriété suivante : il existe une mesure dj , L' -invariante, sur $L'/L \cap L'$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathcal{H}_{\mathfrak{l}}$, continu à support compact modulo L , on ait :

$$F_{\mathfrak{l}',\mathfrak{l}}\alpha(x) = \int_{L'/L \cap L'} \alpha(x.y)\chi_{u,\mathfrak{l}'}(y)dj, \quad x \in \mathbf{U}_k.$$

La mesure dj sur $L'/L \cap L'$ est déterminée par le fait que $F_{\mathfrak{l}',\mathfrak{l}}$ est une isométrie de $\mathcal{H}_{\mathfrak{l}}$ dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{l}'}$.

5.4 Soit (V, B) un espace symplectique. On note $H = V \times k$ le groupe de Heisenberg associé. La loi dans H est donnée par

$$(v, t).(v', t') = (v + v', t + t' + \frac{1}{2}B(v, v')), \quad \text{pour tout } v, v' \in V \text{ et } t, t' \in k.$$

Alors, H est un groupe unipotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = V \times k$, où le crochet de Lie est donné par

$$[(v, t), (v', t')] = (0, B(v, v')), \quad \text{pour tous } v, v' \in V \text{ et } t, t' \in k.$$

On note $E = (0, 1) \in \mathfrak{h}$. C'est un élément central de \mathfrak{h} et on a : $\mathfrak{h} = V \oplus kE$, où on a identifié V avec le sous-espace vectoriel de \mathfrak{h} constitué des vecteurs $(v, 0)$, $v \in V$. L'application exponentielle $\exp : \mathfrak{h} \rightarrow H$ est donnée par

$$\exp(v + tE) = (v, t), \quad \text{pour tout } v \in V, t \in k.$$

Le groupe symplectique $Sp(V)$ opère dans \mathfrak{h} par la formule

$$g.(v + tE) = g.v + tE, \quad \text{pour tout } v \in V, t \in k.$$

En composant avec l'application exponentielle, $Sp(V)$ opère aussi dans H :

$$g.\exp(v + tE) = \exp(g.v + tE), \quad \text{pour tout } v \in V, t \in k.$$

Soit $a_0 \in k^\times$ et $E_{a_0}^*$ la forme linéaire sur \mathfrak{h} définie par :

$$E_{a_0}^*(E) = a_0, \quad E_{a_0}|_V = 0.$$

Soit également ℓ un lagrangien de (V, B) . Alors $\mathfrak{l} = \ell \oplus kE$ est une polarisation en $E_{a_0}^*$ et la représentation $(\pi_{E_{a_0}^*,\mathfrak{l}}, \mathcal{H}_{\mathfrak{l}})$ de H est unitaire irréductible. Elle vérifie la relation

$$\pi_{E_{a_0}^*, \iota}(0, t) = \varsigma_{a_0}(t) \text{Id}_{\mathcal{H}_\iota}, \quad \text{pour tout } t \in k. \quad (5.1)$$

Pour $x \in Sp(V)$, on pose

$${}^x \pi_{E_{a_0}^*, \iota}(h) = \pi_{E_{a_0}^*, \iota}(x^{-1}.h), \quad h \in H.$$

Alors ${}^x \pi_{E_{a_0}^*, \iota}$ est aussi une représentation unitaire irréductible de H et vérifie la formule (5.1). D'après le théorème de Stone-Von Neumann, ${}^x \pi_{E_{a_0}^*, \iota}$ est équivalente à $\pi_{E_{a_0}^*, \iota}$. Soit $A(x)$ l'opérateur de \mathcal{H}_ι dans $\mathcal{H}_{x.\iota}$ défini par : $A(x)\alpha(y) = \alpha(x^{-1}.y)$, $\alpha \in \mathcal{H}_\iota$, $y \in H$. On pose

$$S'_{E_{a_0}^*, \ell}(x) = \frac{1}{\|A(x)\|} F_{\iota, x.\iota} \circ A(x). \quad (5.2)$$

Alors, on a :

$$S'_{E_{a_0}^*, \ell}(x)^{-1} \pi_{E_{a_0}^*, \iota}(y) S'_{E_{a_0}^*, \ell}(x) = {}^x \pi_{E_{a_0}^*, \iota}(y), \quad \text{pour tout } y \in H.$$

De plus, $S'_{E_{a_0}^*, \ell} : Sp(V) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\iota)$ est une représentation projective de $Sp(V)$ dans $\mathcal{U}(\mathcal{H}_\iota)$, le groupe des opérateurs unitaires de \mathcal{H}_ι . On désigne par $Mp(V)$ l'ensemble des couples (x, ϕ) , où $x \in Sp(V)$ et ϕ est une fonction sur les lagrangiens de V vérifiant les propriétés (15) et (16) de ([28], Paragraphe 24.4). On munit $Mp(V)$ de la loi de composition interne introduite dans ([28], Paragraphe 24.4). Il résulte de [40] que $Mp(V)$ est un groupe topologique, localement compact, dont la première projection fait un revêtement à deux feuillets de $Sp(V)$. Le groupe $Mp(V)$ s'appelle le groupe métaplectique et

$$S_{E_{a_0}^*, \ell} : Mp(V) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_\iota), \quad (x, \phi) \mapsto \phi(\ell) S'_{E_{a_0}^*, \ell}(x)$$

est une représentation fidèle. Elle ne dépend pas du lagrangien ℓ , on la note simplement $S_{E_{a_0}^*}$. C'est la représentation métaplectique de $Mp(V)$. Le résultat suivant est bien connu.

Théorème 5.4.1

- i) Les différents groupes $Mp(V)$, quand a_0 décrit k^\times , sont canoniquement isomorphes.
- ii) La représentation métaplectique $S_{E_{a_0}^*}$ ne dépend de a_0 que par sa classe dans $k^\times / k^{\times 2}$.

5.5 Une fonction sur le groupe métaplectique. Soit $x \in Mp(V)$ et $x = \tilde{s}.x_u$ sa décomposition de Jordan, $\tilde{s} = (s, \psi_s)$ étant la partie semi-simple de x et x_u étant la partie unipotente de x . Soit également $(1-s).V = W_1 \oplus W_2$ une décomposition en somme directe orthogonale par rapport à B , où W_1 est un sous-espace symplectique s -invariant possédant un lagrangien ℓ_1 stable sous l'action de s et W_2 est un sous-espace symplectique s -invariant possédant un lagrangien ℓ_2 tel que $(s.\ell_2) \cap \ell_2 = 0$ (voir [28],

Lemme 27). On considère la forme quadratique Q_{s,ℓ_2} sur ℓ_2 :

$$Q_{s,\ell_2}(v) = B(v, (s^{-1} - 1)^{-1}.v), \quad \text{pour tout } v \in \ell_2.$$

On note $\gamma_{a_0}(Q_{s,\ell_2}) = \gamma(a_0 Q_{s,\ell_2})$ le nombre complexe de module 1 associé à la forme quadratique $a_0 Q_{s,\ell_2}$ par la formule (2.1). On pose

$$\Phi_{a_0}(x) = \Phi_{a_0}(\tilde{s}) = \psi_s(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2) \overline{\gamma_{a_0}(Q_{s,\ell_2})}, \quad (5.3)$$

ℓ_0 étant un lagrangien de $V(s)$. D'après ([28], Corollaire 27) le nombre $\Phi_{a_0}(x)$, est bien défini, ne dépend ni du choix de la décomposition $(1-s).V = W_1 \oplus W_2$ ni du choix des lagrangiens ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 de $V(s)$, W_1 et W_2 respectivement. La formule (5.3) définit une fonction Φ_{a_0} sur $Mp(V)$, invariante par conjugaison par les éléments de $Mp(V)$.

5.6 Une formule du caractère. On se donne un élément semi-simple s de $Sp(V)$. On choisit $\tilde{s} = (s, \psi_s)$ un relèvement de s dans $Mp(V)$. On considère l'action de H sur lui-même définie par

$$x * y = xys(x^{-1}), \quad \text{pour tout } x, y \in H.$$

L'application $\Psi : H \times H(s) \longrightarrow H$, $(x, y) \longmapsto x * y$ est une submersion surjective. On pose

$$\Lambda_{\tilde{s}}(\varphi d_H x) = \text{Tr}(S_{E_{a_0}^*}(\tilde{s}) \pi_{E_{a_0}^*}(\varphi d_H x)), \quad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(H),$$

$d_H x$ étant une mesure de Haar sur H . Ceci a un sens puisque $\pi_{E_{a_0}^*}$ est admissible et $S_{E_{a_0}^*}(\tilde{s})$ est un opérateur borné. Alors $\Lambda_{\tilde{s}}$ est fonction généralisée sur H , *-invariante. On désigne par $\lambda_{\tilde{s}}$ la fonction généralisée sur $H(s)$ associée à $\Lambda_{\tilde{s}}$ par le théorème 4.2.1. Alors $\lambda_{\tilde{s}}$ détermine entièrement $\Lambda_{\tilde{s}}$, et elle est $H(s)$ -invariante. On note $\mathcal{O}_{E_{a_0}^*}$ l'orbite co-adjointe de $E_{a_0}^*$ sous l'action de H et $\mathcal{O}_{E_{a_0}^*,s} = \mathcal{O}_{E_{a_0}^*} \cap \mathfrak{h}^*(s)$ l'ensemble des points fixes de s dans $\mathcal{O}_{E_{a_0}^*}$. Alors $\mathcal{O}_{E_{a_0}^*,s}$ est une $H(s)$ -orbite.

Théorème 5.6.1 *Pour tout $\beta \in C_c^\infty(H(s))$, on a :*

$$\lambda_{\tilde{s}}(\beta d_{H(s)} y) = \Phi_{a_0}(\tilde{s}) |\det(1-s)_{(1-s)V}|_p^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{O}_{E_{a_0}^*,s}} (\beta \circ \exp d_{\mathfrak{h}(s)} Y) \widehat{\mathfrak{h}(s)}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{E_{a_0}^*,s}}(l),$$

où $d_{H(s)} y$ est une mesure de Haar sur $H(s)$ et $d_{\mathfrak{h}(s)} Y$ est la mesure de Haar sur $\mathfrak{h}(s)$ tangente à $d_{H(s)} y$.

Lorsque $a_0 = 1$, le théorème ci-dessus est le théorème 28 de [28].

5.6.1 Dans la suite, on utilise les notations suivantes :

$$V_s = (1-s)V, \quad \mathfrak{h}_{2,s} = V_s + kE, \quad H_{2,s} = \exp(\mathfrak{h}_{2,s}), \quad E_{2,s}^* = E_{a_0|_{\mathfrak{h}_{2,s}}}^*,$$

$s_2 = s|_{V_s}$, la restriction de s à V_s , et \tilde{s}_2 un relèvement de s_2 dans $Mp(V_s)$. On se donne un lagrangien ℓ_2 de V_s . On note $\mathfrak{l}_2 = \ell_2 \oplus kE$. C'est une polarisation en $E_{2,s}^*$. On

désigne par $(\pi_{E_{2,s}^*}, \mathcal{H}_2)$ la représentation unitaire irréductible de $H_{2,s}$ associée à $E_{2,s}^*$ par la méthode des orbites de Kirillov et réalisée dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{\ell_2}$, et par $S_{E_{2,s}^*}$ la représentation métaplectique de $Mp(V_s)$ associée au caractère ς_{a_0} et réalisée dans le même espace de Hilbert \mathcal{H}_2 .

Désignons par ν_1, \dots, ν_l les valeurs propres distinctes de s dans $V_{\bar{k}} = \bar{k} \otimes_k V$. On pose :

$$a'(s)_{Sp(V)} = \inf_{\nu_i \neq 1} \{|\nu_i - 1|_{\bar{k}}, |\nu_i^{-1} - 1|_{\bar{k}}, a\}.$$

Soit $0 < \varepsilon(s) < a'(s)_{Sp(V)}$. On note

$$\mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s)) = \{\tilde{x}\tilde{s}_2\tilde{y}\tilde{x}^{-1}, \tilde{y} \in Mp(V_s)(\tilde{s}_2)_{\varepsilon(s)}, \tilde{x} \in Mp(V_s)\}.$$

Pour $\tilde{z} \in \mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s))$ et $\alpha \in C_c^\infty(V_s)$, on considère l'opérateur, de rang fini, agissant dans \mathcal{H}_2 :

$$J_\alpha(\tilde{z}) = S_{E_{2,s}^*}(\tilde{z}) \int_{V_s} \alpha(v) \pi_{E_{2,s}^*}(\exp(\tilde{z}^{-1} \cdot v) \exp(-v)) d_{V_s} v, \quad (5.4)$$

$d_{V_s} v$ étant une mesure de Haar sur V_s . On a le résultat suivant.

Proposition 5.6.1 *On suppose que \tilde{z} est semi-simple. Pour tout $\alpha \in C_c^\infty(V_s)$ telle que $\int_{V_s} \alpha(v) d_{V_s} v = 1$, on a :*

$$Tr(J_\alpha(\tilde{z})) = \Phi_{a_0}(\tilde{z}) |\det(1 - \tilde{z})_{V_s}|_p^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.5)$$

Démonstration : C'est une conséquence de ([28], Proposition 29.3.3). ■

5.6.2 Dans la suite, on a besoin du résultat suivant.

Lemme 5.6.1 *Soit $\alpha \in C_c^\infty(V_s)$. Il existe un sous-groupe ouvert K de $GL(V_s)$ tel que*

$$\alpha(x \cdot v) = \alpha(v), \quad \text{pour tous } v \in V_s, x \in K.$$

Démonstration : Puisque $\alpha \in C_c^\infty(V_s)$, il existe r un réseau de V_s , $v_1, \dots, v_m \in V_s$, et $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ tels que

$$\alpha = \sum_{1 \leq j \leq m} c_j 1_{v_j+r}.$$

L'ensemble

$$K = \bigcap_{1 \leq j \leq m} \{x \in GL(V_s), x(v_j) - v_j \in r, x(r) = r\}$$

est un sous-groupe ouvert de $GL(V_s)$ et remplit les conditions voulues. ■

Proposition 5.6.2 Soit $\alpha \in C_c^\infty(V_s)$ et $\tilde{y}_0 \in Mp(V_s)(\tilde{s}_2)_{\varepsilon(s)}$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}_{\tilde{y}_0}$ de \tilde{y}_0 dans $Mp(V_s)(\tilde{s}_2)$ contenu dans $Mp(V_s)(\tilde{s}_2)_{\varepsilon(s)}$ tel que

$$J_\alpha(\tilde{s}_2\tilde{y}) = J_\alpha(\tilde{s}_2\tilde{y}_0), \quad \text{pour tout } \tilde{y} \in \mathcal{V}_{\tilde{y}_0}.$$

Démonstration : D'après le lemme 3.1.2, la projection canonique de $Mp(V_s)$ dans $Sp(V_s)$ induit un difféomorphisme $p_s : Mp(V_s)(\tilde{s}_2)_{\varepsilon(s)} \longrightarrow Sp(V_s)(s_2)_{\varepsilon(s)|4|_p}$. Pour $y \in Sp(V_s)(s_2)_{\varepsilon(s)|4|_p}$, on note $\tilde{y} = p_s^{-1}(y)$. On a :

$$J_\alpha(\tilde{s}_2\tilde{y}) = S_{E_{2,s}^*}(\tilde{s}_2\tilde{y})J'_\alpha(s_2y),$$

où

$$J'_\alpha(s_2y) = \int_{V_s} \alpha(v)\pi_{E_{2,s}^*}(\exp((s_2y)^{-1}.v)\exp(-v))d_{V_s}v.$$

Un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} J'_\alpha(s_2y) &= \int_{V_s} \alpha(v)\pi_{E_{2,s}^*}(\exp(((s_2y)^{-1} - 1).v))\varsigma_{a_0}(-\frac{1}{2}B(((s_2y)^{-1} - 1).v, v))d_{V_s}v \\ &= |\det((s_2y)^{-1} - 1)_{V_s}|_p^{-1} \\ &\quad \int_{V_s} \alpha(((s_2y)^{-1} - 1)^{-1}.v)\pi_{E_{2,s}^*}(\exp(v))\varsigma_{a_0}(-\frac{1}{2}B(v, ((s_2y)^{-1} - 1)^{-1}v))d_{V_s}v. \end{aligned}$$

D'après le lemme ci-dessus, il existe un sous-groupe ouvert K de $GL(V_s)$ tel que

$$\alpha(((s_2y_0)^{-1} - 1)^{-1}x.v) = \alpha(((s_2y_0)^{-1} - 1)^{-1}v), \quad \forall v \in V_s, \forall x \in K.$$

Il en résulte qu'il existe un sous-groupe compact ouvert K' de $Sp(V_s)(s_2)$ contenu dans $Sp(V_s)(s_2)_{\varepsilon(s)|4|_p}$ tel que l'on ait $y_0K' \subset Sp(V_s)(s_2)_{\varepsilon(s)|4|_p}$ et

$$\alpha(((s_2y)^{-1} - 1)^{-1}.v) = \alpha(((s_2y_0)^{-1} - 1)^{-1}.v), \quad \forall y \in y_0K', \forall v \in V.$$

Maintenant, soit r_s un réseau de V_s contenant $((s_2y_0)^{-1} - 1).\text{supp}(\alpha)$. L'application $\eta : (y, v) \longmapsto \varsigma_{a_0}(-\frac{1}{2}B(v, ((s_2y_0y)^{-1} - 1)^{-1}v))$ de $K' \times r_s$ dans \mathbb{C}^\times , est localement constante. On en déduit qu'il existe un sous-groupe compact ouvert K_0 contenu dans K' tel que l'on ait

$$\eta(y, v) = \eta(1, v), \quad \text{pour tout } (y, v) \in K_0 \times r_s.$$

Si bien que l'on a :

$$J'_\alpha(s_2y_0y) = J'_\alpha(s_2y_0), \quad \text{pour tout } y \in K_0.$$

On note alors $\tilde{K}_0 = p_s^{-1}(K_0)$.

D'autre part, pour $m \in \mathbb{N}$ et $w \in \omega^m r_s$, on a :

$$\begin{aligned}
\pi_{E_{2,s}^*}(\exp(w))J'_\alpha(s_2y_0) &= |\det((s_2y_0)^{-1} - 1)_{V_s}|_p^{-1} \int_{V_s} \alpha(((s_2y_0)^{-1} - 1)^{-1} \cdot (v - w)) \\
&\quad \times \pi_{E_{2,s}^*}(\exp(v))\varsigma_{a_0}(-\frac{1}{2}B(v - w, ((s_2y_0)^{-1} - 1)^{-1}(v - w))) \\
&\quad \times \varsigma_{a_0}(\frac{1}{2}B(w, v))d_{V_s}v.
\end{aligned}$$

Ainsi, si m est suffisamment grand, on a :

$$\pi_{E_{2,s}^*}(\exp(w))J'_\alpha(s_2y_0) = J'_\alpha(s_2y_0), \text{ pour tout } w \in \omega^m r_s.$$

Posons $K_m = \exp(\omega^m r_s + \mathcal{O}a_0 E)$. Si m est suffisamment grand, K_m est un sous-groupe compact ouvert de $H_{2,s}$. Comme $\pi_{E_{2,s}^*}$ est admissible, $\mathcal{H}_2^{K_m}$ est de dimension finie. Notons $M = Sp(V_s)(r_s)$ et M^{V_s} son image réciproque dans $Mp(V_s)$. Alors, $(S_{E_{2,s}^*})|_{M^{V_s}}$ laisse invariant $\mathcal{H}_2^{K_m}$ et elle induit une représentation continue du groupe M^{V_s} dans $\mathcal{H}_2^{K_m}$. Puisque $GL(\mathcal{H}_2^{K_m})$ n'a pas de sous-groupes non triviaux arbitrairement petits, il existe un sous-groupe ouvert \tilde{M} de M^{V_s} tel que $(S_{E_{2,s}^*})|_{\tilde{M}} = \text{Id}_{\mathcal{H}_2^{K_m}}$. L'ensemble $\tilde{y}_0 \cdot (\tilde{M} \cap \tilde{K}_0)$ est un voisinage de \tilde{y}_0 ayant les propriétés voulues. ■

5.6.3 On reprend les notations des sections 5.6.1 et 5.6.2. Soit $\alpha \in C_c^\infty(V_s)$ tel que $\int_{V_s} \alpha(v)d_{V_s}v = 1$. On définit une application :

$$T_\alpha : \mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s)) \longrightarrow \mathbb{C}, \tilde{z} \longmapsto |\det(1 - \tilde{z})_{V_s}|_p^{\frac{1}{2}} \text{Tr}(J_\alpha(\tilde{z})).$$

Proposition 5.6.3 *On a :*

$$T_\alpha = \Phi_{a_0|_{\mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s))}}. \quad (5.6)$$

Si $\varepsilon(s)$ est suffisamment petit, alors

$$T_\alpha(\tilde{z}) = T_\alpha(\tilde{s}_2), \forall \tilde{z} \in \mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s)), \forall a_0 \in k^\times. \quad (5.7)$$

Démonstration : On a :

$$T_\alpha(\tilde{x}\tilde{z}\tilde{x}^{-1}) = T_{\alpha^{\tilde{x}}}(\tilde{z}), \tilde{z} \in \mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s)), \tilde{x} \in Mp(V_s), \quad (5.8)$$

où $\alpha^{\tilde{x}}$ est l'élément de $C_c^\infty(V_s)$ défini par : $\alpha^{\tilde{x}}(v) = \alpha(\tilde{x} \cdot v)$, pour tout $v \in V_s$. Il résulte du lemme 5.6.1, de la proposition 5.6.2, et de l'égalité (5.8) que l'application T_α est localement constante. D'après la proposition 5.6.1, l'égalité (5.6) est vraie sur les éléments semi-simples de $\mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s))$. Mais l'ensemble des éléments semi-simples de

$Mp(V_s)$ qui sont contenus dans $\mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s))$ est dense dans $\mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s))$. On en déduit que l'application T_α ne dépend pas de α pourvu que $\int_{V_s} \alpha(v) d_{V_s} v = 1$. Il en résulte que T_α est invariante par conjugaison par les éléments de $Mp(V_s)$. Soit $\tilde{z} \in \mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s))$. Ecrivons $\tilde{z} = \tilde{z}_s \tilde{z}_u$, où \tilde{z}_s est la partie semi-simple de \tilde{z} et \tilde{z}_u est la partie unipotente de \tilde{z} . En utilisant la proposition 3.3.1, on a :

$$T_\alpha(\tilde{z}) = T_\alpha(\tilde{z}_s) = \Phi_{a_0}(\tilde{z}_s) = \Phi_{a_0}(\tilde{z}).$$

Pour démontrer la deuxième assertion, on remarque que l'ensemble

$$A := \{\tilde{z} \in \mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon(s)) \text{ tel que } T_\alpha(\tilde{z}) = T_\alpha(\tilde{s}_2)\}$$

est un voisinage ouvert, invariant, de \tilde{s}_2 dans $Mp(V_s)$. On en déduit qu'il existe un voisinage ouvert, $Mp(V_s)(\tilde{s}_2)$ -invariant, \tilde{U} de 1 dans $Mp(V_s)(\tilde{s}_2)$ contenu dans $Mp(V_s)(\tilde{s}_2)_{\varepsilon(s)}$ tel que $\tilde{s}_2 \cdot \tilde{U} \subset A$. D'après le lemme 3.3.1, il existe $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon(s)$ tel que $Mp(V_s)(\tilde{s}_2)_{\varepsilon'} \subset \tilde{U}$. Si bien que $\mathcal{W}(\tilde{s}_2, \varepsilon') \subset A$. \blacksquare

5.6.4 Dans cette section, on se donne un k -espace vectoriel W de dimension finie et x un automorphisme semi-simple de W . Si V est un sous-espace vectoriel stable par x et B une forme symplectique sur V fixée par x , on note $V_x = (1 - x) \cdot V$ et $x|_{V_x}$ un relèvement de $x|_V$ dans $Mp(V_x)$. On a le résultat suivant.

Proposition 5.6.4 *Il existe $\varepsilon(x) > 0$ tel que, pour tout sous-espace vectoriel V stable par x et pour toute forme symplectique sur V fixé par x , on ait*

$$\Phi_{a_0|_{\mathcal{W}(x|_{V_x}, \varepsilon(x))}} = \Phi_{a_0}(x|_{V_x}), \text{ pour tout } a_0 \in k^\times. \quad (5.9)$$

Démonstration : On désigne par \mathcal{B}_i l'ensemble des sous-espaces symplectiques (V, B) , de dimension i , de W . Le groupe $GL(W)$ opère à gauche dans \mathcal{B}_i par : si $g \in GL(W)$ et $(V, B) \in \mathcal{B}_i$ alors $g \cdot (V, B) = (g \cdot V, B^g)$, où $B^g(v, w) = B(g^{-1}v, g^{-1}w)$. Choisissons un élément $(V_0, B_0) \in \mathcal{B}_i$, fixé par x (s'il en existe) et posons $K = GL(W)((V_0, B_0))$ le stabilisateur de (V_0, B_0) dans $GL(W)$. Alors K est un sous-groupe algébrique (fermé) de $GL(W)$. Comme l'action de $GL(W)$ dans \mathcal{B}_i est transitive alors \mathcal{B}_i s'identifie canoniquement avec l'espace homogène $GL(W)/K$. Considérons l'action par translations à gauche de $GL(W)$ sur $GL(W)/K$. Alors, l'application $\mathfrak{T} : GL(W)/K \rightarrow \mathcal{B}_i$, $g \cdot K \mapsto g \cdot (V_0, B_0)$ est une bijection, $GL(W)$ -équivariante. Soit $H = GL(W)(x)$, le centralisateur de x dans $GL(W)$. D'après ([35], Théorème A), l'ensemble de points fixes $(GL(W)/K)^x$ pour l'action de x dans $GL(W)/K$ est une réunion finie de H -orbites. L'image de $(GL(W)/K)^x$ par \mathfrak{T} , notée \mathcal{A}_i , est l'ensemble de sous-espaces symplectiques (V, B) pour lequel V est stable par x et $x|_V \in Sp(V, B)$, de dimension i de W . Il en résulte que \mathcal{A}_i est une réunion finie de H -orbites. Prenons, maintenant, une H -orbite \mathcal{O}_i dans \mathcal{A}_i . Par transport de structure et la proposition 5.6.3, on peut choisir $\varepsilon_{\mathcal{O}_i}(x) > 0$ tel que l'on ait la formule (5.9) pour tout $(V, B) \in \mathcal{O}_i$. Il s'ensuit

qu'il existe $\varepsilon_i(x) > 0$ tel que l'on ait la formule (5.9) pour tout $(V, B) \in \mathcal{A}_i$. Il suffit alors de prendre $\varepsilon(x) = \inf\{\varepsilon_i(x) \text{ tel que } 0 \leq i \leq \dim W \text{ et } \mathcal{A}_i \neq \emptyset\}$. ■

Formule du caractère.

6 Soit (G, F, \mathbf{G}) un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Pour chaque forme linéaire g sur \mathfrak{g} , on considère l'extension métaplectique $G(g)^\mathfrak{g}$ correspondant à l'action de $G(g)$ dans (\mathfrak{g}, β_g) dont l'élément central non trivial du noyau est noté $(1, -1)$ (voir le numéro 7.1). On note χ_g le caractère de ${}^uG(g)^\mathfrak{g}$, radical unipotent de $G(g)^\mathfrak{g}$, défini par la formule : $\chi_g(\exp(X)) = \varsigma(\langle g, X \rangle)$, $X \in {}^u\mathfrak{g}(g)$. On note $Y_G(g)$ l'ensemble des classes des représentations unitaires irréductibles τ de $G(g)^\mathfrak{g}$ dont la restriction à ${}^uG(g)^\mathfrak{g}$ est multiple de χ_g et telle que $\tau(1, -1) = -\text{Id}$. Si g est de type unipotent (voir numéro 6.1) et τ est un élément de $Y_G(g)$, M. Duflo a associé au couple (g, τ) une classe de représentations unitaires irréductibles $\pi_{g,\tau}$ de G telle que :

- pour tout automorphisme a de (G, F, \mathbf{G}) , on ait : $\pi_{ag, {}^a\tau} = {}^a\pi_{g,\tau}$ (où ${}^a\tau = \tau \circ a^{-1}$ et ${}^a\pi_{g,\tau} = \pi_{g,\tau} \circ a^{-1}$);
- soit $\tau' \in Y_G(g)$; $\pi_{g,\tau}$ et $\pi_{g,\tau'}$ sont équivalentes si et seulement si τ et τ' sont équivalentes;
- soit g' une forme de type unipotent et $\tau' \in Y_G(g')$. On suppose que g et g' ne sont pas dans une même G -orbite, alors $\pi_{g,\tau}$ et $\pi_{g',\tau'}$ sont inéquivalentes.

Désignons par Y_G l'ensemble des couples (g, τ) , où g est de type unipotent et $\tau \in Y_G(g)$. Le groupe G opère naturellement dans Y_G et la correspondance ci-dessus induit une bijection de $G \backslash Y_G$ sur \widehat{G} , l'ensemble des classes des représentations unitaires irréductibles de G . Cette description s'appelle la méthode des orbites de Kirillov-Duflo pour la construction des représentations unitaires irréductibles de G . Elle permet d'obtenir tous les éléments de \widehat{G} .

Si $\pi_{g,\tau}$ est admissible, on note $\Theta_{g,\tau}$ son caractère; c'est la fonction généralisée sur G définie par

$$\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = \text{Tr}(\pi_{g,\tau}(\varphi d_G x)), \varphi \in C_c^\infty(G), \quad (6.1)$$

où $d_G x$ est une mesure de Haar sur G .

Dans [28], nous avons démontré que si l'orbite co-adjointe \mathcal{O}_g de g est fermée dans \mathfrak{g}^* et si τ est de dimension finie alors $\pi_{g,\tau}$ est admissible et que $\Theta_{g,\tau}$ est donné, au voisinage de chaque élément semi-simple s de G , par une formule à la Duflo-Heckman-Vergne, en termes de transformées de Fourier de l'ensemble des points fixes $\mathcal{O}_{g,s}$ de s dans \mathcal{O}_g , du caractère de τ , et d'une fonction bien définie, constante sur chaque $G(s)$ -orbite sur $\mathcal{O}_{g,s}$. Néanmoins le voisinage semi-simple sur lequel nous avons la validité de la formule établi dans [28] dépend de la représentation $\pi_{g,\tau}$. Dans cette partie du présent travail nous allons remédier à cette dépendance pour les groupes résolubles presque connexes et dans le cas où p , la caractéristique résiduelle de k , est différente de 2.

6.1 Une partition de l'ensemble des orbites co-adjointes. On suppose désormais que \mathfrak{g} est résoluble. Suivant Duflo (voir [9]), une forme linéaire g sur \mathfrak{g} est dite de type unipotent si \mathfrak{r}_g , facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$, est contenu dans $\ker g$. D'après [9], l'application qui à $g \in \mathfrak{g}^*$ associe $g|_{\mathfrak{u}_g}$ induit une bijection entre l'ensemble des G -orbites de type unipotent dans \mathfrak{g}^* et l'ensemble des G -orbites dans $({}^u\mathfrak{g})^*$.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ de type unipotent. On note $L(g)$ l'ensemble des formes linéaires λ sur $\mathfrak{g}(g)$ dont la restriction à ${}^u\mathfrak{g}(g)$ est égale à celle de g . Si \mathfrak{r}_g est un facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$ alors l'application $\lambda \in (\mathfrak{g}(g))^* \mapsto \lambda|_{\mathfrak{r}_g}$ réalise une bijection entre $L(g)$ et \mathfrak{r}_g^* . On note \mathfrak{D} l'ensemble des couples (g, λ) où g est de type unipotent et où $\lambda \in L(g)$. Le groupe G opère naturellement sur \mathfrak{D} . Si $(g, \lambda) \in \mathfrak{D}$ et \mathfrak{b} est une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à g (i.e. \mathfrak{b} est co-isotrope par rapport à g , algébrique, et $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}(g) + {}^u\mathfrak{b}$), on considère une forme linéaire f sur \mathfrak{g} telle que

$$f|_{{}^u\mathfrak{b}} = g|_{{}^u\mathfrak{b}} \text{ et } f|_{\mathfrak{g}(g)} = \lambda. \quad (6.2)$$

Le résultat suivant est dû à M. Duflo [9].

Proposition 6.1.1 *On a :*

i) *L'orbite $G.f$ de f sous l'action de G ne dépend pas des choix de \mathfrak{b} et f . On la note $\mathcal{O}_{g,\lambda}$.*

ii) *L'application $(g, \lambda) \mapsto \mathcal{O}_{g,\lambda}$ induit une bijection de $G \backslash \mathfrak{D}$ sur $G \backslash \mathfrak{g}^*$.*

6.2 On se donne $g \in \mathfrak{g}^*$ de type unipotent. On pose $\mathfrak{b}_g = \mathfrak{g}(g) + {}^u\mathfrak{g}$. C'est une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à g . C'est la sous-algèbre acceptable canonique associée à g (voir [9], Chapitre 1). Soit $\lambda \in L(g)$ et $f \in \mathfrak{g}^*$ tel que

$$f|_{{}^u\mathfrak{g}} = g|_{{}^u\mathfrak{g}} \text{ et } f|_{\mathfrak{g}(g)} = \lambda.$$

Alors, on a : $\mathcal{O}_{g,\lambda} = G.f$.

Soit \mathfrak{u} un idéal abélien de \mathfrak{g} , G -invariant, et contenu dans ${}^u\mathfrak{g}$. On note U le sous-groupe unipotent de G d'algèbre de Lie \mathfrak{u} . On pose

$$u = g|_{\mathfrak{u}}, \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(u), h = g|_{\mathfrak{h}}, H = G(u).$$

Alors, \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie, algébrique, de \mathfrak{g} . D'après ([33], p. 500-501), $\mathfrak{h}(h) = \mathfrak{g}(g) + \mathfrak{u}$, si bien que le radical unipotent de $\mathfrak{h}(h)$ est ${}^u\mathfrak{g}(g) + \mathfrak{u}$.

En considérant λ comme un élément de $L(h)$, en la prolongeant par $g|_{\mathfrak{u}}$ sur \mathfrak{u} , alors $\mathcal{O}_{h,\lambda}$ est l'orbite co-adjointe de $f|_{\mathfrak{h}}$ sous l'action de H .

Notons $r : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$ (resp. $r' : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{u}^*$) l'application restriction de \mathfrak{g}^* dans \mathfrak{h}^* (resp. dans \mathfrak{u}^*). Alors, l'image réciproque de $\{u\}$ dans $\mathcal{O}_{g,\lambda}$ par r' est $H.f$. Il en résulte que si $\mathcal{O}_{g,\lambda}$ est fermée dans \mathfrak{g}^* alors $H.f$ l'est aussi. Comme $U.x.f = x.f + \mathfrak{h}^\perp$, pour tout

$x \in H$, $H.f$ est saturée par rapport à r . Si bien que si $\mathcal{O}_{g,\lambda}$ est fermée, il en est de même pour $\mathcal{O}_{h,\lambda} = r(H.f)$ dans \mathfrak{h}^* .

On munit $\mathcal{O}_{g,\lambda}$ (resp. $\mathcal{O}_{h,\lambda}$) de la mesure de Liouville $d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda}}$ (resp. $d\mu_{\mathcal{O}_{h,\lambda}}$). On choisit $d_G x$ (resp. $d_H y$) une mesure de Haar sur G (resp. H). On note $d_{\mathfrak{g}} X$ (resp. $d_{\mathfrak{h}} Y$) la mesure de Haar sur \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{h}) tangente à $d_G x$ (resp. $d_H y$). On considère la mesure invariante $d_{G/H} \dot{x} = d_G x / d_H y$ sur G/H . On munit l'espace vectoriel \mathfrak{h}^\perp de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{h}^\perp} t$ duale de $d_{\mathfrak{g}} X / d_{\mathfrak{h}} Y$. On a le résultat suivant qui se démontre de la même façon que le lemme 7 de [24].

Proposition 6.2.1 *Avec les notations ci-dessus on a, pour toute φ mesurable positive ou intégrable sur $\mathcal{O}_{g,\lambda}$,*

$$\int_{\mathcal{O}_{g,\lambda}} \varphi(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda}}(l) = \int_{G/H} \int_{\mathcal{O}_{h,\lambda}} \int_{\mathfrak{h}^\perp} \varphi(x.(\tilde{w} + t)) d_{\mathfrak{h}^\perp} t d\mu_{\mathcal{O}_{h,\lambda}}(w) d_{G/H} \dot{x},$$

où \tilde{w} est un élément de \mathfrak{g}^* dont la restriction à \mathfrak{h} est w .

7 Techniques de récurrence dans la construction de \widehat{G} .

7.1 Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur k muni d'une forme bilinéaire alternée B . Soit H un groupe opérant dans V par des automorphismes fixant B . On note $V^{\perp B} = \{v \in V / B(v, w) = 0, \text{ pour tout } w \in V\}$. Alors B induit sur $V/V^{\perp B}$ une structure symplectique invariante sous l'action de H , notée encore B . Si $V \neq V^{\perp B}$, le groupe métaplectique $Mp(V/V^{\perp B})$ est bien défini. Si $V = V^{\perp B}$, on pose $Mp(V/V^{\perp B}) = \{\pm 1\}$. On note H^V l'ensemble des couples (x, m) , où $x \in H$ et $m \in Mp(V/V^{\perp B})$ tels que x et m aient même image dans le groupe symplectique $Sp(V/V^{\perp B})$. On a une projection naturelle de H^V sur H qui au couple (x, m) de H^V fait correspondre l'élément x de H . Si H est un groupe localement compact et si son action dans V est continue, cette projection est continue et son noyau est constitué de deux éléments qui sont centraux dans H^V . Autrement dit, H^V est une extension centrale d'ordre deux de H , dite aussi extension métaplectique associée à l'action de H dans V . On peut également décrire H^V comme l'ensemble des couples (x, ϕ) , où $x \in H$ et ϕ est une fonction sur les lagrangiens de $V/V^{\perp B}$, tels que, notant \bar{x} l'image de x dans $Sp(V/V^{\perp B})$, on ait $(\bar{x}, \phi) \in Mp(V/V^{\perp B})$. Remarquons que si W est un sous-espace vectoriel H -invariant de V contenu dans $V^{\perp B}$, le groupe $H^{V/W}$ est bien défini et il est égal à H^V .

7.2 Les notations sont celles du numéro précédent. Soit W un sous-espace H -invariant de V tel que son orthogonal par B soit contenu dans $W + V^{\perp B}$. Les groupes H^V et H^W sont définis. Si m est un sous-espace totalement isotrope de dimension maximale dans W alors $m + V^{\perp B}$ est totalement isotrope maximal dans V . Rappelons que l'application $\ell \mapsto \ell/V^{\perp B}$ est une bijection, canonique, de l'ensemble des sous-espaces totalement isotropes maximaux de V sur l'ensemble des lagrangiens de $V/V^{\perp B}$. On identifie donc ces deux ensembles au moyen de cette bijection. Le résultat suivant est dû à M. Duflo [9].

Lemme 7.2.1

i) Soient (x, ϕ) dans H^V et (x, ψ) dans H^W . Le nombre $\phi(m + V^{\perp B})\psi(m)^{-1}$ ne dépend pas du choix du lagrangien m de W . On le note $\phi\psi^{-1}$.

ii) Soient $(x, \phi), (x', \phi') \in H^V$ et $(x, \psi), (x', \psi') \in H^W$. On pose $(x, \phi)(x', \phi') = (xx', \phi\phi')$ et $(x, \psi)(x', \psi') = (xx', \psi\psi')$. On a : $\phi''\psi''^{-1} = (\phi\psi^{-1})(\phi'\psi'^{-1})$.

7.3 Dans ce paragraphe, nous allons décrire les techniques de récurrence dans la construction de \widehat{G} .

7.3.1 Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ et β_g la forme bilinéaire alternée sur \mathfrak{g} définie par :

$$\beta_g(X, Y) = \langle g, [X, Y] \rangle, \text{ pour tout } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Elle est invariante par $G(g)$, si bien que l'extension métaplectique $G(g)^{\mathfrak{g}}$ correspondant à l'action de $G(g)$ dans (\mathfrak{g}, β_g) est bien définie. L'élément non trivial du noyau de la projection canonique de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ sur $G(g)$ est noté $(1, -1)$. On définit un caractère χ_g de ${}^uG(g)^{\mathfrak{g}}$, radical unipotent de $G(g)^{\mathfrak{g}}$, par la formule

$$\chi_g(\exp(X)) = \varsigma(\langle g, X \rangle), \quad X \in {}^u\mathfrak{g}(g).$$

On désigne par $Y_G(g)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ dont la restriction à ${}^uG(g)^{\mathfrak{g}}$ est multiple de χ_g et telle que $\tau(1, -1) = -\text{Id}$. Soit R_g un facteur réductif de $G(g)$ d'algèbre de Lie \mathfrak{r}_g et $R_g^{\mathfrak{g}}$ son image réciproque dans $G(g)^{\mathfrak{g}}$. Alors $R_g^{\mathfrak{g}}$ est un facteur réductif de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ et l'application $\tau \rightarrow \tau|_{R_g^{\mathfrak{g}}}$ permet d'identifier $Y_G(g)$ à l'ensemble des classes des représentations unitaires irréductibles τ de $R_g^{\mathfrak{g}}$ telles que $\tau(1, -1) = -\text{Id}$.

Maintenant, on se place dans les conditions du numéro 6.2. Le groupe $H(h)$ (resp. $G(g)$) opère dans \mathfrak{h} en fixant la forme linéaire h . Donc, les revêtements métaplectique $H(h)^{\mathfrak{h}}$ et $G(g)^{\mathfrak{h}}$ sont bien définis et on a :

$$H(h)^{\mathfrak{h}} = G(g)^{\mathfrak{h}}U.$$

En conséquence $R_g^{\mathfrak{h}}$, l'image réciproque de R_g dans $G(g)^{\mathfrak{h}}$, est un facteur réductif de $H(h)^{\mathfrak{h}}$.

Soient (x, φ) et (x, ψ) deux éléments de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ et $G(g)^{\mathfrak{h}}$ respectivement représentant x . On définit le scalaire $\varphi\psi^{-1}$ comme dans le lemme 7.2.1 . On pose, pour $\tau \in Y_G(g)$,

$$\tilde{\tau}(x, \psi) = \varphi\psi^{-1}\tau(x, \varphi). \tag{7.1}$$

$\tilde{\tau}(x, \psi)$ ne dépend pas du choix du couple (x, φ) , de plus, la formule (7.1) définit un élément de $Y_H(h)$.

On note $\mathfrak{q} = \ker(u)$ et $Q = \exp(\mathfrak{q})$. Alors, \mathfrak{q} est un idéal de \mathfrak{h} et Q est un sous-groupe unipotent normal dans H . On pose $G_1 = H/Q$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}/\mathfrak{q}$, et g_1 l'élément de \mathfrak{g}_1^* obtenu par passage au quotient de h . Avec ces notations, on a : $G_1(g_1) = H(h)/Q$ et $\mathfrak{g}_1(g_1) = \mathfrak{h}(h)/\mathfrak{q}$. De plus, comme $H(h)^{\mathfrak{q}_1} = H(h)^{\mathfrak{h}}$, on a $G_1(g_1)^{\mathfrak{q}_1} = H(h)^{\mathfrak{h}}/Q$, si bien que $R_g^{\mathfrak{h}}$ (resp. $\tilde{\tau}$) s'identifie canoniquement à un facteur réductif de $G_1(g_1)^{\mathfrak{q}_1}$ (resp. à un élément de $Y_{G_1}(g_1)$).

7.3.2 Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ de type unipotent et $\tau \in Y_G(g)$. On suppose que \mathfrak{g} contient un idéal abélien \mathfrak{u} , G -invariant, et contenu dans ${}^u\mathfrak{g}$. En reprenant les notations du paragraphe 7.3.1, on note $\pi_{h,\tilde{\tau}}$ (resp. $\pi_{g_1,\tilde{\tau}}$) la classe de représentations unitaires irréductibles de H (resp. G_1) associée à la donnée $(h, \tilde{\tau})$ (resp. $(g_1, \tilde{\tau})$) par la méthode des orbites de Kirillov-Duflo. On a :

$$\pi_{h,\tilde{\tau}} = \pi_{g_1,\tilde{\tau}} \circ p_1, \quad (7.2)$$

où p_1 est la projection canonique de H dans G_1 . L'élément de \widehat{G} associé à la donnée (g, τ) par la méthode des orbites de Kirillov-Duflo est alors

$$\pi_{g,\tau} = \text{Ind}_H^G \pi_{h,\tilde{\tau}}. \quad (7.3)$$

7.4 Dorénavant, on suppose que G est résoluble presque connexe et que p , la caractéristique résiduelle de k , est différente de 2. Soit $0 < \varepsilon < a_G$. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ de type unipotent et $\tau \in Y_G(g)$. Nous allons montrer qu'il existe une forme linéaire λ_τ sur $\mathfrak{g}(g)$ dont la restriction à ${}^u\mathfrak{g}(g)$ est égale à celle de g et telle que, si $X \in \mathfrak{g}(g)_{\varepsilon|n_F|p}$, on ait $\tau(\exp X) = \varsigma(\langle \lambda_\tau, X \rangle) \text{Id}$ (dans cette situation, nous dirons que λ_τ est associée à τ).

7.4.1 Soit R_g un facteur réductif de $G(g)$ d'algèbre de Lie \mathfrak{r}_g . On désigne par $R_g^{\mathfrak{g}}$ l'image réciproque de R_g dans $G(g)^{\mathfrak{g}}$. Comme $R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}} = \exp_{R_g^{\mathfrak{g}}}(\mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p})$ est un sous-groupe central de $R_g^{\mathfrak{g}}$ donc, d'après le lemme de Schur, il existe un caractère Ψ_τ de $R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}$ tel que $\tau|_{R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}} = \Psi_\tau \text{Id}$. Puisque $\exp_{R_g^{\mathfrak{g}}} : X \in \mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p} \mapsto \exp_{R_g^{\mathfrak{g}}}(X) \in R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}$ est un isomorphisme de groupes, on définit un caractère ψ_τ de $\mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p}$, en posant,

$$\psi_\tau(X) = \Psi_\tau(\exp_{R_g^{\mathfrak{g}}}(X)), \text{ pour tout } X \in \mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p}.$$

Il existe alors une forme linéaire λ_τ sur \mathfrak{r}_g vérifiant

$$\psi_\tau(X) = \varsigma(\langle \lambda_\tau, X \rangle), \text{ pour tout } X \in \mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p}. \quad (7.4)$$

En la prolongeant par $g|{}^u\mathfrak{g}(g)$ sur ${}^u\mathfrak{g}(g)$, on a :

$$\tau(\exp_{G(g)^{\mathfrak{g}}}(X)) = \varsigma(\langle \lambda_\tau, X \rangle) \text{Id}, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}(g)_{\varepsilon|n_F|p}. \quad (7.5)$$

Remarquons que λ_τ est définie modulo $(\mathfrak{g}(g)_{\varepsilon|n_F|p})^\perp$.

7.4.2 Soit \mathfrak{u} un idéal abélien de \mathfrak{g} , G -invariant, et contenu dans ${}^u\mathfrak{g}$. Avec les notations du paragraphe 7.3.1, \mathfrak{r}_g (resp. R_g) est un facteur réductif de $\mathfrak{h}(h)$ (resp. $H(h)$). De plus, $R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{h}}$ est un sous-groupe central de $R_g^{\mathfrak{h}}$ et $\exp_{R_g^{\mathfrak{h}}} : X \in \mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p} \mapsto \exp_{R_g^{\mathfrak{h}}}(X) \in R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{h}}$ est un isomorphisme de groupes. Pour $X \in \mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p}$, on pose $\exp_{R_g^{\mathfrak{h}}}(X) = (x_X, \psi_X)$ et $\exp_{R_g^{\mathfrak{g}}}(X) = (x'_X, \varphi_X)$. Il est évident que $x_X = x'_X$. Il résulte du lemme 7.2.1 que l'application $X \in \mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p} \mapsto \varphi_X \psi_X^{-1}$ est un morphisme de groupes de $\mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p}$ dans le groupe des racines huitième de l'unité. Mais $8\mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p} = \mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p}$ donc $\varphi_X \psi_X^{-1} = 1$, pour tout $X \in \mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p}$. Si bien que l'on a :

$$\tilde{\tau}(\exp_{R_g^{\mathfrak{h}}}(X)) = \varsigma(\langle \lambda_\tau, X \rangle) \text{Id}, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{r}_{g,\varepsilon|n_F|p}.$$

Ainsi, si on prolonge λ_τ en une forme linéaire sur $\mathfrak{h}(h)$ par $g|_{\mathfrak{u}}$ sur \mathfrak{u} alors λ_τ est associée à $\tilde{\tau}$.

8 Formule du caractère au voisinage des éléments semi-simples.

8.1 **Définition de la fonction $\phi_{g,\tau,s}$.** Les données et les notations sont celles des paragraphes 7.4, 6.1, et 6.2. Soit $s \in G$ semi-simple, $0 < \varepsilon < a_G$, et λ_τ une forme linéaire sur \mathfrak{r}_g vérifiant l'égalité (7.4), considérée comme un élément de $L(g)$, en la prolongeant par $g|_{{}^u\mathfrak{g}(g)}$ sur ${}^u\mathfrak{g}(g)$. On note $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s} = \mathcal{O}_{g,\lambda_\tau} \cap \mathfrak{g}^*(s)$, l'ensemble des points fixes de s dans $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau}$. On va définir une fonction $\phi_{g,\tau,s}$ sur $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$ comme suit : soit $l \in \mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$ et $x \in G$ tel que $l = x.f = f - g + x.g$. On a $G(l) = G(x.g)$ et $\beta_l = \beta_{x.g}$. L'application $\alpha : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g) \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(x.g)$, $X \mapsto x.X$, est un isomorphisme d'espaces symplectiques. Soit α_x l'isomorphisme de $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ sur $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(x.g))$ défini par $\alpha_x(y) = \alpha y \alpha^{-1}$. Alors, α_x se relève de manière unique en un isomorphisme de $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ sur $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(x.g))$, noté encore α_x . Maintenant, l'application $\tilde{\alpha}_x : G(g)^\mathfrak{g} \rightarrow G(x.g)^\mathfrak{g}$, $(y, m) \mapsto (xyx^{-1}, \alpha_x(m))$ est un isomorphisme de groupes. On pose ${}^x\tau = \tau \circ (\tilde{\alpha}_x)^{-1}$. La valeur de la fonction $\phi_{g,\tau,s}$ en l est donnée par :

$$\phi_{g,\tau,s}(l) = \text{Tr}({}^x\tau(\tilde{s})) \Phi_1(\rho_x(\tilde{s})) |\det(1 - s^{-1})_{(1-s)\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)}|_p^{-\frac{1}{2}}, \quad (8.1)$$

où \tilde{s} est un élément du revêtement métaplectique $G(x.g)^\mathfrak{g}$ représentant s et ρ_x est l'application canonique de $G(x.g)^\mathfrak{g}$ dans $Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(x.g))$. On vérifie que le membre de droite de (8.1) ne dépend ni du choix de $x \in G$ tel que $l = x.f$, ni du choix de l'élément \tilde{s} de $G(x.g)^\mathfrak{g}$ situé au-dessus de s . La fonction $\phi_{g,\tau,s}$ est $G(s)$ -invariante. Remarquons que si s est central alors la fonction $\phi_{g,\tau,s}$ est constante sur l'orbite $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s} = \mathcal{O}_{g,\lambda_\tau}$ et elle est égale à $\text{Tr}(\tau(s, \psi))\psi(\ell)$, où $(s, \psi) \in G(g)^\mathfrak{g}$ un relevé de s et ℓ est un lagrangien de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$. Remarquons aussi que si $x \in G$ alors $x.\lambda_\tau$ est associée à ${}^x\tau$ et on a :

$$\phi_{x.g,{}^x\tau,s} = \phi_{g,\tau,s}. \quad (8.2)$$

8.2 Dans cette section, on suppose que \mathfrak{g} contient un idéal abélien \mathfrak{u} , G -invariant, et contenu dans ${}^u\mathfrak{g}$. On reprend les données et les notations des numéros 7.3.1 et 8.1. On pose

$$G_{s,H} = \{x \in G / xsx^{-1} \in H\}.$$

On va démontrer le résultat suivant :

Proposition 8.2.1 *On suppose $s \in H$. Soient $x \in G_{s,H}$ et $l \in \mathcal{O}_{g,\lambda_\tau, xsx^{-1}}$ tels que $r(l) \in \mathcal{O}_{h,\lambda_\tau}$. Alors, on a :*

$$\phi_{g,\tau,s}(x^{-1}.l) = \phi_{h,\tilde{\tau},xsx^{-1}}(r(l)) \Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}}(xsx^{-1}) | \det(1 - (xsx^{-1})^{-1})_{(1-xsx^{-1})(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})} |_p^{-1}, \quad (8.3)$$

r étant l'application restriction de \mathfrak{g}^* à \mathfrak{h}^* .

Démonstration : Par transport de structure, on a :

$$\phi_{g,\tau,s}(x^{-1}.l) = \phi_{x.g,x\tau,xsx^{-1}}(l) = \phi_{g,\tau,xsx^{-1}}(l),$$

où la deuxième égalité résulte de la formule (8.2). Comme par hypothèse $r(l) \in \mathcal{O}_{h,\lambda_\tau}$ et comme $U.l = l + \mathfrak{h}^\perp$, il existe $y \in H$ tel que $l = y.f$. Posons $s' = xsx^{-1} \in H$ et soit V un supplémentaire s' -invariant de $\mathfrak{h}(r(l))/\mathfrak{g}(l)$ dans $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}(l)$. Alors V est un sous-espace symplectique de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l), \beta_l)$ et l'application $\alpha_V : V \rightarrow \mathfrak{h}/\mathfrak{h}(r(l)), X \bmod \mathfrak{g}(l) \mapsto X \bmod \mathfrak{h}(r(l))$, est un isomorphisme symplectique s' -equivariant. Décomposons $(1-s').V$ en somme directe orthogonale par rapport à sa structure symplectique en $W_1 \oplus W_2$ où W_1 (resp. W_2) est un sous-espace symplectique s' -invariant possédant un lagrangien ℓ_1 (resp. ℓ_2) tel que $\ell_1 = s'.\ell_1$ (resp. $(s'.\ell_2) \cap \ell_2 = 0$). D'autre part, écrivons $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l) = V \oplus V^\perp$. Alors V^\perp est un sous-espace symplectique de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$, s' -invariant et on vérifie que $\mathfrak{h}(r(l))/\mathfrak{g}(l)$ est un lagrangien, bien entendu, s' -invariant de V^\perp . La formule (7.1) donne

$$\psi(\alpha_V(\ell_0 + \ell_1 + \ell_2))^{y\tilde{\tau}(s'), \psi} = \varphi(\ell_0 + (\mathfrak{h}(r(l))/\mathfrak{g}(l)) + \ell_1 + \ell_2)^{y\tau(s'), \varphi},$$

où ℓ_0 est un lagrangien de $V(s')$. Il s'ensuit que l'on a :

$$\phi_{g,\tau,s'}(l) | \det(1 - s'^{-1})_{(1-s')\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)} |_p^{\frac{1}{2}} = \phi_{h,\tilde{\tau},s'}(r(l)) | \det(1 - s'^{-1})_{(1-s')\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(r(l))} |_p^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, les espaces $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}(r(l))/\mathfrak{g}(l)$ sont en dualité, s' -invariante, par β_l . Donc, $|\det s'_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|_p = |\det s'_{\mathfrak{h}(r(l))/\mathfrak{g}(l)}|_p^{-1}$ et $|\det(1-s')_{(1-s').(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})}|_p = |\det(1-s'^{-1})_{(1-s').(\mathfrak{h}(r(l))/\mathfrak{g}(l))}|_p$. Il en résulte que

$$|\det(1 - s'^{-1})_{(1-s')\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)} |_p^{\frac{1}{2}} = |\det(1 - s'^{-1})_{(1-s')\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(r(l))} |_p^{\frac{1}{2}} \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(s') | \det(1 - s'^{-1})_{(1-s')\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} |_p.$$

Si bien que l'on a $\phi_{g,\tau,s'}(l) = \phi_{h,\tilde{\tau},s'}(r(l)) \Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}}(s') | \det(1 - s'^{-1})_{(1-s')\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} |_p^{-1}$. ■

8.3 Choix de voisinages semi-simples. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n \leq \dim \mathfrak{g}$, on fixe :

- un espace symplectique (V_n, B_n) de dimension égale $2n$.
- des représentants $(T_i)_{i \in I_n}$ de l'ensemble des classes de conjugaison des tores maximaux de $Sp(V_n)$.
- $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ une base symplectique de (V_n, B_n) . On pose :

$$r_{n,+} = \mathcal{O}e_1 + \dots + \mathcal{O}e_n + \mathcal{O}f_1 + \dots + \mathcal{O}f_n, \quad r_{n,-} = \mathcal{O}e_1 + \dots + \mathcal{O}e_n + \mathcal{O}\varpi^{-1}f_1 + \dots + \mathcal{O}\varpi^{-1}f_n,$$

$$Sp(V_n)(r_{n,+}, -) = \{x \in Sp(V_n), x.r_{n,+} = r_{n,+} \text{ et } x.r_{n,-} = r_{n,-}\}.$$

On note

$$a_n = \sup\{0 < \varepsilon < a / \forall i \in I_n, \exists x \in Sp(V_n), T_{i,\varepsilon} \subset xSp(V_n)(r_{n,+}, -)x^{-1}\}.$$

On suppose que a vérifie les conditions de la proposition 3.1.3. On pose

$$\mathbf{a}_G = \inf_{n \leq \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}} \{a_n, a_G\}. \quad (8.4)$$

Soit $s \in G$, semi-simple. D'après la proposition 5.6.4, il existe $0 < \varepsilon(s) < \mathbf{a}_G$ tel que, pour tout (V, B) sous-espace symplectique, s -invariant, de ${}^u\mathfrak{g}$ et pour lequel $s|_V \in Sp(V, B)$, en notant $V_s = (1 - s).V$ et $s|_{V_s}$ un relèvement de $s|_V$ dans $Mp(V_s)$, on ait la formule (5.9). On note $a''_G(s) = \sup\{0 < \varepsilon(s) < \mathbf{a}_G\}$. Remarquons que si H est un sous-groupe presque algébrique de G contenant s alors $a''_H(s) \geq a''_G(s)$. S'il n'y a pas de confusion à craindre, on note $a''(s)$ le nombre réel $a''_G(s)$.

8.4 Fixons $0 < \varepsilon < \mathbf{a}_G$. Soit $s \in G$ semi-simple, $G(s)$ le centralisateur de s dans G , et $0 < \varepsilon(s) < \inf\{a'(s), a''(s), \varepsilon\}$ tel que l'application $\bar{\Psi} : G \times_{G(s)} G(s)_{\varepsilon(s)} \longrightarrow \mathcal{W}(s, \varepsilon(s))$, $[x, y] \longmapsto xsyx^{-1}$ soit un difféomorphisme. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ de type unipotent et $\tau \in Y_G(g)$. Si $\pi_{g,\tau}$ est admissible alors la restriction de $\Theta_{g,\tau}$ à $\mathcal{W}(s, \varepsilon(s))$ est une fonction généralisée G -invariante, on désigne par $\theta_{g,\tau,s}$ la fonction généralisée sur $G(s)_{\varepsilon(s)}$ qui lui est associée par le théorème 4.3.1.

Choisissons une forme linéaire λ_τ sur $\mathfrak{g}(g)$ vérifiant l'égalité (7.5). Alors $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$ est une sous-variété localement fermée, réunion finie de $G(s)$ -orbites co-adjointes. Si elle n'est pas vide, elle supporte une mesure positive canonique $d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}}$ dont la restriction à chaque $G(s)$ -orbite qu'elle contient est la mesure de Liouville de celle-ci. Lorsque $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$ est vide, nous conviendrons que $d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}}$ est la mesure nulle.

Soit $d_{G(s)}x$ et $d_{\mathfrak{g}(s)}X$ deux mesures de Haar sur $G(s)$ et $\mathfrak{g}(s)$ respectivement qui se correspondent.

Théorème 8.4.1 *On suppose que $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau}$ est fermée dans \mathfrak{g}^* . Alors, on a :*

$$\theta_{g,\tau,s}(\beta d_{G(s)}x) = \int_{\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}} (\beta \circ \exp d_{\mathfrak{g}(s)}X) \widehat{\mathfrak{g}(s)}(l) \phi_{g,\tau,s}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}}(l), \quad (8.5)$$

pour tout $\beta \in C_c^\infty(G(s)_{\varepsilon(s)})$.

Comme application de ce théorème, nous donnons dans la deuxième partie du présent travail, sous l'hypothèse supplémentaire que G est unimodulaire, une démonstration de la mesure de Plancherel pour G .

Remarque : $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau}$ est fermée dans \mathfrak{g}^* si et seulement si \mathcal{O}_g est fermée dans \mathfrak{g}^* .

8.5 En traitant à part le cas ${}^uG = \{1\}$, la démonstration du théorème 8.4.1 se fait par récurrence sur la dimension de G . Compte tenu du lemme suivant, il suffit d'une part de démontrer le théorème 8.4.1 dans le cas du numéro 9.1, c'est le cas du produit semi-direct d'un groupe de Heisenberg H par un groupe réductif agissant trivialement sur le centre de H , et d'autre part de démontrer dans le cas du numéro 9.2, que si le théorème 8.4.1 est vrai pour H alors il est vrai pour G . Soit l une forme linéaire sur \mathfrak{g} .

Lemme 8.5.1 *L'alternative suivante réunit tous les cas qui peuvent se présenter.*

- (1) *Le radical unipotent de \mathfrak{g} est ou bien nul, ou bien une algèbre de Heisenberg de dimension $2n+1$ ($n \geq 0$) avec centre, noté \mathfrak{z} , central dans \mathfrak{g} et la restriction de l à \mathfrak{z} est non nulle.*
- (2) *L'algèbre de Lie \mathfrak{g} contient un idéal abélien \mathfrak{u} , G -invariant et inclus dans le radical unipotent de \mathfrak{g} tel que, si on pose $u = l|_{\mathfrak{u}}$, on ait*

$$\dim(\mathfrak{g}(u)/\ker u) < \dim \mathfrak{g}.$$

8.6 Dans cette section, nous allons démontrer le théorème 8.4.1 dans le cas où ${}^uG = \{1\}$. Soit $0 < \varepsilon < a_G$. Soient τ une représentation unitaire irréductible de G et $\lambda_\tau \in \mathfrak{g}^*$ tel que l'on ait

$$\tau(\exp_G(X)) = \varsigma(\langle \lambda_\tau, X \rangle) \text{Id}, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}_{\varepsilon|n_F|p}.$$

On se donne également $s \in G$. On a :

$$\text{Tr } \tau(s \exp_G(X)) = \varsigma(\langle \lambda_\tau, X \rangle) \text{Tr } \tau(s), \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}_{\varepsilon|n_F|p}.$$

D'autre part, 0 est l'unique forme linéaire de type unipotent et l'orbite co-adjointe $\mathcal{O}_{0,\lambda_\tau}$ est réduite à $\{\lambda_\tau\}$ qui est fixé par s . De plus, $\phi_{0,\tau,s}(\lambda_\tau) = \text{Tr } \tau(s)$ et la mesure de Liouville $d\mu_{0,\lambda_\tau,s}$ sur $\mathcal{O}_{0,\lambda_\tau,s}$ est la mesure de Dirac en λ_τ . D'où le théorème dans ce cas.

9 Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème 8.4.1 au voisinage de l'élément neutre de G .

9.1 Dans cette section, on suppose que uG est un groupe de Heisenberg dont le centre est central dans G . On se donne un facteur réductif T de G . Alors, le centre \mathfrak{z} de ${}^u\mathfrak{g}$ est fixé par T . Par suite, \mathfrak{z} admet un supplémentaire V dans ${}^u\mathfrak{g}$, stable par T .

On fixe un vecteur non nul E de \mathfrak{z} . On définit une forme symplectique B sur V par la formule

$$[v, w] = B(v, w)E, \quad v, w \in V.$$

Le groupe uG s'identifie canoniquement au groupe de Heisenberg H associé à (V, B) .

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ de type unipotent tel que $g|_{\mathfrak{z}} \neq 0$. On note $a_0 = g(E)$. On définit une forme linéaire $E_{a_0}^*$ sur ${}^u\mathfrak{g} = V + kE$ par la formule suivante

$$E_{a_0}^*(E) = a_0, \quad E_{a_0}^*(V) = 0.$$

En la prolongeant par 0 sur \mathfrak{t} , l'algèbre de Lie de T , on obtient une forme linéaire sur \mathfrak{g} notée aussi $E_{a_0}^*$. Elle est de type unipotent et on a $G.g = G.E_{a_0}^*$. Si bien que l'on peut supposer que $g = E_{a_0}^*$.

Désignons par T^V l'extension métaplectique de T associé à son action dans (V, B) : c'est l'ensemble des couples (x, ψ) , où $x \in T$ et ψ est une fonction sur les lagrangiens de V , tels que, notant \bar{x} l'image de x dans $Sp(V)$, on ait $(\bar{x}, \psi) \in Mp(V)$. Le morphisme de groupes de T^V dans $Mp(V)$ qui à (x, ψ) associe (\bar{x}, ψ) est noté η_T^V . On a une projection naturelle de T^V sur T , qui au couple (x, ψ) de T^V fait correspondre x de T . Le noyau de cette projection est constitué de deux éléments qui sont centraux dans T^V dont on note $(1, -1)$ l'élément non trivial.

Soit $\tau \in (T^V)^\wedge$ telle que $\tau(1, -1) = -\text{Id}$ et soit $\pi_{E_{a_0}^*, \tau}$ la classe de représentations unitaires irréductibles de G associée à $(E_{a_0}^*, \tau)$: notons $\pi_{E_{a_0}^*}$ la classe de représentations unitaires irréductibles de uG associée à $E_{a_0}^*$ par la méthode des orbites de Kirillov et $S_{E_{a_0}^*}$ la représentation métaplectique associée au caractère ς_{a_0} , réalisée dans l'espace de $\pi_{E_{a_0}^*}$. On a :

$$\pi_{E_{a_0}^*, \tau} = \tau \otimes S_{E_{a_0}^*} \pi_{E_{a_0}^*},$$

où $\tau \otimes S_{E_{a_0}^*} \pi_{E_{a_0}^*}(x.y) = \tau(\hat{x}) \otimes S_{E_{a_0}^*}(\eta_T^V(\hat{x}))\pi_{E_{a_0}^*}(y)$, $x \in T$, $y \in {}^uG$, \hat{x} étant un relèvement de x dans T^V .

9.1.1 Considérons la décomposition, T -invariante, $V = V_1 \oplus V_2$, où V_1 est le sous-espace symplectique

$$V_1 = \{v \in V / adX.v = 0, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{t}\}$$

et V_2 son orthogonal par rapport à B . Notons

$$\mathfrak{h}_i = V_i + kE, \quad H_i = \exp(\mathfrak{h}_i), \quad E_i^* = E_{a_0|_{\mathfrak{h}_i}}, \quad i = 1, 2.$$

Soient $\pi_{E_i^*}$ la classe de représentations unitaires irréductibles de H_i associée à E_i^* par la méthode des orbites de Kirillov et $S_{E_i^*}$ la représentation métaplectique correspondante de $Mp(V_i)$.

L'application $(y_1, y_2) \mapsto y_1 y_2$ de $H_1 \times H_2$ dans $H = {}^uG$ est un homomorphisme surjectif de groupes de Lie de noyau égale à $\Delta = \{(z, z^{-1}), z \in Z\}$, avec $Z = \exp(\mathfrak{z})$.

La représentation $\pi_{E_1^*} \otimes \pi_{E_2^*}$ de $H_1 \times H_2$ est unitaire irréductible dont la restriction à Δ est triviale. Elle passe au quotient en une représentation unitaire irréductible de H équivalente à $\pi_{E_{a_0}^*}$. Si x est un élément de $Sp(V)$ qui laisse invariant V_i et ϕ (resp. ϕ_i) une fonction sur les lagrangiens de V (resp. V_i) telle que $(x, \phi) \in Mp(V)$ (resp. $(x|_{V_i}, \phi_i) \in Mp(V_i)$), on note $\phi\phi_1^{-1}\phi_2^{-1}$ le nombre $\phi(\ell_1 + \ell_2)\phi_1(\ell_1)^{-1}\phi_2(\ell_2)^{-1}$, où ℓ_i est un lagrangien de V_i , $i = 1, 2$. On a :

$$S_{E_{a_0}^*}(x, \phi) = \phi\phi_1^{-1}\phi_2^{-1}S_{E_1^*}(x|_{V_1}, \phi_1) \otimes S_{E_2^*}(x|_{V_2}, \phi_2).$$

Désignons par T^{V_i} le revêtement métaplectique au dessus de T par rapport à (V_i, B) et par $\eta_T^{V_i}$ l'application canonique de T^{V_i} dans $Mp(V_i)$. On définit une représentation (unitaire irréductible) $\tilde{\tau}$ de $(T^{V_1})^{V_2}$ par la formule

$$\tilde{\tau}(x, \phi_1, \phi_2) = \phi\phi_1^{-1}\phi_2^{-1}\tau(x, \phi).$$

Fixons $0 < \varepsilon < \mathbf{a}_G$. On a,

$$S_{E_1^*}(\eta_T^{V_1}(\tilde{x})) = \text{Id}, \text{ pour tout } \tilde{x} \in T_\varepsilon^{V_1}.$$

Rappelons que T_ε (resp. T_ε^V) est un sous-groupe compact ouvert, central, de T (resp. T^V). D'après le lemme de Schur, il existe un caractère Ψ_τ de T_ε^V vérifiant

$$\tau|_{T_\varepsilon^V} = \Psi_\tau \text{Id}_{\mathcal{H}_\tau},$$

\mathcal{H}_τ étant l'espace de τ . On définit, par la suite, un caractère ψ_τ de $\mathfrak{t}_{\varepsilon|n_F|p}$, en posant,

$$\psi_\tau(X) = \Psi_\tau \circ \exp_{T^V}(X), \quad X \in \mathfrak{t}_{\varepsilon|n_F|p}.$$

Soit $\lambda_\tau \in \mathfrak{t}^*$ telle que

$$\psi_\tau(X) = \varsigma(\langle \lambda_\tau, X \rangle), \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{t}_{\varepsilon|n_F|p}.$$

Pour $X \in \mathfrak{t}_{\varepsilon|n_F|p}$, on pose

$$\exp_{T^V}(X) = (x_X, \varphi_X), \quad \exp_{T^{V_1}}(X) = (x_X, \varphi_{1,X}), \quad \exp_{T^{V_2}}(X) = (x_X, \varphi_{2,X}).$$

Comme $p \neq 2$, on a $\varphi_X \varphi_{1,X}^{-1} \varphi_{2,X}^{-1} = 1$. Il s'en suit que l'on a :

$$\tilde{\tau}(\exp_{(T^{V_1})^{V_2}}(X)) = \varsigma(\langle \lambda_\tau, X \rangle) \text{Id}_{\mathcal{H}_\tau}, \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{t}_{\varepsilon|n_F|p}.$$

On considère alors la forme linéaire f sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{h}$ définie par :

$$f|_{\mathfrak{h}} = E_{a_0}^*, \quad f|_{\mathfrak{t}} = \lambda_\tau.$$

Si bien que l'on a :

$$\mathcal{O}_{E_{a_0}^*, \lambda_\tau} = G.f.$$

On munit V_i de la mesure de Haar $d_{V_i}v$ autoduale, relativement à ς , et V de la mesure de Haar produit $d_Vu = d_{V_1}v d_{V_2}w$. Alors d_Vu est la mesure de Haar autoduale, relativement

à ς , sur V . On fixe une mesure de Haar $d_T x$ sur T . On munit G de la mesure de Haar $d_G x = d_T x d_V v d\mu(t)$. La mesure de Haar sur \mathfrak{g} tangente à $d_G x$ est donnée par $d_{\mathfrak{g}} X = d_t X d_V v d\mu(t)$, où $d_t X$ est la mesure de Haar sur \mathfrak{t} tangente à $d_T x$. Il s'agit de démontrer la formule suivante : pour tout $\alpha \in C_c^\infty(G_\varepsilon)$,

$$\Theta_{E_{a_0}^*, \tau}(\alpha d_G x) = \dim \tau \int_{\mathcal{O}_{E_{a_0}^*, \lambda\tau}} (\alpha \circ \exp_G d_{\mathfrak{g}} X)_{\widehat{\mathfrak{g}}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{E_{a_0}^*, \lambda\tau}}(l). \quad (9.1)$$

Comme l'application $V_1 \times T_\varepsilon H_2 \longrightarrow G_\varepsilon$, $(v, x) \longmapsto x \exp(v)$ est un difféomorphisme, il suffit de montrer la formule (9.1) dans le cas où

$$\alpha = \alpha_1 \otimes \varphi, \quad \alpha_1 \in C_c^\infty(V_1), \quad \varphi \in C_c^\infty(T_\varepsilon H_2).$$

9.1.2 On désigne par

$$G_2 = T H_2, \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{t} + \mathfrak{h}_2, \quad d_{G_2} x = d_T x d_{V_2} v d\mu(t),$$

et $d_{\mathfrak{g}_2} X$ la mesure de Haar sur \mathfrak{g}_2 tangente à $d_{G_2} x$. On a :

$$(\alpha \circ \widehat{\exp_G d_{\mathfrak{g}} X})_{\mathfrak{g}} = (\alpha_1 \widehat{d_{V_1} v})_{V_1} \otimes (\varphi \circ \widehat{\exp_{G_2} d_{\mathfrak{g}_2} X})_{\mathfrak{g}_2}.$$

Donc

$$\int_{\mathcal{O}_{E_{a_0}^*, \lambda\tau}} (\alpha \circ \exp_G d_{\mathfrak{g}} X)_{\widehat{\mathfrak{g}}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{E_{a_0}^*, \lambda\tau}}(l) = |a_0|_p^{-\frac{\dim V_1}{2}} \alpha_1(0) I,$$

où

$$I = |a_0|_p^{\frac{\dim V_2}{2}} \int_{V_2} (\varphi \circ \exp_{G_2} d_{\mathfrak{g}_2} X)_{\widehat{\mathfrak{g}_2}}(\exp v \cdot f|_{\mathfrak{g}_2}) d_{V_2} v.$$

De plus, on a, pour tout $v \in V_2$,

$$\exp v \cdot f|_{\mathfrak{g}_2} = f|_{\mathfrak{g}_2} - a_0 \tilde{B}_2(v) + \frac{1}{2} a_0 l_v,$$

où $\tilde{B}_2(v)$ (resp. l_v) est la forme linéaire sur \mathfrak{g}_2 définie par : $\tilde{B}_2(v)(X + w + tE) = B(v, w)$, $X \in \mathfrak{t}$, $w \in V_2$, $t \in k$ (resp. $l_v(X + w + tE) = B(adX.v, v)$).

9.1.3 On a :

$$\begin{aligned} \pi_{E_{a_0}^*, \tau}(\alpha_1 \otimes \varphi d_G x) &= \int_{\mathfrak{t}_{\varepsilon|_{n_F|p}}} \tilde{\tau}(\exp_{(T^{V_1})^{V_2}}(X)) \otimes \int_{V_1} \alpha_1(\exp(v)) \pi_{E_1^*}(\exp(v)) d_{V_1} v \\ &\quad \otimes \int_{H_2} \varphi(\exp_T(X)y) S_{E_2^*}(\eta_T^{V_2}(\exp_{T^{V_2}}(X))) \pi_{E_2^*}(y) d_{H_2} y d_t X. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\mathrm{Tr} \left(\int_{V_1} \alpha_1(\exp(v)) \pi_{E_1^*}(\exp(v)) d_{V_1} v \right) = |a_0|_p^{-\frac{\dim V_1}{2}} \alpha_1(0).$$

Il reste à calculer la trace de l'opérateur $\mathcal{I}_{E_2^*, \tilde{\tau}}(\varphi d_{G_2} x)$ donné par :

$$\int_{t_{\varepsilon|n_F|p}} \tilde{\tau}(\exp_{(TV_1)V_2}(X)) \otimes \int_{H_2} \varphi(\exp_T(X)y) S_{E_2^*}(\eta_T^{V_2}(\exp_{TV_2}(X))) \pi_{E_2^*}(y) d_{H_2} y d_t X.$$

Pour cela, nous allons introduire le modèle latticiel pour la réalisation de $\pi_{E_2^*}$.

9.1.4 Soit r un réseau de V_2 , autodual relativement à ς_{a_0} , c'est-à-dire que

$$r = r^\perp := \{v \in V_2 \text{ tel que } \varsigma_{a_0}(B(v, r)) = 1\} = \{v \in V_2 \text{ tel que } B(v, r) \in a_0^{-1}\mathcal{O}\}.$$

On choisit r de la manière suivante : on note $2m = \dim V_2$. On fixe une base symplectique $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m)$ de V_2 . On pose

$$r_+ = \mathcal{O}e_1 + \dots + \mathcal{O}e_m + \mathcal{O}f_1 + \dots + \mathcal{O}f_m \text{ et } r_- = \mathcal{O}e_1 + \dots + \mathcal{O}e_m + \mathcal{O}\varpi^{-1}f_1 + \dots + \mathcal{O}\varpi^{-1}f_m.$$

Alors,

$$r = \begin{cases} \varpi^{-\frac{v(a_0)}{2}} r_+, & \text{si } v(a_0) \text{ est impair} \\ \varpi^{-\frac{v(a_0)-1}{2}} r_-, & \text{si } v(a_0) \text{ est pair} \end{cases}.$$

On désigne par $R = \exp(r + kE)$. C'est un sous-groupe fermé de H_2 dont l'image dans $H_2/\exp(a_0^{-1}\mathcal{O}E)$ est un sous-groupe abélien maximal. On définit un caractère χ_R de R par la formule :

$$\chi_R(\exp(\gamma + tE)) = \varsigma_{a_0}(t), \text{ pour tout } \gamma \in r, t \in k.$$

D'après [30], la représentation induite $\text{Ind}_R^{H_2} \chi_R$ est unitaire irréductible, on la note π_R . On désigne par $d_r \gamma$ la mesure de Haar sur r , restriction de la mesure de Haar $d_{V_2} v$ sur V_2 , et par $d_{V_2/r} \dot{v}$ la mesure de Haar quotient sur V_2/r . Alors π_R agit dans l'espace \mathcal{H}_r des fonctions φ de V_2 à valeurs dans \mathbb{C} vérifiant :

$$\varphi(v + m) = \varsigma_{a_0}\left(\frac{1}{2}B(v, m)\right)\varphi(v), \text{ pour } v \in V_2, m \in r, \text{ et } \int_{V_2/r} |\varphi(v)|_p^2 d_{V_2/r} \dot{v} < \infty,$$

par la formule

$$(\pi_R(w, t)\varphi)(v) = \varsigma_{a_0}\left(t - \frac{1}{2}B(v, w)\right)\varphi(v - w), \text{ pour tout } v, w \in V_2, t \in k. \quad (9.2)$$

Comme le caractère central de π_R est ς_{a_0} donc, d'après le théorème de Stone-Von Neumann, les deux représentations $\pi_{E_2^*}$ et π_R de H_2 sont équivalentes ; si bien que la représentation métaplectique $S_{E_2^*}$ peut être réalisée dans l'espace \mathcal{H}_r de π_R . On note S_R cette réalisation. On pose

$$Sp(V_2)(r_{+,-}) = Sp(V_2)(r_+) \cap Sp(V_2)(r_-) \text{ et } Mp(V_2)(r_{+,-}) = p_{V_2}^{-1}(Sp(V_2)(r_{+,-})),$$

où p_{V_2} est la projection canonique de $Mp(V_2)$ dans $Sp(V_2)$. Alors $Sp(V_2)(r_{+,-})$ (resp. $Mp(V_2)(r_{+,-})$) est un sous-groupe compact ouvert de $Sp(V_2)$ (resp. $Mp(V_2)$). Pour tout $x \in Sp(V_2)(r_{+,-})$, on considère l'opérateur $\sigma_R(x)$ agissant dans \mathcal{H}_r :

$$\sigma_R(x)\varphi(v) = \varphi(x^{-1}.v), \varphi \in \mathcal{H}_r, v \in V_2. \quad (9.3)$$

Alors, on a :

$$\sigma_R(x)\pi_R(y)\sigma_R(x)^{-1} = \pi_R(x(y)), \text{ pour tout } y \in H_2. \quad (9.4)$$

De plus, $\sigma_R(x)$ est un opérateur unitaire de \mathcal{H}_r . Il en résulte que la formule (9.3) définit une représentation unitaire de $Sp(V_2)(r_{+,-})$, vérifiant l'égalité (9.4). Si bien qu'il existe un caractère unitaire τ_R de $Mp(V_2)(r_{+,-})$ vérifiant

$$S_R(\tilde{x}) = \tau_R(\tilde{x})\sigma_R(x), \text{ pour tout } \tilde{x} \in Mp(V_2)(r_{+,-}).$$

D'après ([30], Lemme II.10), on a : $\tau_R(\tilde{x}) = \pm 1$, pour tout $\tilde{x} \in Mp(V_2)(r_{+,-})$.

9.1.5 Soit $\varphi \in C_c^\infty(T_\varepsilon H_2)$. On a :

$$\text{Tr}(\mathcal{I}_{E_2^*, \tilde{\tau}}(\varphi d_{G_2} x)) = \text{Tr} \left(\int_{\mathfrak{t}_{\varepsilon|n_F|p}} \tilde{\tau}(\exp_{(TV_1)V_2}(X)) \otimes \mathcal{T}_\varphi(\exp_{TV_2}(X)) d_t X \right),$$

où $\mathcal{T}_\varphi(\exp_{TV_2}(X))$ est l'opérateur de rang fini, agissant dans \mathcal{H}_r ,

$$\mathcal{T}_\varphi(\exp_{TV_2}(X)) = \int_{H_2} \varphi(\exp_T(X)y) S_R(\eta_T^{V_2}(\exp_{TV_2}(X))) \pi_R(y) d_{H_2} y.$$

Soit $X \in \mathfrak{t}_{\varepsilon|n_F|p}$, on pose $x = \exp_T(X)$, $\tilde{x} = \exp_{TV_2}(X)$, et $\varphi_x(y) = \varphi(xy)$, $y \in H_2$.

On note T_2 l'image de T dans $Sp(V_2)$ par la représentation adjointe. Pour une base symplectique convenable $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_m)$ de V_2 et en vertu des conditions imposées sur \mathfrak{a}_G (Condition (8.4)), on a :

$$T_{2,\varepsilon} \subset Sp(V_2)(r_{+,-}).$$

Si bien que l'on a :

$$S_R(\eta_T^{V_2}(\tilde{x})) = \sigma_R(x|_{V_2}).$$

Maintenant, on a, pour tout $\alpha \in \mathcal{H}_r$,

$$\mathcal{T}_\varphi(\tilde{x})\alpha(v) = \int_{V_2/r} A_\varphi(v, w)\alpha(w) d_{V_2/r} \dot{w},$$

où $A_\varphi(v, w) = \int_{r \times k} \varphi_x((x^{-1}.v - (w + \gamma), t)) \zeta_{a_0}(t - \frac{1}{2}B(w + \gamma, x^{-1}.v - \gamma)) d_r \gamma d\mu(t)$, pour tout $v, w \in V_2$. Autrement dit, $\mathcal{T}_\varphi(\tilde{x})$ est un opérateur à noyau (égal à A_φ). D'après le théorème de Mercer, on a :

$$\text{Tr}(\mathcal{T}_\varphi(\tilde{x})) = \int_{V_2/r} A_\varphi(v, v) d_{V_2/r} \dot{v}.$$

Comme $A_\varphi(v + \gamma, v + \gamma) = A_\varphi(v, v)$, pour tout $v \in V_2$ et $\gamma \in r$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{T}_\varphi(\tilde{x})) &= |a_0|_p^{\frac{\dim V_2}{2}} \int_{V_2} A_\varphi(v, v) d_{V_2} v \\ &= |a_0|_p^{\frac{\dim V_2}{2}} \int_{V_2} \int_{r \times k} \varphi_x((x^{-1} - 1) \cdot v - \gamma, t) \\ &\quad \times \varsigma_{a_0}(t - \frac{1}{2} B(v + \gamma, x^{-1} \cdot v - \gamma)) d\mu(t) d_r \gamma d_{V_2} v. \end{aligned}$$

On suppose, désormais, que $\det(1 - x)_{V_2} \neq 0$. On pose

$$q_{\pm x} = \frac{1 + \pm x_{V_2}}{2} (1 - \pm x_{V_2})^{-1}$$

et on désigne par $Q_{\pm x}$ la forme quadratique sur V_2 définie par

$$Q_{\pm x}(v) = B(q_{\pm x} v, v), \quad v \in V_2.$$

Alors, d'après ([28], Lemme 39.2.2), on a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{T}_\varphi(\tilde{x})) &= |a_0|_p^{\frac{\dim V_2}{2}} |\det(1 - x)_{V_2}|_p^{-1} \left\{ \int_r \varsigma_{a_0}(\frac{1}{2} Q_x(\gamma)) d_r \gamma \right\} \times \\ &\quad \times \int_{V_2 \times k} \varphi_x(v, t) \varsigma_{a_0}(t - \frac{1}{2} Q_x(v)) d\mu(t) d_{V_2} v. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1+x_{V_2}}{2} r \subset r$ et $|\det(\frac{1+x_{V_2}}{2})_{V_2}|_p = 1$ donc $\frac{1+x_{V_2}}{2} r = r$. Il s'en suit que

$$\varsigma_{a_0} \left(\frac{1}{2} B \left((1 - x_{V_2}) \left(\frac{1 + x_{V_2}}{2} \right)^{-1} v, v \right) \right) = 1, \quad \text{pour tout } v \in r.$$

En utilisant les résultats de ([28], Section 39.2.3), on a :

$$|a_0|_p^{\frac{\dim V_2}{2}} \int_r \varsigma_{a_0}(\frac{1}{2} Q_x(\gamma)) d_r \gamma = |\det(1 - x)_{V_2}|_p^{\frac{1}{2}} \overline{\gamma(a_0 Q_{-x})}.$$

On note $u = \frac{-1+x_{V_2}}{\log(x_{V_2})} (\frac{1+x_{V_2}}{2})^{-1}$. Si $\lambda \in \bar{k}$ est une valeur propre de x_{V_2} alors

$$\left| \frac{-1 + \lambda}{\log(\lambda)} \left(\frac{1 + \lambda}{2} \right)^{-1} - 1 \right|_{\bar{k}} < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que $u \in GL(V_2)_\varepsilon$. Ainsi, u possède une racine carrée qui commute avec $\log(x_{V_2})$, à savoir

$$u^{\frac{1}{2}} = \exp_{GL(V_2)}(\frac{1}{2} \log(u)).$$

Maintenant, par un calcul élémentaire ([28], Paragraphes 39.2.5 et 39.2.6), on obtient :

$$\text{Tr}(\mathcal{T}_\varphi(\tilde{x})) = |a_0|_p^{\frac{\dim V_2}{2}} C_\varphi^{V_2}(X),$$

où

$$C_\varphi^{V_2}(X) = \int_{V_2} \int_{V_2 \times k} (\varphi \circ \exp_{G_2})(X + w + tE) \zeta_{a_0}(t + B(w, v) + \frac{1}{2}B(X.v, v)) d\mu(t) d_{V_2} w d_{V_2} v.$$

Comme $\{x \in T_\varepsilon, \det(1-x)_{V_2} \neq 0\}$ est un ouvert de T_ε et $T_\varepsilon \setminus \{x \in T_\varepsilon, \det(1-x)_{V_2} \neq 0\}$ est de mesure nulle par rapport à la mesure de Haar $d_T x$ sur T , on a :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{I}_{E_2^*, \tilde{\tau}}(\varphi d_{G_2} x)) &= |a_0|_p^{\frac{\dim V_2}{2}} \int_{\mathfrak{t}_{\varepsilon|n_F|p}} \text{Tr}(\tilde{\tau}(\exp_{(TV_1)_{V_2}}(X))) C_\varphi^{V_2}(X) d_{\mathfrak{t}} X \\ &= \dim \tau |a_0|_p^{\frac{\dim V_2}{2}} \int_{\mathfrak{t}_{\varepsilon|n_F|p}} \zeta(\langle \lambda_\tau, X \rangle) C_\varphi^{V_2}(X) d_{\mathfrak{t}} X \\ &= \dim \tau \int_{\mathcal{O}_{E_2^*, \lambda_\tau}} (\varphi \circ \exp_{G_2} d_{\mathfrak{g}_2} X) \widehat{\zeta}_{\mathfrak{g}_2}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{E_2^*, \lambda_\tau}}(l) \\ &= (\dim \tau) I. \end{aligned}$$

9.2 Dans cette section, on se donne un idéal abélien \mathfrak{u} , G -invariant, non nul et inclus dans ${}^u \mathfrak{g}$. On reprend les notations des numéros 7.3.1 et 7.3.2. Fixons $0 < \varepsilon < \mathfrak{a}_G$. Soit $\lambda_\tau \in \mathfrak{g}(g)^*$ associé à τ . D'après les résultats du paragraphe 7.4, le prolongement, noté de même, de λ_τ en une forme linéaire sur $\mathfrak{h}(h)$ par $g|_{\mathfrak{u}}$ sur \mathfrak{u} , est associé à $\tilde{\tau}$. Remarquons que si $\mathcal{O}_{g, \lambda_\tau}$ est fermée dans \mathfrak{g}^* alors $\mathcal{O}_{h, \lambda_\tau}$ (resp. $\mathcal{O}_{g_1, \lambda_\tau}$) est fermée dans \mathfrak{h}^* (resp. \mathfrak{g}_1^*).

Proposition 9.2.1 *On suppose que $\mathcal{O}_{g, \lambda_\tau}$ est fermée dans \mathfrak{g}^* . Si le théorème 8.4.1 est vrai pour $(G_1, g_1, \tilde{\tau}, \lambda_\tau, \varepsilon)$ alors il est vrai pour $(G, g, \tau, \lambda_\tau, \varepsilon)$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in C_c^\infty(G_\varepsilon)$. Alors, $\pi_{g, \tau}(\varphi d_G x)$ est un opérateur à noyau continu K_φ , défini par

$$K_\varphi(x, y) = \Delta_G(y)^{-1} \int_H \varphi(xzy^{-1}) \Delta_{H, G}(z)^{-\frac{1}{2}} \pi_{h, \tilde{\tau}}(z) d_H z,$$

$d_H z$ étant une mesure de Haar sur H (voir [1], Chapitre V). Pour $x \in G$, on désigne par φ_H^x la fonction sur H définie par

$$\varphi_H^x(y) = \varphi(xy x^{-1}), y \in H.$$

Alors, $\varphi_H^x \in C_c^\infty(H)$ et on a :

$$\text{support}(\varphi_H^x) \subset G_\varepsilon \cap H = H_\varepsilon.$$

Puisque $(\Delta_{H, G})|_{H_\varepsilon} = 1$, on a :

$$K_\varphi(x, x) = \Delta_G(x)^{-1} \pi_{h, \tilde{\tau}}(\varphi_H^x d_H z).$$

Choisissons une mesure de Haar d_Qx sur Q , notons d_qX la mesure de Haar sur \mathfrak{q} tangente à d_Qx et posons,

$$\varphi_{G_1}^x(y) = \int_Q \varphi^x(yz)d_Qz = \int_{\mathfrak{q}} \varphi^x(y \exp(X))d_qX, \quad y \in G_1.$$

Alors, $\varphi_{G_1}^x \in C_c^\infty(G_1)$, $\text{support}(\varphi_{G_1}^x) \subset H_\varepsilon/Q =: G_{1,\varepsilon}$, et on a :

$$K_\varphi(x, x) = \Delta_G(x)^{-1} \pi_{g_1, \tilde{\tau}}(\varphi_{G_1}^x d_{G_1}z),$$

$d_{G_1}z$ étant la mesure de Haar sur G_1 , quotient de d_Hx par d_Qx .

Maintenant, on suppose que $\mathcal{O}_{g, \lambda_\tau}$ est fermée dans \mathfrak{g}^* . Alors, \mathcal{O}_g est fermée dans \mathfrak{g}^* et d'après ([28], Théorème 37), $\pi_{g, \tau}$ est admissible. Il en résulte que l'on a :

$$\Theta_{g, \tau}(\varphi d_Gx) = \int_{G/H} \text{Tr}K_\varphi(x, x)d_{G/H}\dot{x}.$$

Supposons que le théorème 8.4.1 est vrai pour $(G_1, g_1, \tilde{\tau}, \lambda_\tau, \varepsilon)$. Alors, pour tout $x \in G$, on a :

$$\text{Tr}K_\varphi(x, x) = \Delta_G(x)^{-1} \dim \tau \int_{\mathcal{O}_{g_1, \lambda_\tau}} (\varphi_{G_1}^x \circ \exp_{G_1} d_{\mathfrak{g}_1}X) \widehat{\mathfrak{g}_1}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g_1, \lambda_\tau}}(l), \quad (9.5)$$

où $d_{\mathfrak{g}_1}X = d_{\mathfrak{h}}X/d_{\mathfrak{q}}X$ et $d_{\mathfrak{h}}X$ est la mesure de Haar sur \mathfrak{h} tangente à d_Hz . Etant donné que $\mathcal{O}_{h, \lambda_\tau}$ est contenu dans \mathfrak{q}^\perp , elle s'identifie canoniquement à l'orbite co-adjointe $\mathcal{O}_{g_1, \lambda_\tau}$. On a, pour tout $l \in \mathcal{O}_{h, \lambda_\tau}$,

$$\begin{aligned} (\varphi_{G_1}^x \circ \exp_{G_1} d_{\mathfrak{g}_1}X) \widehat{\mathfrak{g}_1}(l) &= \int_{\mathfrak{g}_1} (\varphi_{G_1}^x \circ \exp_{G_1})(X) \zeta(\langle l, X \rangle) d_{\mathfrak{g}_1}X \\ &= \int_{\mathfrak{g}_1} \left\{ \int_{\mathfrak{q}} \varphi^x(\exp_H(X) \exp_H(Y)) d_{\mathfrak{q}}Y \right\} \zeta(\langle l, X \rangle) d_{\mathfrak{g}_1}X \\ &= \int_{\mathfrak{g}_1} \int_{\mathfrak{q}} \varphi^x(\exp_H(X) \exp_H(\frac{e^{adX} - 1}{adX}.Y)) d_{\mathfrak{q}}Y \\ &\quad \times \zeta(\langle l, X \rangle) d_{\mathfrak{g}_1}X. \end{aligned}$$

Cependant, pour tout $X \in \mathfrak{h}_{\varepsilon|n_F|p}$, $Y \in \mathfrak{q}$, on a, en réarrangeant convenablement les termes dans la formule de Campbell Hausdorff,

$$\exp_H(X) \exp_H(\frac{e^{adX} - 1}{adX}.Y) = \exp_H(X + Y). \quad (9.6)$$

Si bien que l'on a :

$$\begin{aligned}
(\varphi_{G_1}^x \circ \exp_{G_1} d_{\mathfrak{g}_1} X)_{\mathfrak{g}_1} \widehat{\ } (l) &= \int_{\mathfrak{h}} (\varphi^x \circ \exp_H)(X) \zeta(\langle l, X \rangle) d_{\mathfrak{h}} X \\
&= \int_{\mathfrak{h}^\perp} (\varphi^x \circ \exp_G d_{\mathfrak{g}} X)_{\mathfrak{g}} \widehat{\ } (\tilde{l} + t) d_{\mathfrak{h}^\perp} t \\
&= |\det \text{Ad} x_{\mathfrak{g}}|_p^{-1} \int_{\mathfrak{h}^\perp} (\varphi \circ \exp_G d_{\mathfrak{g}} X)_{\mathfrak{g}} \widehat{\ } (x.(\tilde{l} + t)) d_{\mathfrak{h}^\perp} t,
\end{aligned}$$

où $d_{\mathfrak{h}^\perp} t$ est la mesure de Haar sur \mathfrak{h}^\perp duale de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{g}} X / d_{\mathfrak{h}} X$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et \tilde{l} est un élément de \mathfrak{g}^* dont la restriction à \mathfrak{h} est l .

Il résulte de ce qui précède que l'on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{G/H} \text{Tr} K_\varphi(x, x) d_{G/H} \dot{x} \\
&= \dim \tau \int_{G/H} \int_{\mathcal{O}_{\mathfrak{h}, \lambda_\tau}} \int_{\mathfrak{h}^\perp} (\varphi \circ \exp_G d_{\mathfrak{g}} X)_{\mathfrak{g}} \widehat{\ } (x.(\tilde{l} + t)) d_{\mathfrak{h}^\perp} t d\mu_{\mathcal{O}_{\mathfrak{h}, \lambda_\tau}}(l) d_{G/H} \dot{x} \\
&= \dim \tau \int_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}, \lambda_\tau}} (\varphi \circ \exp_G d_{\mathfrak{g}} X)_{\mathfrak{g}} \widehat{\ } (l) d\mu_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}, \lambda_\tau}}(l),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de la proposition 6.2.1. ■

10 Dans ce paragraphe, nous donnons une démonstration du théorème 8.4.1 au voisinage d'un élément semi-simple s de G .

10.1 La démonstration du théorème 8.4.1 dans le premier cas de l'alternative du lemme 8.5.1 Le cas où ${}^u G$ est trivial a été traité dans la section 8.6. Il reste à montrer le théorème 8.4.1 dans les conditions du paragraphe 9.1.

10.1.1 On se place dans les conditions du paragraphe 9.1. Soit s un élément semi-simple de G . On peut supposer sans restriction que $s \in T$. On pose :

$$V_{1,s} = V(s), V_{2,s} = (1-s)V, \mathfrak{h}_{i,s} = V_{i,s} + kE, H_{i,s} = \exp(V_{i,s} + kE), E_{i,s}^* = E_{a_0|_{\mathfrak{h}_{i,s}}}^*,$$

$i = 1, 2$. On se donne un lagrangien ℓ_i de $V_{i,s}$, $i = 1, 2$. Alors $\mathfrak{l}_i = \ell_i \oplus kE$ est une polarisation en $E_{i,s}^*$. On considère $(\pi_{E_{i,s}^*}, \mathcal{H}_i)$ la représentation unitaire irréductible de $H_{i,s}$ associée à $E_{i,s}^*$ par la méthode des orbites de Kirillov et réalisée dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{\mathfrak{l}_i}$, et soit $S_{E_{i,s}^*}$ la représentation métaplectique de $Mp(V_{i,s})$ associée au caractère ζ_{a_0} et réalisée dans le même espace de Hilbert \mathcal{H}_i .

L'application $(y_1, y_2) \mapsto y_1 y_2$ de $H_{1,s} \times H_{2,s}$ dans H est un morphisme surjectif de groupes de Lie, de noyau égal $\Delta = \{(z, z^{-1}), z \in Z\}$. La représentation $\pi_{E_{1,s}^*} \otimes \pi_{E_{2,s}^*}$ de $H_{1,s} \times H_{2,s}$ est unitaire irréductible et est triviale sur Δ . Par passage au quotient, on obtient une représentation unitaire irréductible de H équivalente à $\pi_{E_{a_0}^*}$.

On note $T(s)^{V_{i,s}}$ (resp. $T(s)^V$) l'extension métaplectique de $T(s)$ associée à l'action symplectique de $T(s)$ sur $V_{i,s}$ (resp. V) et $\eta_{T(s)}^{V_{i,s}}$ (resp. $\eta_{T(s)}^V$) l'application naturelle de

$T(s)^{V_{i,s}}$ (resp. $T(s)^V$) dans $Mp(V_{i,s})$ (resp. $Mp(V)$). On choisit un relèvement $\tilde{s}_i = (s, \psi_{i,s})$ (resp. $\tilde{s} = (s, \psi_s)$) de s dans $T(s)^{V_{i,s}}$ (resp. $T(s)^V$). Avec ces notations, on a :

$$S_{E_{a_0}^*}(\eta_{T(s)}^V(\tilde{s})) = \psi_s(\ell_1 + \ell_2)\psi_{2,s}(\ell_2)^{-1}\text{Id}_{\mathcal{H}_1} \otimes S_{E_{2,s}^*}(\eta_{T(s)}^{V_{2,s}}(\tilde{s}_2)).$$

10.1.2 Soit $0 < \varepsilon(s) < \inf\{a'_G(s), a''_G(s), \varepsilon\}$ tel que $G \times_{G(s)} G(s)_{\varepsilon(s)} \rightarrow \mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s))$, $[x, y] \mapsto xsyx^{-1}$ soit un difféomorphisme. La restriction de $\Theta_{E_{a_0}^*, \tau}$ à $\mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s))$ est une fonction généralisée, G -invariante. Désignons par $\theta_{E_{a_0}^*, \tau, s}$ la fonction généralisée sur $G(s)_{\varepsilon(s)}$ qui lui est associée par le théorème 4.3.1. Soit $\beta \in C_c^\infty(G(s)_{\varepsilon(s)})$ et $d_{G(s)}x = d_T x d_{V_{1,s}} v d\mu(t)$ une mesure de Haar sur $G(s)$. Alors, il existe un sous-groupe compact ouvert K de $G(s)$ tel que β soit K -bi-invariant. On se donne $\gamma \in C_c^\infty(G(s))$ tel que $\int_{G(s)} \gamma(y) d_{G(s)}y = 1$ dont le support est contenu dans K . On se donne également $\alpha_s \in C_c^\infty(V_{2,s})$ tel que $\int_{V_{2,s}} \alpha_s(v) d_{V_{2,s}}v = 1$. Comme l'application $\xi : G(s) \times V_{2,s} \rightarrow T(s)H$, $(y, v) \mapsto y \exp(v)$, est un difféomorphisme et comme $T(s)H$ est ouvert dans G , donc la fonction $\alpha = (\gamma \otimes \alpha_s) \circ \xi^{-1}$ appartient à $C_c^\infty(G)$. On munit G de la mesure de Haar $d_Gx = d_T x d_{V_{1,s}} v d_{V_{2,s}} v d\mu(t)$ et on considère l'application $\Psi : G \times G(s)_{\varepsilon(s)} \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xsyx^{-1}$. On obtient par la suite l'élément $\Psi_{\alpha \otimes \beta}$ de $C_c^\infty(\mathcal{W}(s, \varepsilon(s)))$ donné par la proposition 4.1.1. On a alors

$$\theta_{E_{a_0}^*, \tau, s}(\beta d_{G(s)}y) = \Theta_{E_{a_0}^*, \tau}(\Psi_{\alpha \otimes \beta} d_Gx).$$

En utilisant la réalisation de $\pi_{E_{a_0}^*, \tau}$ donnée dans le paragraphe 10.1.1, on a :

$$\pi_{E_{a_0}^*, \tau}(\Psi_{\alpha \otimes \beta} d_Gx) = \int_{t_{\varepsilon(s)}|_{n_F|_p}} \tau(\tilde{s} \exp_{T(s)^V}(X)) \otimes J(\tilde{s} \exp_{T(s)^V}(X)) d_t X,$$

où

$$\exp_{T(s)^V}(X) = (\exp_{T(s)}(X), \phi), \exp_{T(s)^{V_{i,s}}}(X) = (\exp_{T(s)}(X), \phi_{i,s}), i = 1, 2,$$

$$J(\tilde{s} \exp_{T(s)^V}(X)) = (\psi_s \psi_{1,s}^{-1} \psi_{2,s}^{-1})(\phi \phi_{1,s}^{-1} \phi_{2,s}^{-1}) \psi_{1,s}(\ell_1) J_1(\exp_{T(s)^{V_{1,s}}}(X)) \otimes J_2(\tilde{s}_2 \exp_{T(s)^{V_{2,s}}}(X))$$

$J_1(\exp_{T(s)^{V_{1,s}}}(X))$ étant l'opérateur

$$\int_{V_{1,s} \times k} \beta(\exp_{T(s)}(X) \exp(Y + tE)) S_{E_{1,s}^*}(\eta_{T(s)^{V_{1,s}}}(\exp_{T(s)^{V_{1,s}}}(X))) \pi_{E_{1,s}^*}(\exp(Y + tE)) d_{V_{1,s}} Y d\mu(t),$$

et $J_2(\tilde{s}_2 \exp_{T(s)^{V_{2,s}}}(X)) = J_{\alpha_s}(\eta_{T(s)^{V_{2,s}}}^{V_{2,s}}(\tilde{s}_2 \exp_{T(s)^{V_{2,s}}}(X)))$, où ce dernier opérateur est donné par la formule (5.4).

Il s'en suit que l'on a :

$$\begin{aligned} \theta_{E_{a_0}^*, \tau, s}(\beta d_{G(s)}y) &= \psi_s(\ell_1 + \ell_2)\psi_{2,s}(\ell_2)^{-1} \int_{t_{\varepsilon(s)}|_{n_F|_p}} \text{Tr}(\tau(\tilde{s} \exp_{T(s)^V}(X))) \\ &\quad \times \text{Tr}(J_1(\exp_{T(s)^{V_{1,s}}}(X))) \text{Tr}(J_2(\tilde{s}_2 \exp_{T(s)^{V_{2,s}}}(X))) d_t X. \end{aligned}$$

D'après la proposition 5.6.4 et compte tenu des conditions imposées sur $a''_G(s)$, on a, pour tout $X \in \mathfrak{t}_{\varepsilon(s)|n_F|p}$,

$$\psi_s(\ell_1 + \ell_2)\psi_{2,s}(\ell_2)^{-1}\mathrm{Tr}(J_2(\tilde{s}_2 \exp_{T(s)V_{2,s}}(X))) = |\det(s-1)_{V_{2,s}}|_p^{-\frac{1}{2}}\Phi_{a_0}(\eta_{T(s)}^V(\tilde{s})).$$

Il en résulte que l'on a :

$$\begin{aligned} \theta_{E_{a_0}^*, \tau, s}(\beta d_{G(s)}y) &= |\det(s-1)_{V_{2,s}}|_p^{-\frac{1}{2}}\Phi_{a_0}(\eta_{T(s)}^V(\tilde{s})) \int_{\mathfrak{t}_{\varepsilon(s)|n_F|p}} \mathrm{Tr}(\tau(\tilde{s} \exp_{T(s)V}(X))) \\ &\quad \times \mathrm{Tr}(J_1(\exp_{T(s)V_{1,s}}(X))) d_{\mathfrak{t}}X. \end{aligned}$$

Cependant, on a :

$$\mathrm{Tr}(\tau(\tilde{s} \exp_{T(s)V}(X))) = \mathrm{Tr}\tau(\tilde{s})\zeta(\langle \lambda_\tau, X \rangle), \text{ pour tout } X \in \mathfrak{t}_{\varepsilon(s)|n_F|p}.$$

Si bien que l'on obtient :

$$\begin{aligned} \theta_{E_{a_0}^*, \tau, s}(\beta d_{G(s)}y) &= |\det(s-1)_{V_{2,s}}|_p^{-\frac{1}{2}}\Phi_{a_0}(\eta_{T(s)}^V(\tilde{s}))\mathrm{Tr}\tau(\tilde{s}) \int_{\mathfrak{t}_{\varepsilon(s)|n_F|p}} \zeta(\langle \lambda_\tau, X \rangle) \\ &\quad \times \mathrm{Tr}(J_1(\exp_{T(s)V_{1,s}}(X))) d_{\mathfrak{t}}X \\ &= |\det(s-1)_{V_{2,s}}|_p^{-\frac{1}{2}}\Phi_{a_0}(\eta_{T(s)}^V(\tilde{s}))\mathrm{Tr}\tau(\tilde{s}) \times \\ &\quad \times \int_{\mathcal{O}_{E_{1,s}^*, \lambda_\tau}} (\beta \circ \exp d_{\mathfrak{g}(s)}Y)_{\widehat{\mathfrak{g}(s)}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{E_{1,s}^*, \lambda_\tau}}(l), \end{aligned}$$

où $d_{\mathfrak{g}(s)}Y$ est la mesure de Haar sur $\mathfrak{g}(s)$ tangente à la mesure de Haar $d_{G(s)}y$ sur $G(s)$.

10.2 La démonstration du théorème 8.4.1 dans le deuxième cas de l'alternative du lemme 8.5.1 On se place dans la situation indiquée dans la section 9.2. Soit $s \in G$, semi-simple et $0 < \varepsilon_G(s) < \inf\{a'_G(s), a''_G(s), \varepsilon\}$ tel que l'application $G \times_{G(s)} G(s)_{\varepsilon_G(s)} \longrightarrow \mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s))$, $[x, y] \longmapsto xsyx^{-1}$ soit un difféomorphisme.

10.2.1 Dans ce paragraphe, on suppose que l'idéal \mathfrak{u} est contenu dans $\ker g$. Dans ce cas, $\mathfrak{q} = \mathfrak{u}$, $G_1 = G/Q$ et $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{q}$; via l'identification $\mathfrak{q}^\perp = \mathfrak{g}_1^*$, on a : $g = g_1$, $\mathcal{O}_{g, \lambda_\tau} = \mathcal{O}_{g_1, \lambda_\tau}$ et les mesures de Liouville $d\mu_{\mathcal{O}_{g, \lambda_\tau}}$ et $d\mu_{\mathcal{O}_{g_1, \lambda_\tau}}$ sont égales. Désignons par p_1 la projection canonique de G sur G_1 et par la même lettre (i.e. par p_1) la projection canonique de \mathfrak{g} sur \mathfrak{g}_1 .

Remarque : On a : $G_1(g_1) = p_1(G(g))$ et l'application $G(g)^\mathfrak{g} \longrightarrow G_1(g_1)^\mathfrak{g}_1$, $(x, \psi) \longmapsto (p_1(x), \psi)$ est un morphisme surjectif, que nous noterons encore p_1 , de noyau Q . Si bien que $\tau = \tilde{\tau} \circ p_1$ et

$$\pi_{g, \tau} = \pi_{g_1, \tilde{\tau}} \circ p_1. \tag{10.1}$$

On pose $s_1 = p_1(s)$. Alors, s_1 est un élément semi-simple de G_1 . De plus, on a : $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s} = \mathcal{O}_{g_1,\lambda_\tau,s_1}$ et $p_1(\mathcal{W}_G(s, \varepsilon_G(s)))$ est un ouvert G_1 -invariant, contenu dans $\mathcal{W}_{G_1}(s_1, \varepsilon_{G_1}(s_1))$. D'autre part, on choisit une mesure de Haar $d_G x$ (resp. $d_Q x$) sur G (resp. Q) et $d_{\mathfrak{g}} X$ (resp. $d_{\mathfrak{q}} X$) la mesure de Haar sur \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{q}) tangente à $d_G x$ (resp. $d_Q x$). On munit G_1 (resp. \mathfrak{g}_1) de la mesure de Haar quotient $d_{G_1} x = d_G x / d_Q x$ (resp. $d_{\mathfrak{g}_1} X = d_{\mathfrak{g}} X / d_{\mathfrak{q}} X$). Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{W}_G(s, \varepsilon_G(s)))$. On pose,

$$\varphi_{G_1}(x) = \int_Q \varphi(xy) d_Q y = \int_{\mathfrak{q}} \varphi(x \exp(Y)) d_{\mathfrak{q}} Y, \quad x \in G.$$

Alors $\varphi_{G_1} \in C_c^\infty(p_1(\mathcal{W}_G(s, \varepsilon_G(s))))$ et on a :

$$\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = \Theta_{g_1,\tilde{\tau}}(\varphi_{G_1} d_{G_1} x). \quad (10.2)$$

On suppose désormais que le théorème 8.4.1 est vrai pour G_1 et $\pi_{g_1,\tilde{\tau}}$.

– Ou bien $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s} = \emptyset$, dans ce cas $\mathcal{O}_{g_1,\lambda_\tau,s_1} = \emptyset$ et la formule (10.2) montre que le théorème 8.4.1 est vrai pour G et $\pi_{g,\tau}$.

– Ou bien $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s} \neq \emptyset$. On note $\theta_{g_1,\tilde{\tau},s_1}$ la fonction généralisée $G_1(s_1)$ -invariante sur $G_1(s_1)_{\varepsilon_{G_1}(s_1)}$ associée à $\Theta_{g_1,\tilde{\tau}}$ par le théorème 4.3.1. On se donne une mesure de Haar $d_{\mathfrak{g}(s)} X$ (resp. $d_{\mathfrak{g}_1(s_1)} X$) sur $\mathfrak{g}(s)$ (resp. $\mathfrak{g}_1(s_1)$). Le groupe $G(s)$ (resp. $G_1(s_1)$) est muni de la mesure de Haar $d_{G(s)} x$ (resp. $d_{G_1(s_1)} x$) tangente à $d_{\mathfrak{g}(s)} X$ (resp. $d_{\mathfrak{g}_1(s_1)} X$). En utilisant le théorème 4.3.1, on a :

$$\begin{aligned} \Theta_{g_1,\tilde{\tau}}(\varphi_{G_1} d_{G_1} x) &= \int_{G_1/G_1(s_1)} \Delta_{G_1}(x)^{-1} \int_{G_1(s_1)_{\varepsilon_{G_1}(s_1)}} \theta_{g_1,\tilde{\tau},s_1}(y) \varphi_{G_1}^x(s_1 y) \\ &\quad \times |\det(1 - (s_1 y)^{-1})_{(\mathfrak{g}_1)_{s_1}}|_p d_{G_1(s_1)} y d_{G_1/G_1(s_1)} \dot{x}, \end{aligned}$$

où $d_{G_1/G_1(s_1)} \dot{x}$ est la mesure G_1 -invariante sur $G_1/G_1(s_1)$ tangente à la mesure de Haar quotient $d_{\mathfrak{g}_1} X / d_{\mathfrak{g}_1(s_1)} X$ sur $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{g}_1(s_1)$ et $\varphi_{G_1}^x$ est la fonction sur G_1 définie par $\varphi_{G_1}^x(y) = \varphi_{G_1}(xyx^{-1})$, $y \in G_1$. On a :

$$\begin{aligned} \Theta_{g_1,\tilde{\tau}}(\varphi_{G_1} d_{G_1} x) &= |\det(1 - s_1^{-1})_{(\mathfrak{g}_1)_{s_1}}|_p \int_{G_1/G_1(s_1)} \Delta_{G_1}(x)^{-1} \times \\ &\quad \int_{\mathcal{O}_{g_1,\lambda_\tau,s_1}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}_1(s_1)_{\varepsilon_{G_1}(s_1)}})_{|n_{F|p}} \varphi_{G_1}^x(s_1 \exp(\cdot)) d_{\mathfrak{g}_1(s_1)} X \widehat{\sim}_{\mathfrak{g}_1(s_1)} \phi_{g_1,\tilde{\tau},s_1} d\mu_{\mathcal{O}_{g_1,\lambda_\tau,s_1}} d_{G_1/G_1(s_1)} \dot{x}. \end{aligned}$$

Maintenant, considérons la décomposition $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(s) \oplus \mathfrak{q}_s$ et choisissons des mesures de Haar $d_{\mathfrak{q}(s)} X$ et $d_{\mathfrak{q}_s} X$ sur $\mathfrak{q}(s)$ et \mathfrak{q}_s respectivement de sorte que $d_{\mathfrak{q}} X = d_{\mathfrak{q}(s)} X d_{\mathfrak{q}_s} X$. En utilisant la formule (9.6) appliquée à $\mathfrak{g}(s)$ et $\mathfrak{q}(s)$, nous pouvons écrire, pour $x \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$,

$$1_{(\mathfrak{g}_1(s_1)_{\varepsilon_G(s)}|_{n_F|p})}(p_1(X))\varphi_{G_1}^{p_1(x)}(s_1 \exp(p_1(X))) = \\ |\det \text{Ad}x_{\mathfrak{q}}|_p 1_{(\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon_G(s)}|_{n_F|p} + \mathfrak{q}_s)}(X) \int_{\mathfrak{q}(s)} \left\{ \int_{\mathfrak{q}_s} \varphi^x(s \exp(X+Y) \exp(Z)) d_{\mathfrak{q}_s} Z \right\} d_{\mathfrak{q}(s)} Y.$$

Or, l'application $\mathfrak{g}(s) \longrightarrow \mathfrak{g}_1(s_1)$, $X \longmapsto p_1(X)$, est linéaire surjective de noyau égal $\mathfrak{q}(s)$. Ceci permet d'identifier $\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{q}(s)$ à $\mathfrak{g}_1(s_1)$. Pour $l \in \mathfrak{g}_1(s_1)^*$, on a :

$$(1_{(\mathfrak{g}_1(s_1)_{\varepsilon_G(s)}|_{n_F|p})}\varphi_{G_1}^{p_1(x)}(s_1 \exp(\cdot))d_{\mathfrak{g}_1(s_1)}X)\widehat{\mathfrak{g}_1(s_1)}(l) = |\det \text{Ad}x_{\mathfrak{q}}|_p \times \\ \int_{\mathfrak{g}(s) \times \mathfrak{q}_s} \varphi^x(s \exp(X) \exp(Z)) 1_{(\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon_G(s)}|_{n_F|p})}(X) \zeta(\langle l, X \rangle) d_{\mathfrak{q}_s} Z d_{\mathfrak{g}(s)} X.$$

Comme, pour tout $Z \in \mathfrak{q}_s$ et $X \in \mathfrak{g}(s)_{\varepsilon_G(s)}|_{n_F|p}$,

$$\exp(Z)s \exp(X) \exp(-Z) = s \exp(X) \exp(((s \exp(X))^{-1} - 1)Z),$$

on a :

$$(1_{(\mathfrak{g}_1(s_1)_{\varepsilon_G(s)}|_{n_F|p})}\varphi_{G_1}^x(s_1 \exp(\cdot))d_{\mathfrak{g}_1(s_1)}X)\widehat{\mathfrak{g}_1(s_1)}(l) = |\det \text{Ad}x_{\mathfrak{q}}|_p |\det(1 - s^{-1})_{\mathfrak{q}_s}|_p \\ \times \int_{\mathfrak{g}(s) \times \mathfrak{q}_s} 1_{(\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon_G(s)}|_{n_F|p})}(X) \varphi^{x \exp(Z)}(s \exp(X)) \zeta(\langle l, X \rangle) d_{\mathfrak{q}_s} Z d_{\mathfrak{g}(s)} X \\ = |\det \text{Ad}x_{\mathfrak{q}}|_p |\det(1 - s^{-1})_{\mathfrak{q}_s}|_p \\ \times \int_{\mathfrak{q}_s} (1_{(\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon_G(s)}|_{n_F|p})}\varphi^{x \exp(Z)}(s \exp(\cdot))d_{\mathfrak{g}(s)}X)\widehat{\mathfrak{g}(s)}(l) d_{\mathfrak{q}_s} Z.$$

Cependant,

$$|\det(1 - s_1^{-1})_{(\mathfrak{g}_1)_{s_1}}|_p |\det(1 - s^{-1})_{\mathfrak{q}_s}|_p = |\det(1 - s^{-1})_{\mathfrak{g}_s}|_p,$$

$$|\det \text{Ad}(p_1(x))_{\mathfrak{g}_1}|_p |\det \text{Ad}x_{\mathfrak{q}}|_p = |\det \text{Ad}x_{\mathfrak{g}}|_p = \Delta_G(x)^{-1}, \text{ pour tout } x \in G,$$

et

$$\phi_{\mathfrak{g}_1, \tilde{\tau}, s_1} = \phi_{\mathfrak{g}, \tau, s}.$$

Maintenant, en utilisant le fait que $G_1/G_1(s_1) = G/G(s) \exp(\mathfrak{q}_s)$, nous obtenons de ce qui précède,

$$\Theta_{\mathfrak{g}, \tau}(\varphi d_G x) = |\det(1 - s^{-1})_{\mathfrak{g}_s}|_p \int_{G/G(s)} \Delta_G(x)^{-1} \\ \times \int_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}, \lambda_{\tau}, s}} (1_{(\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon_G(s)}|_{n_F|p})}\varphi^x(s \exp(\cdot))d_{\mathfrak{g}(s)}X)\widehat{\mathfrak{g}(s)} \phi_{\mathfrak{g}, \tau, s} d\mu_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}, \lambda_{\tau}, s}} d_{G/G(s)} \dot{x}.$$

C'est la formule cherchée.

10.2.2 Nous retournons désormais à la situation générale du cas considéré en 9.2. Fixons une mesure de Haar à gauche $d_G x$ (resp. $d_H x$) sur G (resp. H) et notons $d_{\mathfrak{g}} X$ (resp. $d_{\mathfrak{h}} X$) la mesure de Haar tangente sur \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{h}) et réalisons la représentation

induite $\pi_{g,\tau} = \text{Ind}_H^G \pi_{h,\bar{\tau}} = \text{Ind}_H^G (\pi_{g_1,\bar{\tau}} \circ p_1)$ (voir les formules (7.2) et (7.3)) en utilisant la mesure invariante $d_{G/H} \dot{x}$ sur G/H , quotient de $d_G x$ par $d_H x$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(G)$. On sait que l'opérateur $\pi_{g,\tau}(\varphi d_G x)$ est un opérateur à noyau continu donné par

$$K_\varphi(x, y) = \Delta_G(y)^{-1} \int_H \Delta_{H,G}(z)^{-\frac{1}{2}} \varphi(xzy^{-1}) \pi_{h,\bar{\tau}}(z) d_H z,$$

et grâce au théorème de Mercer, on a :

$$\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = \int_{G/H} \Delta_G(x)^{-1} \Theta_{h,\bar{\tau}}(\Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}} \varphi_H^x d_H z) d_{G/H} \dot{x}. \quad (10.3)$$

10.2.3 Dans cette section, on suppose que $G.s \cap H = \emptyset$. Vu le choix de $\varepsilon_G(s)$, on a : $\mathcal{W}_G(s, \varepsilon_G(s)) \cap H = \emptyset$. Ainsi, si le support de φ est inclus dans $\mathcal{W}_G(s, \varepsilon_G(s))$ alors, pour tout $x \in G$, $\varphi_H^x = 0$. Si tel est le cas, la formule (10.3) donne $\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = 0$. D'autre part, notre hypothèse implique aussi que $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s} = \emptyset$; le théorème est donc démontré dans ce cas.

10.2.4 Maintenant, on se place dans le cas où $G.s \cap H \neq \emptyset$. On peut supposer que $s \in H$. On pose

$$G_{s,H} = \{x \in G \text{ tel que } x^{-1}sx \in H\}.$$

Alors $G_{s,H}$ est une sous-variété fermée de G . Le groupe produit $G(s) \times H$ opère à gauche dans $G_{s,H}$ par la formule : $(x, h).y = xyh^{-1}$. De plus, l'action conjugaison de H dans $G.s \cap H$ se prolonge en une action de $G(s) \times H$ qui soit triviale sur $G(s) \times \{1\}$. Avec ces notations, l'application $\eta : G_{s,H} \rightarrow G.s \cap H$, $x \mapsto x^{-1}sx$, est $G(s) \times H$ -équivariante. Elle induit une bijection :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} : G(s) \backslash G_{s,H}/H &\longrightarrow H \backslash (G.s \cap H) \\ G(s)xH &\longmapsto H.(x^{-1}sx) = \{hx^{-1}sxh^{-1}, h \in H\} \end{aligned}$$

En utilisant ([35] et [3]), on montre que $G.s \cap H$ est une réunion disjointe d'un nombre fini de H -orbites : soit $x_1 = 1, x_2, \dots, x_m \in G_{s,H}$ tels que

$$G.s \cap H = \bigsqcup_{i=1}^m H.(x_i^{-1}sx_i) \text{ et } G_{s,H} = \bigsqcup_{i=1}^m G(s)x_iH.$$

Pour $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, on pose $s_i = x_i^{-1}sx_i$. D'après ([28], Proposition 43.3.1), on a

$$\mathcal{W}_G(s, \varepsilon_G(s)) \cap H = \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{W}_H(s_i, \varepsilon_G(s)). \quad (10.4)$$

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{W}_G(s, \varepsilon_G(s)))$. On pose, pour $1 \leq i \leq m$, $\varphi_{s_i} = 1_{\mathcal{W}_H(s_i, \varepsilon_G(s))} \varphi|_H$. En utilisant ce qui précède, la formule (10.3) s'écrit aussi :

$$\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = \sum_{1 \leq i \leq m} I_{s_i}(\varphi d_G x), \quad (10.5)$$

où

$$I_{s_i}(\varphi d_G x) = \int_{G/H} \Delta_G(x)^{-1} \Theta_{h,\tilde{\tau}}(\Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}}(\varphi^x)_{s_i} d_H z) d_{G/H} \dot{x}. \quad (10.6)$$

10.2.5 Description de $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$ en terme des $\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}$ On considère les décompositions suivantes.

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}(s_i)^* \oplus \mathfrak{g}_{s_i}^* \text{ et } \mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}(s_i)^* \oplus \mathfrak{h}_{s_i}^*.$$

On désigne par r l'application de restriction de \mathfrak{g}^* à \mathfrak{h}^* et par r_{s_i} la restriction de r à $\mathfrak{g}(s_i)^*$. Si E est une partie de $\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}$, on pose $[E]_{s_i} = G(s_i)r_{s_i}^{-1}(E)$. Alors, on le résultat suivant : soit $f \in \mathfrak{g}^*$ dont la restriction à ${}^u\mathfrak{g}$ coïncide avec celle de g , et dont la restriction à $\mathfrak{g}(g)$ est égale à λ_τ .

Lemme 10.2.1 *On a :*

- $r^{-1}(\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau}) = H.f$
- $r^{-1}(\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau}) \cap \mathfrak{g}(s_i)^* = r_{s_i}^{-1}(\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i})$
- $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s} = \bigsqcup_{1 \leq i \leq m} x_i \cdot [\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}$

De plus, chaque $x_i \cdot [\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}$ est un ouvert de $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}$, réunion finie de $G(s)$ -orbites. L'application $\omega \mapsto [\omega]_{s_i}$ induit une bijection de $H(s_i) \backslash \mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}$ sur $G(s_i) \backslash [\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}$.

L'analogue de ce résultat dans le cas réel a été démontré dans ([21], Lemme 8.2.1). Leur démonstration s'étend à notre cas.

10.2.6 Dans ce numéro, on suppose $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s} = \emptyset$. D'après le lemme précédent, on a $\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i} = \emptyset$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Supposons que le théorème 8.4.1 est vrai pour $(H, h, \tilde{\tau})$. Alors, $I_{s_i}(\varphi d_G x) = 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Si bien que $\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = 0$.

10.2.7 Dans ce paragraphe, on suppose désormais que $\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s} \neq \emptyset$. Comme la fonction généralisée $\Theta_{g,\tau}$ est G -invariante, on peut supposer que $Ad^*s.f = f$. On choisit une mesure de Haar $d_{\mathfrak{g}(s)}X$ (resp. $d_{\mathfrak{h}(s)}X$) sur $\mathfrak{g}(s)$ (resp. $\mathfrak{h}(s)$). On munit chaque $\mathfrak{g}(s_i)$ (resp. $\mathfrak{h}(s_i)$) de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{g}(s_i)}X$ (resp. $d_{\mathfrak{h}(s_i)}X$) image de $d_{\mathfrak{g}(s)}X$ (resp. $d_{\mathfrak{h}(s)}X$) par l'isomorphisme : $x_i^{-1} : \mathfrak{g}(s) \rightarrow \mathfrak{g}(s_i)$ (resp. $x_i^{-1} : \mathfrak{h}(s) \rightarrow \mathfrak{h}(s_i)$). Le groupe $G(s_i)$ (resp. $H(s_i)$) est muni de la mesure de Haar $d_{G(s_i)}x$ (resp. $d_{H(s_i)}x$) tangente à $d_{\mathfrak{g}(s_i)}X$ (resp. $d_{\mathfrak{h}(s_i)}X$). Pour chaque $i \in \{1, \dots, m\}$, on désigne par $\theta_{h,\tilde{\tau},s_i}$ la fonction généralisée $H(s_i)$ -invariante sur $H(s_i)_{\varepsilon_G(s)}$ associée la fonction généralisée $\Theta_{h,\tilde{\tau}}$ par le théorème 4.3.1. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \Theta_{h,\tilde{\tau}}(\Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}}(\varphi^x)_{s_i} d_H z) &= \int_{H/H(s_i)} \Delta_H(y)^{-1} \int_{H(s_i)_{\varepsilon_G(s)}} \theta_{h,\tilde{\tau},s_i}(z) \Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}}(s_i z) \\ &\quad \times \varphi^{xy}(s_i z) |\det(1 - (s_i z)^{-1})_{\mathfrak{h}_{s_i}}|_p d_{H(s_i)} z d_{H/H(s_i)} \dot{y}, \end{aligned}$$

où $d_{H/H(s_i)}\dot{y}$ est la mesure H -invariante sur $H/H(s_i)$ tangente à la mesure de Haar quotient $d_{\mathfrak{h}}X/d_{\mathfrak{h}(s_i)}X$ sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(s_i)$.

Mais, pour tout $z \in H(s_i)_{\varepsilon_G(s)}$, on a :

$$\Delta_{H,G}(z) = 1 \text{ et } |\det(1 - (s_i z)^{-1})_{\mathfrak{h}(s_i)}|_p = |\det(1 - s_i^{-1})_{\mathfrak{h}(s_i)}|_p.$$

On pose $c(s_i) = \Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}}(s_i)|\det(1 - s_i^{-1})_{\mathfrak{h}(s_i)}|_p$. Alors, on peut écrire,

$$\begin{aligned} \Theta_{h,\tilde{\tau}}(\Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}}(\varphi^x)_{s_i} d_H z) &= c(s_i) \int_{H/H(s_i)} \Delta_H(y)^{-1} \\ &\quad \times \int_{H(s_i)_{\varepsilon_G(s)}} \theta_{h,\tilde{\tau},s_i}(z) \varphi^{xy}(s_i z) d_{H(s_i)} z d_{H/H(s_i)} \dot{y}. \end{aligned}$$

Par hypothèse le théorème 8.4.1 est vrai pour $(G_1, g_1, \tilde{\tau}, \lambda_\tau, \varepsilon_G(s), p_1(s_i))$. En appliquant les résultats de la section 10.2.1, on a :

$$\begin{aligned} I_{s_i}(\varphi d_G x) &= c(s_i) \int_{G/H} \Delta_G(x)^{-1} \int_{H/H(s_i)} \Delta_H(y)^{-1} \times \\ &\quad \times \int_{\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}} (1_{\mathfrak{h}(s_i)_{\varepsilon_G(s)}|n_F|_p} \varphi^{xy}(s_i \exp(\cdot)) d_{\mathfrak{h}(s_i)} X) \hat{\nu}_{\mathfrak{h}(s_i)} \times \\ &\quad \times \phi_{h,\tilde{\tau},s_i} d\mu_{\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}} d_{H/H(s_i)} \dot{y} d_{G/H} \dot{x}. \end{aligned}$$

La fonction $\phi_{h,\tilde{\tau},s_i}$ (resp. ϕ_{g,τ,s_i}) est constante sur les $H(s_i)$ -orbites (resp. $G(s_i)$ -orbites) donc les nombres $\phi_{h,\tilde{\tau},s_i}(\omega)$, $\omega \in H(s_i) \setminus \mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}$ (resp. $\phi_{g,\tau,s_i}(\omega)$, $\omega \in G(s_i) \setminus \mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s_i}$) sont bien définis. D'après la proposition 8.2.1, on a :

$$\phi_{h,\tilde{\tau},s_i}(\omega) = \phi_{g,\tau,s_i}([\omega]_{s_i}) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(s_i) |\det(1 - s_i^{-1})_{(1-s_i)\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|_p, \omega \in H(s_i) \setminus \mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}.$$

Remarquons que

$$c(s_i) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(s_i) |\det(1 - s_i^{-1})_{(1-s_i)\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|_p = |\det(1 - s_i^{-1})_{\mathfrak{g}(s_i)}|_p.$$

Ainsi,

$$I_{s_i}(\varphi d_G x) = |\det(1 - s_i^{-1})_{\mathfrak{g}(s_i)}|_p \sum_{\omega \in H(s_i) \setminus \mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}} \phi_{g,\tau,s_i}([\omega]_{s_i}) I_\omega^{s_i}(\varphi d_G x) \quad (10.7)$$

où on a posé, pour $\omega \in H(s_i) \setminus \mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}$,

$$\begin{aligned} I_\omega^{s_i}(\varphi d_G x) &= \int_{G/H} \Delta_G(x)^{-1} \int_{H/H(s_i)} \Delta_H(y)^{-1} \times \\ &\quad \int_{\omega} ((1_{\mathfrak{h}(s_i)_{\varepsilon_G(s)}|n_F|_p} \varphi^{xy}(s_i \exp_{G(s_i)}(\cdot)))_{\mathfrak{h}(s_i)} d_{\mathfrak{h}(s_i)} X) \hat{\nu}_{\mathfrak{h}(s_i)} d\mu_\omega d_{H/H(s_i)} \dot{y} d_{G/H} \dot{x}. \end{aligned}$$

Désignons par $\mathfrak{h}(s_i)^\perp$ l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{g}(s_i)$ nulle sur $\mathfrak{h}(s_i)$ (que l'on identifie canoniquement avec $(\mathfrak{g}(s_i)/\mathfrak{h}(s_i))^*$) et par $d_{\mathfrak{h}(s_i)^\perp t}$ la mesure de Haar sur $\mathfrak{h}(s_i)^\perp$ duale de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{g}(s_i)}X/d_{\mathfrak{h}(s_i)}Y$ sur $\mathfrak{g}(s_i)/\mathfrak{h}(s_i)$. Soit $\omega \in H(s_i) \setminus \mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}$. On peut écrire,

$$\begin{aligned} I_\omega^{s_i}(\varphi d_G x) &= \int_{G/G(s_i)} \Delta_G(x)^{-1} \left\{ \int_{G(s_i)/H(s_i)} \right. \\ &\quad \times \left\{ \int_\omega \int_{\mathfrak{h}(s_i)^\perp} (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}(s_i) \varepsilon_{G(s)} |n_F|_p} \varphi^x(s_i \exp_{G(s_i)}(\cdot)) d_{\mathfrak{g}(s_i)} X) \widehat{\mathfrak{g}(s_i)}(y \cdot (l_1 + t)) \right. \\ &\quad \left. \left. d_{\mathfrak{h}(s_i)^\perp} t d\mu_\omega(l) \right\} d_{G(s_i)/H(s_i)} y \right\} d_{G/G(s_i)} \dot{x}. \end{aligned}$$

En appliquant la proposition 6.2.1 aux orbites ω et $[\omega]_{s_i}$ dans $\mathfrak{h}(s_i)^*$ et $\mathfrak{g}(s_i)^*$, on obtient,

$$\begin{aligned} I_\omega^{s_i}(\varphi d_G x) &= \int_{G/G(s_i)} \Delta_G(x)^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_{[\omega]_{s_i}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}(s_i) \varepsilon_{G(s)} |n_F|_p} \varphi^x(s_i \exp_{G(s_i)}(\cdot)) d_{\mathfrak{g}(s_i)} X) \widehat{\mathfrak{g}(s_i)}(l) d\mu_{[\omega]_{s_i}}(l) \right\} d_{G/G(s_i)} \dot{x}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Reportant la formule (10.8) dans (10.7), on obtient,

$$\begin{aligned} I_{s_i}(\varphi d_G x) &= |\det(1 - s_i^{-1})_{\mathfrak{g}(s_i)}|_p \int_{G/G(s_i)} \Delta_G(x)^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ \int_{[\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}(s_i) \varepsilon_{G(s)} |n_F|_p} \varphi^x(s_i \exp_{G(s_i)}(\cdot)) d_{\mathfrak{g}(s_i)} X) \widehat{\mathfrak{g}(s_i)}(l) \times \right. \\ &\quad \left. \times \phi_{g,\tau,s_i}(l) d\mu_{[\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}}(l) \right\} d_{G/G(s_i)} \dot{x} \end{aligned}$$

Maintenant, pour tout $l \in \mathfrak{g}(s)^*$, on a : $x_i^{-1} \cdot l \in \mathfrak{g}(s_i)^*$ et

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}(s_i) \varepsilon_{G(s)} |n_F|_p} \varphi^x(s_i \exp_{G(s_i)}(\cdot)) d_{\mathfrak{g}(s_i)} X) \widehat{\mathfrak{g}(s_i)}(x_i^{-1} \cdot l) &= \\ c_i (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}(s) \varepsilon_{G(s)} |n_F|_p} \varphi^{x x_i^{-1}}(s \exp_{G(s)}(\cdot)) d_{\mathfrak{g}(s)} X) \widehat{\mathfrak{g}(s)}(l), \end{aligned}$$

où $c_i = |\det(x_i^{-1} : \mathfrak{g}(s) \rightarrow \mathfrak{g}(s_i))|_p$, le déterminant étant calculé relativement à une base, univolumique pour $d_{\mathfrak{g}(s)}Y$ (resp. $d_{\mathfrak{g}(s_i)}Y$), de $\mathfrak{g}(s)$ (resp. $\mathfrak{g}(s_i)$).

Comme x_i^{-1} induit un isomorphisme de variétés symplectique de $x_i \cdot [\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}$ sur $[\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} \int_{[\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}(s_i) \varepsilon_{G(s)} |n_F|_p} \varphi^x(s_i \exp_{G(s_i)}(\cdot)) d_{\mathfrak{g}(s_i)} X) \widehat{\mathfrak{g}(s_i)}(l) \phi_{g,\tau,s_i}(l) d\mu_{[\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}}(l) &= \\ c_i \int_{x_i \cdot [\mathcal{O}_{h,\lambda_\tau,s_i}]_{s_i}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}(s) \varepsilon_{G(s)} |n_F|_p} \varphi^{x x_i^{-1}}(s \exp_{G(s)}(\cdot)) d_{\mathfrak{g}(s)} X) \widehat{\mathfrak{g}(s)}(l) \phi_{g,\tau,s}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda_\tau,s}}(l) \end{aligned}$$

Cependant, pour tout $h \in L^1(G; G(s))$, on a

$$\int_{G/G(s_i)} h(xx_i^{-1}) d_{G/G(s_i)} \dot{x} = c'_i \int_{G/G(s)} h(x) d_{G/G(s)} \dot{x},$$

avec $c'_i = |\det(x_i^{-1} : \mathfrak{g}_s \rightarrow \mathfrak{g}_{s_i})|_p$, le déterminant étant calculé relativement à une base de \mathfrak{g}_s (resp. \mathfrak{g}_{s_i}), univolumique pour la mesure de Haar tangente à la mesure quotient sur $G/G(s)$ (resp. $G/G(s_i)$). Il est facile de montrer que $c_i c'_i = \Delta_G(x_i)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} I_{s_i}^x(\varphi d_G x) &= |\det(1 - s^{-1})_{\mathfrak{g}_s}|_p \times \\ &\times \int_{G/G(s)} \int_{x_i \cdot [\mathcal{O}_{h, \lambda_\tau, s_i}]_{s_i}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon_G(s)|n_F|p}} \varphi^{xx_i^{-1}}(s \exp_{G(s)}(\cdot))) d_{\mathfrak{g}(s)} X \widehat{\mathfrak{g}(s)}(l) \times \\ &\times \phi_{g, \tau, s}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g, \lambda_\tau, s}}(l) d_{G/G(s)} \dot{x} \end{aligned}$$

Compte tenu de ce qui précède et du lemme 10.2.1, on obtient

$$\begin{aligned} \Theta_{g, \tau}(\varphi d_G x) &= \int_{G/G(s)} \Delta_G(x)^{-1} \left\{ \int_{\mathcal{O}_{g, \lambda_\tau, s}} (\mathbf{1}_{\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon_G(s)|n_F|p}} \varphi^x(s \exp_{G(s)}(\cdot))) d_{\mathfrak{g}(s)} X \widehat{\mathfrak{g}(s)}(l) \right. \\ &\times \left. \phi_{g, \tau, s}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g, \lambda_\tau, s}}(l) \right\} |\det(1 - s^{-1})_{\mathfrak{g}_s}|_p d_{G/G(s)} \dot{x}. \end{aligned}$$

D'où la formule désirée.

Mesure de Plancherel.

11 On sait, depuis les travaux de ([17], [8]), que si G est unimodulaire alors il existe une mesure $d_{\widehat{G}}\mu$ sur \widehat{G} , appelée mesure de Plancherel de G , qui est entièrement déterminée une fois fixée une mesure de Haar $d_G x$ sur G par :

$$\varphi(1) = \int_{\widehat{G}} \text{Tr}(\pi(\varphi d_G x)) d_{\widehat{G}}\mu(\pi), \text{ pour tout } \varphi \in C_c^\infty(G).$$

L'objet de cette partie du présent travail est de décrire explicitement la mesure $d_{\widehat{G}}\mu$.

12 Formes linéaires fortement régulières. Dans ce paragraphe nous allons étudier les formes linéaires fortement régulières de \mathfrak{g}^* .

12.1 On désigne par k' soit le corps k soit le corps \bar{k} . On pose $\mathfrak{g}_{k'} = k' \otimes_k \mathfrak{g}$. Un élément g de $\mathfrak{g}_{k'}^*$ est dit régulier si $\dim \mathfrak{g}_{k'}(g) \leq \dim \mathfrak{g}_{k'}(g')$ pour tout $g' \in \mathfrak{g}_{k'}^*$. Si tel est le cas, $\mathfrak{g}_{k'}(g)$ est une sous-algèbre de Lie algébrique commutative ([7], Proposition 1.11.7). On note alors \mathfrak{j}_g l'ensemble des éléments semi-simple de $\mathfrak{g}_{k'}(g)$. Ainsi, \mathfrak{j}_g est l'unique facteur réductif de $\mathfrak{g}_{k'}(g)$. La forme linéaire g est dite fortement régulière si \mathfrak{j}_g est de dimension maximale. Dans ce cas, la sous-algèbre \mathfrak{j}_g est appelée sous-algèbre de Cartan-Duflo. L'ensemble des éléments fortement réguliers de $\mathfrak{g}_{k'}^*$ est noté $\mathfrak{g}_{k', t.r}^*$. Lorsque $k' = k$, l'ensemble $\mathfrak{g}_{k', t.r}^*$ est noté simplement $\mathfrak{g}_{t.r}^*$.

12.1.1 Soit $\mathfrak{j}_{\bar{k}}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}_{\bar{k}}$. On note $\mathfrak{h}_{\bar{k}}$ le centralisateur de $\mathfrak{j}_{\bar{k}}$ dans $\mathfrak{g}_{\bar{k}}$. Puisque $\mathfrak{j}_{\bar{k}}$ est une algèbre de Lie réductive, on a $\mathfrak{g}_{\bar{k}} = \mathfrak{h}_{\bar{k}} \oplus [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$ ce qui permet d'identifier $\mathfrak{g}_{\bar{k}}^*$ à $\mathfrak{h}_{\bar{k}}^* \oplus [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]^*$.

Lemme 12.1.1 Soit $l \in \mathfrak{h}_{\bar{k}}^*$ régulier comme élément de $\mathfrak{g}_{\bar{k}}^*$. On a $\mathfrak{g}_{\bar{k}}(l) \subset \mathfrak{h}_{\bar{k}}$ et $\mathfrak{j}_l = \mathfrak{j}_{\bar{k}}$, ce qui donne que $l \in \mathfrak{g}_{\bar{k},t,r}^*$.

Démonstration : Puisque $[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{h}_{\bar{k}}] = 0$, $[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]] \subset [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$, et le fait que l est nulle sur $[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$, on a $\mathfrak{j}_{\bar{k}} \subset \mathfrak{g}_{\bar{k}}(l)$. Comme l est un élément régulier de $\mathfrak{g}_{\bar{k}}^*$, on a $\mathfrak{g}_{\bar{k}}(l) \subset \mathfrak{h}_{\bar{k}}$ et $\mathfrak{j}_{\bar{k}} \subset \mathfrak{j}_l$. A cause de la maximalité de $\mathfrak{j}_{\bar{k}}$, on a $\mathfrak{j}_{\bar{k}} = \mathfrak{j}_l$. ■

12.1.2 Soit $B = (e_1, \dots, e_{2d})$ une base de $[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$ et (e_1^*, \dots, e_{2d}^*) la base duale. Si $l \in \mathfrak{h}_{\bar{k}}^*$, on note $\pi_B(l)$ le pfaffien de la restriction de la forme β_l à $[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$ calculé dans la base B : $\frac{1}{d!} \beta_l|_{[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]} = \pi_B(l) e_1^* \wedge \dots \wedge e_{2d}^*$.

Lemme 12.1.2 Soit $f \in \mathfrak{h}_{\bar{k}}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $f \in \mathfrak{g}_{\bar{k},t,r}^*$,
- (2) f est régulier dans $\mathfrak{h}_{\bar{k}}^*$ et $\pi_B(f) \neq 0$.

Démonstration : Supposons que $f \in \mathfrak{g}_{\bar{k},t,r}^*$. D'après le lemme 12.1.1, on a $\mathfrak{g}_{\bar{k}}(f) \subset \mathfrak{h}_{\bar{k}}$, $\mathfrak{g}_{\bar{k}}(f) = \mathfrak{h}_{\bar{k}}(f)$, et $\mathfrak{j}_{\bar{k}} = \mathfrak{j}_f$, ce qui prouve que la restriction de β_f à $[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$ est non dégénérée et par suite $\pi_B(f) \neq 0$. Soit maintenant l un élément régulier de $\mathfrak{h}_{\bar{k}}^*$ tel que $\pi_B(l) \neq 0$. Comme $[\mathfrak{h}_{\bar{k}}, [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]] \subset [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$, on a $\mathfrak{h}_{\bar{k}}(l) \subset \mathfrak{g}_{\bar{k}}(l)$. Soit $X \in \mathfrak{g}_{\bar{k}}(l)$, écrivons $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in \mathfrak{h}_{\bar{k}}$ et $X_2 \in [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$. Pour tout $Y \in [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$, $\langle l, [X, Y] \rangle = 0$ et ceci implique que $\langle l, [X_2, Y] \rangle = 0$. Comme la restriction de β_l à $[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$ est non dégénérée, $X_2 = 0$. Ainsi $\mathfrak{g}_{\bar{k}}(l) \subset \mathfrak{h}_{\bar{k}}$ et par conséquent $\mathfrak{g}_{\bar{k}}(l) \subset \mathfrak{h}_{\bar{k}}(l)$. Si bien que l'on a $\mathfrak{g}_{\bar{k}}(l) = \mathfrak{h}_{\bar{k}}(l)$. D'autre part, on a

$$\dim \mathfrak{h}_{\bar{k}}(l) \leq \dim \mathfrak{h}_{\bar{k}}(f) = \dim \mathfrak{g}_{\bar{k}}(f) \leq \dim \mathfrak{g}_{\bar{k}}(l).$$

Il en résulte que

$$\dim \mathfrak{h}_{\bar{k}}(l) = \dim \mathfrak{h}_{\bar{k}}(f) = \dim \mathfrak{g}_{\bar{k}}(f) = \dim \mathfrak{g}_{\bar{k}}(l).$$

Ce qui prouve le résultat. ■

On pose $\mathfrak{H}_{\bar{k},t,r}^* = \mathfrak{h}_{\bar{k}}^* \cap \mathfrak{g}_{\bar{k},t,r}^*$. Comme l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{h}_{\bar{k}}^*$ est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{h}_{\bar{k}}^*$, on déduit du lemme ci-dessus que $\mathfrak{H}_{\bar{k},t,r}^*$ est aussi un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{h}_{\bar{k}}^*$.

12.1.3 Le résultat suivant a un rôle important pour la suite de ce travail.

Proposition 12.1.1 *Avec les notations ci-dessus, toutes les sous-algèbres de Cartan-Duflo de \mathfrak{g} sont G -conjuguées.*

Démonstration : L'application $\sigma : [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}] \times \mathfrak{h}_{\bar{k}}^* \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{k}}^*$, $(X, f) \longmapsto \exp(X).f$, est évidemment polynomiale. Sa différentielle en $(0, l_0)$, $l_0 \in \mathfrak{H}_{\bar{k}, t, r}^*$ est l'application : $[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}] \times \mathfrak{h}_{\bar{k}}^* \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{k}}^*$, $(X, l) \longmapsto X.l_0 + l$. Supposons que l'on ait, pour tout $Y \in \mathfrak{g}_{\bar{k}}$, $\langle X.l_0 + l, Y \rangle = 0$. En prenant $Y \in \mathfrak{h}_{\bar{k}}$, on trouve que $l = 0$. Il en résulte que $X \in \mathfrak{g}_{\bar{k}}(l_0)$. Par le lemme 12.1.1, $X \in \mathfrak{h}_{\bar{k}} \cap [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$, soit $X = 0$. La différentielle est donc injective, et surjective par argument de dimension. Ainsi, σ est étale en $(0, l_0)$. Si bien que l'image de $[\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}] \times \mathfrak{H}_{\bar{k}, t, r}^*$ par σ contient un ouvert de Zariski non vide \mathcal{P} de $\mathfrak{g}_{\bar{k}}^*$ formé d'éléments fortement réguliers. On en déduit qu'il existe $g_0 \in \mathfrak{g}^*$ tel que, notant \tilde{g}_0 l'élément de $\mathfrak{g}_{\bar{k}}^*$ qui s'en déduit par extension des scalaires à \bar{k} , on ait $g_0 \in \mathcal{P}$. On a alors $j_{\tilde{g}_0} = \bar{k} \otimes_k j_{g_0}$.

On se donne maintenant $f \in \mathfrak{g}_{\bar{k}, t, r}^*$. Soit $\mathfrak{h}'_{\bar{k}}$ le centralisateur de j_f dans $\mathfrak{g}_{\bar{k}}$ et $\mathfrak{H}'_{\bar{k}, t, r} = \mathfrak{h}'_{\bar{k}} \cap \mathfrak{g}_{\bar{k}, t, r}^*$. Le raisonnement ci-dessus affirme l'existence des éléments $X_1 \in [\mathfrak{j}_{\bar{k}}, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$, $l_1 \in \mathfrak{H}'_{\bar{k}, t, r}$, $X_2 \in [\mathfrak{j}_f, \mathfrak{g}_{\bar{k}}]$, $l_2 \in \mathfrak{H}'_{\bar{k}, t, r}$ tels que

$$\exp(X_1).l_1 = \exp(X_2).l_2.$$

D'après le lemme 12.1.1, on a $j_{l_1} = j_{\bar{k}}$ et $j_{l_2} = j_f$. On en déduit que $j_{\bar{k}}$ et j_f sont conjugués par un élément de ${}^u\mathbf{G}$. On vient de montrer que l'ensemble \mathbf{V} des sous-algèbres de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}_{\bar{k}}$ est un espace homogène, défini sur k , de ${}^u\mathbf{G}$. On note \mathbf{H} le centralisateur de $j_{\tilde{g}_0}$ dans \mathbf{G} . L'application canonique ${}^u\mathbf{G}/{}^u\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{V}$ induit une bijection uG -équivariante de $({}^u\mathbf{G}/{}^u\mathbf{H})_k$ sur \mathbf{V}_k . En utilisant ([3], Proposition 1.12), les orbites de uG dans $({}^u\mathbf{G}/{}^u\mathbf{H})_k$ correspondent bijectivement aux éléments du noyau de l'application canonique $H^1(k, {}^u\mathbf{H}) \longrightarrow H^1(k, {}^u\mathbf{G})$. Or, $H^1(k, \mathbf{U}) = 0$, pour tout groupe unipotent \mathbf{U} défini sur k . Il s'ensuit que les éléments de \mathbf{V}_k constituent une seule orbite sous l'action de uG . ■

Arrivé à ce stade, nous allons démontrer le résultat suivant.

Lemme 12.1.3 *L'ensemble $\mathfrak{g}_{t, r}^*$ est un ouvert de Zariski, non vide, G -invariant de \mathfrak{g}^* .*

Démonstration : On suppose que $j_{\bar{k}}$ est défini sur k . On note \mathbf{H} le centralisateur de $j_{\bar{k}}$ dans \mathbf{G} . C'est un sous-groupe fermé, défini sur k , de \mathbf{G} . Considérons le morphisme $\kappa : \mathbf{G} \times_{\mathbf{H}} \mathfrak{H}_{\bar{k}, t, r}^* \longrightarrow \mathfrak{g}_{\bar{k}}^*$, qui à $[x, f]$ associe $x.f$. Puisque κ est injectif et dominant, il est de type fini. Comme κ est étale, d'après ([31], III.10. Théorème 3) le morphisme κ est plat. D'après ([29], Théorème 2.12) le morphisme κ est ouvert. Ainsi, $\mathfrak{g}_{\bar{k}, t, r}^*$, qui est l'image de κ , est un ouvert de $\mathfrak{g}_{\bar{k}}^*$. Il est défini sur k puisque κ et $\mathfrak{H}_{\bar{k}, t, r}^*$ sont définis sur k . Si bien que $\mathfrak{g}_{t, r}^*$, qui est l'ensemble des points rationnels de $\mathfrak{g}_{\bar{k}, t, r}^*$, est un ouvert de Zariski, non vide, de \mathfrak{g}^* . Il est clair qu'il est G -invariant. ■

12.2 On suppose désormais que G est unimodulaire.

Proposition 12.2.1 *Il existe un ouvert de Zariski Ω_G , non vide, G -invariant de \mathfrak{g}^* contenu dans $\mathfrak{g}_{t,r}^*$ tel que, pour tout $f \in \Omega_G$, l'orbite co-adjointe $G.f$ soit fermée dans \mathfrak{g}^* .*

Démonstration : D'après [5], il existe une partie \mathbf{G} -invariante \mathbf{U} de \mathfrak{g}_k^* ouverte et dense dans \mathfrak{g}_k^* , telle que toute \mathbf{G} -orbite contenue dans \mathbf{U} soit fermée dans \mathfrak{g}_k^* . On sait qu'il existe $f \in \bar{k}[\mathfrak{g}_k^*]$, non nul, tel que $D_f = \{X \in \mathfrak{g}_k^* / f(X) \neq 0\}$ soit contenu dans \mathbf{U} . Soit (v_1, \dots, v_m) une base de \mathfrak{g} . Alors (v_1, \dots, v_m) est une base de \mathfrak{g}_k . Désignons par (v_1^*, \dots, v_m^*) la base duale dans \mathfrak{g}_k^* . Relativement à cette base, on a $f \in \bar{k}[x_1, \dots, x_m]$. Soit k_1 une extension galoisienne finie de k contenant les coefficients de f . Notons \mathfrak{d} le groupe de Galois de k_1 sur k . Posons $\tilde{f} = \prod_{\sigma \in \mathfrak{d}} f^\sigma$. Il est clair que $\tilde{f} \neq 0$ et que $\tilde{f} \in k[x_1, \dots, x_m]$. Si bien que $D_{\tilde{f}}$ est un ouvert de Zariski (non vide) de \mathfrak{g}_k^* , défini sur k , et contenu dans \mathbf{U} . Il en résulte que $\cup_{x \in \mathbf{G}} x.D_{\tilde{f}}$ est un ouvert de Zariski, défini sur k , \mathbf{G} -invariant, et il est contenu dans \mathbf{U} . La proposition résulte alors du lemme suivant. ■

Lemme 12.2.1 *Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On note \tilde{g} l'élément de \mathfrak{g}_k^* obtenu à partir de g par extension des scalaires à \bar{k} . Si $\mathbf{G}.\tilde{g}$ est fermée (de Zariski) dans \mathfrak{g}_k^* alors $G.g$ est fermée dans \mathfrak{g}^* pour la topologie p -adique.*

Démonstration : Puisque la sous-variété $\mathbf{G}.\tilde{g}$ est lisse, on démontre par une méthode analogue à celle utilisée dans ([43], Théorème 1) que le fermé $(\mathbf{G}.\tilde{g})_k$ de \mathfrak{g}^* est une sous-variété k -analytique de \mathfrak{g}^* . Pour tout $f \in (\mathbf{G}.\tilde{g})_k$, l'application de \mathbf{G}_k dans $(\mathbf{G}.\tilde{g})_k$ qui à x associe $Ad^*x.f$ est une submersion. Il s'en suit que l'orbite de chaque élément de $(\mathbf{G}.\tilde{g})_k$ sous l'action de \mathbf{G}_k est ouverte dans $(\mathbf{G}.\tilde{g})_k$. Comme l'orbite $\mathbf{G}_k.g$ est le complémentaire d'une réunion de \mathbf{G}_k -orbites dans $(\mathbf{G}.\tilde{g})_k$, elle est fermée dans \mathfrak{g}^* . D'autre part, pour tout $f \in \mathbf{G}_k.g$, l'application de G dans $\mathbf{G}_k.g$ qui à x associe $Ad^*x.f$ est une submersion. Il en résulte que l'orbite $G.g$ de g sous l'action co-adjointe de G est fermée dans \mathfrak{g}^* . ■

13 Désintégration d'une mesure.

13.1 Posons $U = {}^uG$ et $\mathfrak{u} = {}^u\mathfrak{g}$. Fixons $g_0 \in \Omega_G$. Désignons par u_0 sa restriction à \mathfrak{u} . Notons \mathfrak{j} la sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}(g_0)$. Fixons un facteur réductif \mathfrak{t} de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{j} . Considérons la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$ et la décomposition duale $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{u}^*$. Alors, pour tout $g \in \Omega_G$ et pour tout $t \in \mathfrak{t}^*$, on a :

- l'orbite co-adjointe de $t + g$ sous l'action de G est fermée dans \mathfrak{g}^* ;
- $\mathfrak{g}(t + g) = \mathfrak{g}(g)$.

On peut supposer désormais que

$$\Omega_G = \mathfrak{t}^* + \Omega_G.$$

On note Ω_U l'image de Ω_G par l'application restriction de \mathfrak{g}^* à \mathfrak{u}^* . Alors Ω_U est un ouvert de Zariski non vide, G -invariant, de \mathfrak{u}^* et on a :

$$\Omega_G = \mathfrak{t}^* + \Omega_U.$$

On désigne par $\Omega_{G,u}$ les formes linéaires de type unipotent de Ω_G . On a alors

$$\Omega_G = \mathfrak{t}^* + \Omega_{G,u}.$$

Lemme 13.1.1 *La sous-algèbre \mathfrak{j} est un facteur réductif de $\mathfrak{g}(u_0)$ et tout facteur réductif de $G(g_0)$ est un facteur réductif de $G(u_0)$.*

Démonstration : Soit \mathfrak{r}_{u_0} un facteur réductif de $\mathfrak{g}(u_0)$ contenant \mathfrak{j} et \mathfrak{r} un facteur réductif de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{r}_{u_0} . Soit $X \in \mathfrak{r}_{u_0}$. Si $Y \in \mathfrak{r}$ et $Z \in \mathfrak{u}$, on a : $[X, Y] = 0$ et $\langle u_0, [X, Z] \rangle = 0$. Donc

$$\langle g_0, [X, Y + Z] \rangle = \langle g_0, [X, Z] \rangle = \langle u_0, [X, Z] \rangle = 0.$$

Si bien que $X \in \mathfrak{j}$.

Soit R_{g_0} un facteur réductif de $G(g_0)$ et R_{u_0} un facteur réductif de $G(u_0)$ contenant R_{g_0} . Soit $x \in R_{u_0}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle x.g_0, Y + Z \rangle &= \langle g_0, x^{-1}Y + x^{-1}Z \rangle = \langle g_0, Y \rangle + \langle u_0, x^{-1}Z \rangle \\ &= \langle g_0, Y \rangle + \langle u_0, Z \rangle \\ &= \langle g_0, Y + Z \rangle, \end{aligned}$$

pour tout $Y \in \mathfrak{r}$ et $Z \in \mathfrak{u}$. Donc $x \in R_{g_0}$. ■

Proposition 13.1.1 *L'orbite $G.u_0$ admet une mesure positive G -invariante.*

Démonstration : Il suffit de démontrer que le sous-groupe $G(u_0)$ est unimodulaire. Posons $\mathfrak{b} = \mathfrak{j} + \mathfrak{u}$ et b la restriction de g_0 à \mathfrak{b} . On voit \mathfrak{b} est un idéal de \mathfrak{g} et que $\mathfrak{b}(b) = \mathfrak{g}(u_0)$.

D'autre part, l'application $\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}(b)/\mathfrak{g}(g_0) \rightarrow k, (\dot{X}, \dot{Y}) \mapsto \beta_{g_0}(X, Y)$ est non dégénérée, $G(g_0)$ -invariante. Comme l'action de R_{g_0} dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ est unimodulaire donc l'action de R_{g_0} dans $\mathfrak{b}(b)/\mathfrak{g}(g_0)$ est unimodulaire. Etant donné que G est unimodulaire et l'action de R_{g_0} dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g_0)$ est unimodulaire, l'action de R_{g_0} dans $\mathfrak{g}(g_0)$ est unimodulaire. Il en résulte que l'action de R_{g_0} dans $\mathfrak{g}(u_0)$ est unimodulaire. ■

13.2 Fixons des mesures de Haar $d_{\mathfrak{g}}X$, $d_{\mathfrak{u}}X$, et $d_{\mathfrak{j}}X$ sur \mathfrak{g} , \mathfrak{u} , et \mathfrak{j} respectivement. Désignons par d_Gx la mesure de Haar sur G tangente à $d_{\mathfrak{g}}X$ et par $d_{B_{u_0}}x$ la mesure de Haar sur $B_{u_0} = G(u_0)U$ tangente à la mesure de Haar $d_{\mathfrak{b}}X = d_{\mathfrak{j}}X d_{\mathfrak{u}}Y$ sur \mathfrak{b} . La mesure de Haar quotient sur G/B_{u_0} est notée $d_{G/B_{u_0}}\dot{x}$. Désignons par $d\mu_{U.u_0}$ la mesure de Liouville sur l'orbite co-adjointe $U.u_0$.

Lemme 13.2.1 *Si φ est une fonction borélienne positive sur $G.u_0$, on pose $I_{u_0}(\varphi) = \int_{G/B_{u_0}} \int_{U.u_0} \varphi(xl) d\mu_{U.u_0}(l) d_{G/B_{u_0}}\dot{x}$. Alors, I_{u_0} définit une mesure positive G -invariante sur $G.u_0$. On la notera $\beta_{G.u_0}$.*

Maintenant, nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 13.2.1 *On suppose que g_0 est de type unipotent et que $\beta_{G.u_0}$ est une mesure de Radon sur \mathfrak{u}^* . Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$. On a :*

$$\int_{G.u_0} (\widehat{\varphi|_{\mathfrak{u}}d_{\mathfrak{u}}X})_{\mathfrak{u}}(l) d\beta_{G.u_0}(l) = \int_{\mathfrak{j}^*} \int_{\mathcal{O}_{g_0,\lambda}} (\widehat{\varphi d_{\mathfrak{g}}X})_{\mathfrak{g}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g_0,\lambda}}(l) d_{\mathfrak{j}^*}\lambda.$$

Démonstration : On a :

$$(\widehat{\varphi|_{\mathfrak{u}}d_{\mathfrak{u}}X})_{\mathfrak{u}}(l) = \int_{\mathfrak{b}^\perp \times \mathfrak{j}^*} (\widehat{\varphi d_{\mathfrak{g}}X})_{\mathfrak{g}}(\tilde{l} + \lambda_1 + \lambda_2) d_{\mathfrak{b}^\perp} \lambda_2 d_{\mathfrak{j}^*} \lambda_1,$$

où \tilde{l} est la forme linéaire sur \mathfrak{g} nulle sur \mathfrak{t} et dont la restriction à \mathfrak{u} est l . Donc

$$\begin{aligned} & \int_{G.u_0} (\widehat{\varphi|_{\mathfrak{u}}d_{\mathfrak{u}}X})_{\mathfrak{u}}(l) d\beta_{G.u_0}(l) \\ &= \int_{G/B_{u_0}} \int_{U/U(u_0)} \int_{\mathfrak{b}^\perp \times \mathfrak{j}^*} (\widehat{\varphi d_{\mathfrak{g}}X})_{\mathfrak{g}}(xy.\tilde{u}_0 + \lambda_1 + \lambda_2) d_{\mathfrak{b}^\perp} \lambda_2 d_{\mathfrak{j}^*} \lambda_1 d_{U/U(u_0)} \dot{y} d_{G/B_{u_0}} \dot{x} \\ &= \int_{\mathfrak{j}^*} \int_{G/B_{u_0}} \int_{U/U(u_0)} \int_{\mathfrak{b}^\perp} (\widehat{\varphi d_{\mathfrak{g}}X})_{\mathfrak{g}}(xy.\tilde{u}_0 + \lambda_1 + \lambda_2) d_{\mathfrak{b}^\perp} \lambda_2 d_{U/U(u_0)} \dot{y} d_{G/B_{u_0}} \dot{x} d_{\mathfrak{j}^*} \lambda_1. \end{aligned}$$

Cependant, $B_{u_0}(b) = R_{g_0}U(u_0)$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \int_{G/B_{u_0}} \int_{U/U(u_0)} \int_{\mathfrak{b}^\perp} (\widehat{\varphi d_{\mathfrak{g}}X})_{\mathfrak{g}}(xy.\tilde{u}_0 + \lambda_1 + \lambda_2) d_{\mathfrak{b}^\perp} \lambda_2 d_{U/U(u_0)} \dot{y} d_{G/B_{u_0}} \dot{x} \\ &= \int_{\mathcal{O}_{g_0,\lambda_1}} (\widehat{\varphi d_{\mathfrak{g}}X})_{\mathfrak{g}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g_0,\lambda_1}}(l). \end{aligned}$$

Si bien que l'on a :

$$\int_{G.u_0} (\widehat{\varphi|_{\mathfrak{u}}d_{\mathfrak{u}}X})_{\mathfrak{u}}(l) d\beta_{G.u_0}(l) = \int_{\mathfrak{j}^*} \int_{\mathcal{O}_{g_0,\lambda}} (\widehat{\varphi d_{\mathfrak{g}}X})_{\mathfrak{g}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g_0,\lambda}}(l) d_{\mathfrak{j}^*}\lambda. \quad \blacksquare$$

13.3 Le résultat suivant a son propre intérêt.

Proposition 13.3.1 *Soit φ une fonction borélienne positive sur \mathfrak{u}^* . L'application*

$$u \in \Omega_U \longrightarrow I_u(\varphi)$$

est borélienne.

Démonstration : Désignons par \mathbf{J} le sous-groupe connexe de \mathbf{G} d'algèbre de Lie \mathfrak{j} et par J l'image réciproque de \mathbf{J}_k dans G . On note $B = JU$. Alors B est un sous-groupe,

algébrique, normal de G , d'algèbre de Lie $\mathfrak{j} + \mathfrak{u}$. On voit que B est un sous-groupe de B_{u_0} d'indice fini. On munit B de la mesure de Haar tangente à $d_j X d_u Y$. Par un calcul élémentaire, on a :

$$I_u(\varphi) = \frac{1}{[B_u : B]} \int_{G/B} \int_{U.u} \varphi(xl) d\mu_{U.u}(l) d_{G/B} \dot{x}, \text{ pour tout } u \in \Omega_U.$$

Remarquons que

$$\int_{U.u} \varphi(xl) d\mu_{U.u}(l) = \int_{U.xu} \varphi(l) d\mu_{U.xu}(l).$$

Il suit que l'application $(x, u) \in G \times \Omega_U \mapsto \int_{U.u} \varphi(xl) d\mu_{U.u}(l)$ est borélienne. Si bien que l'application $u \in \Omega_U \rightarrow \int_{G/B} \int_{U.u} \varphi(xl) d\mu_{U.u}(l) d_{G/B} \dot{x}$ est borélienne.

Dans la suite, nous allons montrer que $u \in \Omega_U \mapsto \frac{1}{[B_u : B]}$ est borélienne. On désigne par $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des sous-groupes fermés de G que l'on munit de la topologie de Fell [15]. L'application $u \in \Omega_U \mapsto G(u)$ est borélienne. Donc $A := \{(u, G(u)), u \in \Omega_U\}$ est un borélien de $\Omega_U \times \mathcal{F}(G)$, où $\Omega_U \times \mathcal{F}(G)$ est muni de la structure borélienne produit. Il suffit maintenant de démontrer que $\alpha : (u, G(u)) \in A \mapsto [B_u : B] \in \mathbb{N}$ est borélienne. Nous allons prouver, en fait, que α est séquentiellement semi-continue inférieurement. Soit $(u_n, G(u_n))$ une suite convergente dans A vers $(u, G(u))$. On a :

$$\alpha(u, G(u)) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \alpha(u_n, G(u_n)).$$

En effet, soit m une valeur d'adhérence de la suite $(\alpha(u_n, G(u_n)))$. Il existe une sous-suite $(u_{\beta(n)}, G(u_{\beta(n)}))$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(u_{\beta(n)}, G(u_{\beta(n)})) = m$. Soit $x^1 = e, \dots, x^d$ ($d = \alpha(u, G(u))$) des éléments de $B_u = G(u)U$ tels que

$$B_u = \bigsqcup_{i=1}^d x^i B.$$

Comme U est un sous-groupe de B , on peut supposer que $x^i \in G(u)$. Il existe une suite $x_{\beta(n)}^i \in G(u_{\beta(n)})$ convergente vers x^i , $1 \leq i \leq d$. Soit $1 \leq i \neq j \leq d$. On a $x_{\beta(n)}^i (x_{\beta(n)}^j)^{-1} \rightarrow x^i (x^j)^{-1} \notin B$. Comme B est fermé dans G , il suit que, pour n assez grand, $x_{\beta(n)}^i B \cap x_{\beta(n)}^j B = \emptyset$. Si bien que, pour n assez grand, $\alpha(u_{\beta(n)}, G(u_{\beta(n)})) \geq d$. D'où $m \geq d$. \blacksquare

13.4 On désigne par $d_{\mathfrak{u}^*} l$ la mesure de Haar sur \mathfrak{u}^* duale de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{u}} X$ sur \mathfrak{u} . On a le résultat suivant.

Proposition 13.4.1 *Il existe une unique mesure borélienne positive μ_u sur $G \backslash \mathfrak{u}^*$ telle que l'on ait*

$$\int_{\mathfrak{u}^*} \varphi(l) d_{\mathfrak{u}^*} l = \int_{G \backslash \mathfrak{u}^*} d\mu_u(\omega) \int_{\omega} \varphi(l) d\beta_{\omega}(l)$$

pour toute fonction φ , borélienne positive, ou intégrable pour $d_{\mathfrak{u}^*} l$ sur \mathfrak{u}^* .

Démonstration : La démonstration de cette proposition est de même style que celle donnée par ([12], Lemme 5.1.7). ■

Soit \mathfrak{a}^* un réseau dans \mathfrak{u}^* . La proposition ci-dessus montre que pour presque tout $\omega \in G \backslash \mathfrak{u}^*$, on a :

$$\int_{\omega} 1_{\varpi^n \mathfrak{a}^*}(l) d\beta_{\omega}(l) < +\infty, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Si bien que, pour presque tout $\omega \in G \backslash \mathfrak{u}^*$, la mesure $d\beta_{\omega}$ est une mesure de Radon.

14 La mesure de Plancherel de G .

14.1 Rappelons que $\Omega_{G,u}$ est l'ensemble des formes de type unipotent contenu dans Ω_G . Soit $g \in \Omega_{G,u}$. D'après la proposition 12.1.1, il existe $x \in G$ tel que $\mathfrak{j}_g = x \cdot \mathfrak{j}$ soit l'unique facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$. On munit \mathfrak{j}_g de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{j}_g} X$, image de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{j}} X$ sur \mathfrak{j} par l'application $\mathfrak{j} \rightarrow \mathfrak{j}_g, X \mapsto x \cdot X$. Soit R_g un facteur réductif de $G(g)$ (d'algèbre de Lie \mathfrak{j}_g). On note $(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-$ l'ensemble des classes des représentations unitaires irréductibles τ de $R_g^{\mathfrak{g}}$ telle que $\tau(1, -1) = -\text{Id}$. Alors $(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-$ est un ouvert de $\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}}$ (voir [16], Corollaire du Théorème 1.3). On désigne par $d_{R_g^{\mathfrak{g}}} x$ la mesure de Haar sur $R_g^{\mathfrak{g}}$ tangente à $d_{\mathfrak{j}_g} X$ et par $d_{\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}}} \tau$ la mesure de Plancherel de $\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}}$ correspondante. Si $\tau \in (\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-$, on désigne par $\tau \otimes \chi_g$ l'élément de $Y_G(g)$ défini par

$$\tau \otimes \chi_g(xy) = \chi_g(y)\tau(x), \quad x \in R_g^{\mathfrak{g}}, y \in {}^u G(g)^{\mathfrak{g}}.$$

L'application $(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_- \rightarrow Y_G(g)$, $\tau \mapsto \tau \otimes \chi_g$ est un homéomorphisme : elle est continue bijective, l'application réciproque étant $Y_G(g) \rightarrow (\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-$, $\tau \mapsto \tau|_{R_g^{\mathfrak{g}}}$ qui est continue d'après le corollaire du théorème 1.3 de [16]. On note alors $d_g \tau$ la mesure image de $d_{\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}}} \tau$ sur $Y_G(g)$. Remarquons que cette mesure ne dépend pas du choix de R_g .

14.1.1 On désigne par Z_g le centre de $R_g^{\mathfrak{g}}$ et par $N = \{(1, -1), (1, 1)\}$. Alors Z_g est un sous-groupe fermé, d'indice fini, de $R_g^{\mathfrak{g}}$ contenant N . Soit χ_0 le caractère non trivial de N et $\widehat{Z}_{g-} = \{\chi \in \widehat{Z}_g, \chi|_N = \chi_0\}$. Alors, \widehat{Z}_{g-} est ouvert et fermé dans \widehat{Z}_g (voir [42], Chapitre 6). On munit Z_g de la mesure de Haar $d_{Z_g} z$ restriction de la mesure de Haar $d_{R_g^{\mathfrak{g}}} x$ sur $R_g^{\mathfrak{g}}$ et \widehat{Z}_{g-} de la mesure de Haar $d_{Z_g}^* \chi$ duale de $d_{Z_g} z$. Pour chaque $\chi \in \widehat{Z}_{g-}$, on pose

$$(R_g^{\mathfrak{g}})_{\chi}^{\widehat{}} = \{\tau \in \widehat{R_g^{\mathfrak{g}}} \text{ tel que } \tau|_{Z_g} = (\dim \tau)\chi\}.$$

Si I est un ensemble fini, on note $|I|$ le nombre de ses éléments. D'après ([18], Théorème 4.1), on a, pour tout $\beta \in C_c^{\infty}(R_g^{\mathfrak{g}})$,

$$\int_{(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-} \text{Tr}(\tau(\beta d_{R_g^{\mathfrak{g}}} x)) d_{\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}}} \tau = \int_{\widehat{Z}_{g-}} \sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})_{\chi}^{\widehat{}}} \dim \tau \text{Tr}(\tau(\beta d_{R_g^{\mathfrak{g}}} x)) \frac{1}{|R_g^{\mathfrak{g}}/Z_g|} d_{Z_g}^* \chi. \quad (14.1)$$

14.1.2 Fixons $0 < \varepsilon < \mathbf{a}_G$. Alors, $R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N$ est un sous-groupe ouvert compact de Z_g . On pose $(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp = \{\chi \in \widehat{Z}_g, \chi|_{R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N} = 1\}$. C'est un sous-groupe compact de \widehat{Z}_g . On munit $(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp$ de la mesure de Haar normalisée $d_\varepsilon\chi$ et $\widehat{Z}_g/(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp$ de la mesure de Haar quotient $d_{Z_g}^*\dot{\chi} = d_{Z_g}^*\chi/d_\varepsilon\chi$. On a :

$$d_{Z_g}^*\dot{\chi} = \frac{1}{mes(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)} \sum_{\chi \in \widehat{Z}_g/(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp} \delta_\chi.$$

On munit également le sous-groupe compact $(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp$ de \mathfrak{j}_g^* de la mesure de Haar normalisée et $\mathfrak{j}_g^*/(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp$ de la mesure de Haar quotient $d_{\mathfrak{j}_g}^*\bar{\lambda}$. On a :

$$d_{\mathfrak{j}_g}^*\bar{\lambda} = \frac{1}{mes(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})} \sum_{\bar{\lambda} \in \mathfrak{j}_g^*/(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp} \delta_{\bar{\lambda}}.$$

Remarquons que

$$mes(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N) = 2 mes(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p}).$$

D'autre part, chaque élément $\bar{\lambda} \in \mathfrak{j}_g^*/(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp$ définit un caractère $\psi_{\bar{\lambda}}$ de $R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N$ en posant,

$$\psi_{\bar{\lambda}}(1, -1) = -1 \text{ et } \psi_{\bar{\lambda}}(\exp_{R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}}(X)) = \varsigma(\langle \lambda, X \rangle), \text{ pour tout } X \in \mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p},$$

λ étant un relèvement de $\bar{\lambda}$ dans \mathfrak{j}_g^* . Alors, l'application $\bar{\lambda} \mapsto \psi_{\bar{\lambda}}$ est une bijection de $\mathfrak{j}_g^*/(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp$ sur $(\widehat{R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N})_- := \{\chi \in (\widehat{R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N}), \chi(1, -1) = -1\}$.

Il en résulte que, pour toute fonction α mesurable positive ou intégrable sur $\widehat{Z}_{g,-}$, l'on a :

$$\int_{\widehat{Z}_{g,-}} \alpha(\chi) d_{Z_g}^*\chi = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{j}_g^*/(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp} \int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp} \alpha(\tilde{\psi}_{\bar{\lambda}} \cdot \chi) d_\varepsilon\chi d_{\mathfrak{j}_g}^*\bar{\lambda}, \quad (14.2)$$

$\tilde{\psi}_{\bar{\lambda}}$ étant un caractère de Z_g prolongeant $\psi_{\bar{\lambda}}$.

Si bien que, pour toute fonction α mesurable positive ou intégrable sur $(\widehat{R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N})_-$, l'on a :

$$\int_{(\widehat{R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N})_-} \alpha(\tau) d_{\widehat{R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N}} \tau = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{j}_g^*/(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp} \int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp} \sum_{\tau \in (R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}})_{\tilde{\psi}_{\bar{\lambda}} \cdot \chi}} \frac{\dim \tau}{|R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}/Z_g|} \alpha(\tau) d_\varepsilon\chi d_{\mathfrak{j}_g}^*\bar{\lambda}. \quad (14.3)$$

14.2 Pour $g \in \mathfrak{g}^*$ de type unipotent et $\tau \in Y_G(g)$, on rappelle que $\pi_{g,\tau}$ est la classe de représentations unitaires irréductibles de G , associée à (g, τ) par la méthode des orbites de Kirillov-Duflo. Si $\pi_{g,\tau}$ est admissible alors $\Theta_{g,\tau}$ désigne son caractère, c'est la fonction généralisée sur G définie par la formule (6.1).

Proposition 14.2.1 Soit $g_0 \in \Omega_{G,u}$. On note u_0 sa restriction à \mathfrak{u} . On suppose que $d\beta_{G,u_0}$ est une mesure de Radon. Soit $\varphi \in C_c^\infty(G)$. Alors, pour tout $g \in G.g_0$, la fonction $\tau \mapsto \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)$, définie sur $Y_G(g)$, est mesurable et on a,

$$\int_{Y_G(g)} |\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)|_{\mathbb{C}} d_g \tau < +\infty.$$

Dans ce qui suit nous allons démontrer cette proposition.

14.2.1 Pour $m \in \mathbb{N}^\times$ et $\chi \in ((\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\varepsilon N)_-$, on note

$${}_m(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\chi = \{\tau \in (\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-, \dim \tau = m \text{ et } \tau|_{\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}}, \varepsilon N} = \chi\}.$$

Alors ${}_m(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\chi$ est une partie localement fermée de $(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-$. Elle est localement compacte.

• On suppose que le support de φ est contenu dans G_ε . On a, pour tout $\tau \in {}_m(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\chi$,

$$\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = \dim \tau \int_{\mathcal{O}_{g,\lambda}} (\varphi \circ \exp d_{\mathfrak{g}} X)_{\widehat{\mathfrak{g}}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda}}(l),$$

où $\lambda \in \mathfrak{j}_g^*$ vérifiant $\chi(\exp_G(X)) = \varsigma(\langle \lambda, X \rangle)$, pour tout $X \in \mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p}$. Ainsi, la fonction $\tau \mapsto \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)$ est constante sur ${}_m(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\chi$. Comme $((\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\varepsilon N)_-$ est au plus dénombrable, on en déduit que la fonction $\tau \mapsto \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)$ est mesurable sur $(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-$.

• Soit $s \neq 1$ un élément semi-simple de G et $0 < \varepsilon(s) < \min\{\varepsilon, a'_G(s), a''_G(s)\}$ tel que l'application : $G \times_{G(s)} G(s)_{\varepsilon(s)} \longrightarrow \mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s))$, $[x, y] \mapsto xsyx^{-1}$, soit un difféomorphisme. On suppose que $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s)))$. On a, pour tout $\tau \in {}_m(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\chi$,

$$\begin{aligned} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) &= |\det(1 - s^{-1})_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(s)}|_p \sum_{\omega_s \in \mathcal{O}_{g,\lambda} \cap \mathfrak{g}^*(s)} \phi_{g,\tau,s}(\omega_s) \\ &\int_{G/G(s)} \int_{\omega_s} (1_{\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon(s)|n_F|p}} \varphi_s^x \circ \exp d_{\mathfrak{g}(s)} X)_{\widehat{\mathfrak{g}(s)}}(l) d\mu_{\omega_s}(l) d_{G/G(s)} \dot{x}. \end{aligned}$$

Cependant, pour chaque $\tilde{x} \in R_g^{\mathfrak{g}}$, la fonction $\tau \mapsto \text{Tr } \tau(\tilde{x})$ est continue sur ${}_m(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\chi$. Ainsi, pour chaque $\omega_s \in \mathcal{O}_{g,\lambda} \cap \mathfrak{g}^*(s)$, la fonction $\tau \mapsto \phi_{g,\tau,s}(\omega_s)$ est continue sur ${}_m(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\chi$. Si bien que la fonction $\tau \mapsto \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)$ est continue sur ${}_m(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_\chi$. On conclut que la fonction $\tau \mapsto \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)$ est mesurable sur $(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-$.

• Soit S un système de représentants des G -orbites semi-simples de G . En utilisant une partition de l'unité subordonnée à $(\mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s)))_{s \in S}$, on voit que la fonction $\tau \mapsto \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)$ est mesurable sur $(\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}})_-$.

14.2.2 Soit \mathfrak{a} un réseau de \mathfrak{g} contenu dans \mathfrak{g}_ε tel que $K = \exp_G(\mathfrak{a})$ soit un sous-groupe (compact ouvert) de G et φ soit K -bi-invariante. On a :

$$\frac{1}{(\text{mes}(K))^2} 1_K * \varphi * 1_K = \varphi,$$

où on a noté, pour $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(G)$, $\varphi_1 * \varphi_2(x) = \int_G \varphi_1(y) \varphi_2(y^{-1}x) d_G y$, $x \in G$. Soit $\mathcal{H}_{g,\tau}$ une réalisation de $\pi_{g,\tau}$ et soit $v \in \mathcal{H}_{g,\tau}$. On a :

$$\langle \pi_{g,\tau}(\varphi d_G x)v, v \rangle = \frac{1}{(\text{mes}(K))^2} \langle \pi_{g,\tau}(\varphi d_G x) \pi_{g,\tau}(1_K d_G x)v, \pi_{g,\tau}(1_K d_G x)v \rangle.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($|\langle \xi, \zeta \rangle|_{\mathbb{C}} \leq \|\xi\| \cdot \|\zeta\|$, $\xi, \zeta \in \mathcal{H}_{g,\tau}$) et le fait que $\pi_{g,\tau}$ est unitaire, on a :

$$\begin{aligned} |\langle \pi_{g,\tau}(\varphi d_G x)v, v \rangle|_{\mathbb{C}} &\leq \frac{M_\varphi}{\text{mes}(K)} \langle \pi_{g,\tau}(1_K d_G x)v, \pi_{g,\tau}(1_K d_G x)v \rangle \\ &\leq M_\varphi \langle \pi_{g,\tau}(1_K d_G x)v, v \rangle, \end{aligned}$$

où $M_\varphi = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_G |\varphi(x)|_{\mathbb{C}} d_G x$. En utilisant une base hilbertienne de $\mathcal{H}_{g,\tau}$, on obtient,

$$|\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)|_{\mathbb{C}} \leq M_\varphi \Theta_{g,\tau}(1_K d_G x).$$

Soit $\lambda \in \mathfrak{j}_g^*$ tel que $\tau|_{R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}} = (\dim \tau) \psi_\lambda$. On a :

$$|\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)|_{\mathbb{C}} \leq M_\varphi \dim \tau \int_{\mathcal{O}_{g,\lambda}} (1_K \circ \exp_G d_{\mathfrak{g}} X)_{\widehat{\mathfrak{g}}}(m) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda}}(m).$$

Par conséquent, en utilisant la formule (14.3) puis la proposition 13.2.1, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{(R_g^{\mathfrak{g}})}_-} |\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x)|_{\mathbb{C}} d_{\widehat{R_g^{\mathfrak{g}}}} \tau &\leq \frac{1}{2} M_\varphi \int_{\mathfrak{j}_g^*} \int_{\mathcal{O}_{g,\lambda}} (1_K \circ \exp_G d_{\mathfrak{g}} X)_{\widehat{\mathfrak{g}}}(m) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda}}(m) d_{\mathfrak{j}_g^*} \lambda \\ &\leq \frac{1}{2} M_\varphi \int_{G.u_0} (1_{K \cap U} \circ \exp d_{\mathfrak{u}} X)_{\widehat{\mathfrak{u}}}(l) d\beta_{G.u_0}(l) < +\infty. \end{aligned}$$

Proposition 14.2.2 Soit $g_0 \in \Omega_{G,u}$ et u_0 sa restriction à \mathfrak{u} . On suppose que $d\beta_{G.u_0}$ est une mesure de Radon. Alors, pour tout $g \in G.g_0$, on a :

$$\int_{Y_{G(g)}} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) d_g \tau = \frac{1}{2} \int_{G.u_0} (\varphi|_U \circ \widehat{\exp d_{\mathfrak{u}} X})_{\mathfrak{u}}(l) d\beta_{G.u_0}(l) \quad (14.4)$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(G)$.

Grâce à la proposition ci-dessus, on pose, pour $\omega \in G \setminus \Omega_U$,

$$\Theta_\omega(\varphi d_G x) = 2 \int_{Y_G(g)} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) d_g \tau,$$

où $g \in \Omega_{G,u}$ dont la restriction à \mathfrak{u} appartient à ω .

Corollaire 14.2.1 *Soit $\varphi \in C_c^\infty(G)$. La fonction $\omega \mapsto \Theta_\omega(\varphi d_G x)$ est $d\mu_u$ -intégrable.*

14.3 Le résultat principal de cette partie est le suivant.

Théorème 14.3.1 *Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(G)$, on a :*

$$\varphi(1) = \int_{G \setminus \mathfrak{u}^*} \Theta_\omega(\varphi d_G x) d\mu_u(\omega). \quad (14.5)$$

Démonstration : Le théorème 14.3.1 résulte de la formule (14.4) et de la proposition 13.4.1. ■

15 Démonstration de la proposition 14.2.2 Soit $g \in \Omega_{G,u}$ telle que $d\beta_{G.(g|_{\mathfrak{u}})}$ soit une mesure de Radon. Soit R_g un facteur réductif de $G(g)$.

15.1 Dans ce numéro, nous allons démontrer la proposition 14.2.2 lorsque $\varphi \in C_c^\infty(G_\varepsilon)$. Soit $\bar{\lambda} \in \mathfrak{j}_g^*/(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|_{n_F|_p}})^\perp$, $\lambda \in \mathfrak{j}_g^*$ un relèvement de $\bar{\lambda}$, et $\psi_{\bar{\lambda}}$ le caractère de $R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N$:

$$\psi_{\bar{\lambda}}(1, -1) = -1 \text{ et } \psi_{\bar{\lambda}}(\exp_{R_g^{\mathfrak{g}}}(X)) = \varsigma(\langle \lambda, X \rangle), \text{ pour tout } X \in \mathfrak{j}_{g,\varepsilon|_{n_F|_p}}.$$

On désigne aussi par $\psi_{\bar{\lambda}}$ un prolongement en un caractère de Z_g . Soit $\psi \in (R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp$. Pour tout $\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})_{\widehat{\psi_{\bar{\lambda}} \cdot \psi}}$, on a,

$$\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = \dim \tau \int_{\mathcal{O}_{g,\lambda}} (\varphi \circ \exp d_{\mathfrak{g}} X)_{\widehat{\mathfrak{g}}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda}}(l).$$

Comme $\sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})_{\widehat{\psi_{\bar{\lambda}} \cdot \psi}}} (\dim \tau)^2 = |R_g^{\mathfrak{g}}/Z_g|$, on a :

$$\sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})_{\widehat{\psi_{\bar{\lambda}} \cdot \psi}}} \frac{\dim \tau}{|R_g^{\mathfrak{g}}/Z_g|} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = \int_{\mathcal{O}_{g,\lambda}} (\varphi \circ \exp d_{\mathfrak{g}} X)_{\widehat{\mathfrak{g}}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda}}(l).$$

Si bien que l'on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{j}_g^*/(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp} \int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp} \sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{\psi_{\bar{\lambda}} \cdot \psi}}} \frac{\dim \tau}{|R_g^{\mathfrak{g}}/Z_g|} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) d_\varepsilon \psi d_{\mathfrak{j}_g}^* \bar{\lambda} \\ = \int_{\mathfrak{j}_g^*} \int_{\mathcal{O}_{g,\lambda}} (\varphi \circ \exp d_{\mathfrak{g}} X)_{\widehat{\mathfrak{g}}}(l) d\mu_{\mathcal{O}_{g,\lambda}}(l) d_{\mathfrak{j}_g}^* \lambda. \end{aligned}$$

La formule (14.4) résulte alors de ce qui précède, de la formule (14.3), et de la proposition 13.2.1.

15.2 Soit s un élément semi-simple de G , $s \neq 1$, et $0 < \varepsilon(s) < \min\{\varepsilon, a_G(s), a_G''(s)\}$.

15.2.1 Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s)))$ et $\bar{\lambda} \in \mathfrak{j}_g^*/(\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp$.

Proposition 15.2.1 *On a :*

$$\sum_{\bar{\lambda}' \in (\mathfrak{j}_{g,\varepsilon(s)|n_F|p})^\perp / (\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp} \int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp} \sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{\psi_{\bar{\lambda} + \bar{\lambda}' \cdot \psi}}}} \frac{\dim \tau}{|R_g^{\mathfrak{g}}/Z_g|} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) d_\varepsilon \psi = 0. \quad (15.1)$$

Dans ce qui suit, nous allons prouver ce résultat. Soit $\bar{\lambda}' \in (\mathfrak{j}_{g,\varepsilon(s)|n_F|p})^\perp / (\mathfrak{j}_{g,\varepsilon|n_F|p})^\perp$. On note $\bar{\lambda} + \bar{\lambda}' = \bar{\lambda}_0$ et $\lambda_0 \in \mathfrak{j}_g^*$ un représentant de $\bar{\lambda}_0$.

– On suppose que $\mathcal{O}_{g,\lambda_0} \cap \mathfrak{g}^*(s) = \emptyset$. D'après le théorème 8.4.1, on a, pour tout $\psi \in (R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp$ et pour tout $\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{\psi_{\bar{\lambda}_0} \cdot \psi}}$,

$$\Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = 0.$$

– On suppose que $\mathcal{O}_{g,\lambda_0} \cap \mathfrak{g}^*(s) \neq \emptyset$. Comme $\Theta_{g,\tau}$ est G -invariante, on peut supposer désormais $s \in R_g$. On choisit $\hat{s} \in R_g^{\mathfrak{g}}$ un relevé de s . Soit $\psi \in (R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}}N)^\perp$. En appliquant successivement les théorèmes 4.3.1 et 8.4.1, on a, pour tout $\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{(\psi_{\bar{\lambda}_0} \cdot \psi)}}$,

$$\begin{aligned} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) &= \int_{G/G(s)} \int_{G(s)_{\varepsilon(s)}} \theta_{g,\tau,s}(y) \varphi(xysx^{-1}) |\det(1 - (sy)^{-1})_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(s)}|_p d_{G(s)} y d_{G/G(s)} \dot{x} \\ &= |\det(1 - s^{-1})_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(s)}|_p \sum_{\omega \in \mathcal{O}_{g,\lambda_0} \cap \mathfrak{g}^*(s)} \phi_{g,\tau,s}(\omega) \\ &\quad \int_{G/G(s)} \int_{\omega} (1_{\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon(s)|n_F|p}} \varphi_s^x \circ \exp d_{\mathfrak{g}(s)} X)_{\widehat{\mathfrak{g}(s)}}(l) d\mu_\omega(l) d_{G/G(s)} \dot{x}. \end{aligned}$$

• En premier lieu, on suppose que $\hat{s} \notin Z_g$.

Lemme 15.2.1 *On a, pour toute $G(s)$ -orbite ω dans $\mathcal{O}_{g,\lambda_0} \cap \mathfrak{g}^*(s)$,*

$$\sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{\psi_{\bar{\lambda}_0} \cdot \psi}}} \dim \tau \phi_{g,\tau,s}(\omega) = 0.$$

Il résulte du lemme ci-dessus que l'on a :

$$\sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{\psi_{\bar{\lambda}_0} \cdot \psi}}} \frac{\dim \tau}{|R_g^{\mathfrak{g}}/Z_g|} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) = 0.$$

• En deuxième lieu, on suppose que $\hat{s} \in Z_g$. Soit $\omega \in \mathcal{O}_{g,\lambda_0} \cap \mathfrak{g}^*(s)$ et $x \in G$ tel que $x.(g + \lambda_0) \in \omega$. On peut supposer que $x = 1$. On a :

$$\phi_{g,\tau,s}(\omega) = c \operatorname{Tr}(\tau(\hat{s})) = c (\dim \tau) (\psi_{\bar{\lambda}_0} \cdot \psi)(\hat{s}),$$

où c est un nombre complexe bien déterminé (voir paragraphe 8.1 pour la définition de $\phi_{g,\tau,s}$). Il en résulte que

$$\int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}} N)^{\perp}} \sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{\psi_{\bar{\lambda}_0} \cdot \psi}}} \dim \tau \operatorname{Tr}(\tau(\hat{s})) d_{\varepsilon} \psi = |R_g^{\mathfrak{g}}/Z_g| \psi_{\bar{\lambda}_0}(\hat{s}) \int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}} N)^{\perp}} \psi(\hat{s}) d_{\varepsilon} \psi.$$

– Premier cas : on suppose que $s \in R_{g,\varepsilon}$. Alors, on a :

$$\int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}} N)^{\perp}} \psi(\hat{s}) d_{\varepsilon} \psi = 1.$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\lambda}' \in (\mathfrak{g}_{g,\varepsilon(s)} |n_F|_p)^{\perp} / (\mathfrak{g}_{g,\varepsilon} |n_F|_p)^{\perp}} \int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}} N)^{\perp}} \sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{\psi_{\bar{\lambda} + \bar{\lambda}' \cdot \psi}}} \dim \tau \operatorname{Tr}(\tau(\hat{s})) d_{\varepsilon} \psi \\ = |R_g^{\mathfrak{g}}/Z_g| \psi_{\bar{\lambda}}(\hat{s}) \sum_{\psi \in (R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}} N / R_{g,\varepsilon(s)}^{\mathfrak{g}} N)^{\widehat{\psi}}} \psi(\hat{s}). \end{aligned}$$

Compte tenu du choix de $\varepsilon(s)$, on a $\hat{s} \notin R_{g,\varepsilon(s)}^{\mathfrak{g}} N$. Ainsi, le deuxième membre de l'égalité ci-dessus est égale à 0.

– Deuxième cas : on suppose que $s \notin R_{g,\varepsilon}$. Alors, il existe $\psi_0 \in (R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}} N)^{\perp}$ tel que $\psi_0(\hat{s}) \neq 1$. Par suite, on a :

$$\int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}} N)^{\perp}} \psi(\hat{s}) d_{\varepsilon} \psi = \psi_0(\hat{s}) \int_{(R_{g,\varepsilon}^{\mathfrak{g}} N)^{\perp}} \psi(\hat{s}) d_{\varepsilon} \psi = 0.$$

Ainsi, la proposition est démontrée.

15.2.2 Soit $\varphi \in C_c^{\infty}(\mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s)))$. Il résulte de la proposition 15.2.1 que l'on a :

$$\int_{Y_G(g)} \Theta_{g,\tau}(\varphi d_G x) d_g \tau = 0.$$

D'autre part, on a : $\mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s)) \cap U = \emptyset$. Si bien que l'on a :

$$\int_{G.(g|_u)} (\varphi|_U \circ \widehat{\exp} d_u X)_u(l) d\mu_{G.(g|_u)}(l) = 0.$$

15.3 Soit S un système de représentants des G -orbites semi-simples de G . La proposition 14.2.2 résulte des résultats établis dans les paragraphes 15.1 et 15.2 et d'une partition de l'unité subordonnée à $(\mathcal{W}_G(s, \varepsilon(s)))_{s \in S}$.

15.4 Démonstration du lemme 15.2.1 On note $\chi = \psi \cdot \psi_{\lambda_0}$. D'après le théorème de Frobenius, on a :

$$\bigoplus_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{\chi}}} (\dim \tau) \tau = \text{Ind}_{Z_g}^{R_g^{\mathfrak{g}}} \chi.$$

Il en résulte que l'on a,

$$\sum_{\tau \in (R_g^{\mathfrak{g}})^{\widehat{\chi}}} \dim \tau \text{Tr}(\tau(\hat{s})) = \text{Tr}((\text{Ind}_{Z_g}^{R_g^{\mathfrak{g}}} \chi)(\hat{s})).$$

La représentation induite $\text{Ind}_{Z_g}^{R_g^{\mathfrak{g}}} \chi$ agit dans l'espace \mathcal{H}_χ des fonctions continues φ de $R_g^{\mathfrak{g}}$ à valeurs dans \mathbb{C} vérifiant :

$$\varphi(xy) = \chi(y^{-1})\varphi(x), \text{ pour tout } x \in R_g^{\mathfrak{g}}, y \in Z_g.$$

On désigne par (y_1, y_2, \dots, y_m) un système représentatif de $R_g^{\mathfrak{g}}/Z_g$. On définit, pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, une fonction f_i par :

$$f_i(x) = 0 \text{ si } x \notin g_i Z \text{ et } f_i(g_i y) = \chi(y^{-1}), \text{ pour tout } y \in Z_g.$$

On vérifie que $\{f_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ est une base de \mathcal{H}_χ . Si $f \in \mathcal{H}_\chi$, on note $f^{\hat{s}}$ la fonction définie par

$$f^{\hat{s}}(x) = f(\hat{s}^{-1}x), \text{ pour tout } x \in R_g^{\mathfrak{g}}.$$

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, on note j_i l'entier de $\{1, 2, \dots, m\}$ tel que $\hat{s}y_i \in y_{j_i}Z_g$. On pose $\hat{s}y_i = y_{j_i}z_i, z_i \in Z_g$. Alors, on a :

$$f_i^{\hat{s}} = \chi(z_i)f_{j_i}.$$

Compte tenu de l'hypothèse $\hat{s} \notin Z_g$, on a $i \neq j_i$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Si bien que l'on a :

$$\text{Tr}((\text{Ind}_{Z_g}^{R_g^{\mathfrak{g}}} \chi)(\hat{s})) = 0.$$

D'où le lemme.

16 Exemple. On pose

$$G = \left\{ (a, x, y)_G = \begin{pmatrix} a & 0 & x \\ 0 & a^{-1} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in k^\times, x, y \in k \right\}.$$

Alors G est l'ensemble des points rationnels d'un groupe algébrique défini sur k . On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G :

$$\mathfrak{g} = \left\{ (x, y, z)_{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & -x & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x, y, z \in k \right\}.$$

On pose $E_1 = (1, 0, 0)_{\mathfrak{g}}$, $E_2 = (0, 1, 0)_{\mathfrak{g}}$, et $E_3 = (0, 0, 1)_{\mathfrak{g}}$. Alors, (E_1, E_2, E_3) est une base de \mathfrak{g} et on a :

$$[E_1, E_2] = E_2, [E_1, E_3] = -E_3, [E_2, E_3] = 0.$$

Si bien que \mathfrak{g} est résoluble. La mesure de Haar $d_G(a, x, y)_G = |a|_p^{-1} d\mu(a) d\mu(x) d\mu(y)$ de G est invariante par translations à gauche et à droite. Le groupe de Lie G est unimodulaire.

16.1 Orbites co-adjointes. On désigne par (E_1^*, E_2^*, E_3^*) la base duale de (E_1, E_2, E_3) . Pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in k^3$, on note $f_{\alpha, \beta, \gamma} = \alpha E_1^* + \beta E_2^* + \gamma E_3^*$ et $\mathcal{O}_{\alpha, \beta, \gamma} = G.f_{\alpha, \beta, \gamma}$. On a :

$$\mathcal{O}_{\alpha, \beta, \gamma} = \{f_{\alpha - \beta x + \gamma y, \beta a, \gamma a^{-1}}, a \in k^\times, x, y \in k\}.$$

Les orbites co-adjointes fermées dans \mathfrak{g}^* sont :

- (1) les points $f_{\alpha, 0, 0}$, $\alpha \in k$.
- (2) $\mathcal{O}_{0, 1, \gamma}$, $\gamma \in k^\times$.

Les formes linéaires fortement régulières sur \mathfrak{g} sont $f_{\alpha, \beta, \gamma}$, avec $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$. On a, pour $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$,

$$G(f_{\alpha, \beta, \gamma}) = \{(1, x, y)_G / \beta x - \gamma y = 0, x, y \in k\}.$$

Si bien que l'on a $j = 0$. On pose ainsi

$$\Omega_G = \{f_{\alpha, \beta, \gamma}, \alpha \in k, \beta, \gamma \in k^\times\}.$$

Alors, Ω_G est un ouvert de Zariski de \mathfrak{g}^* , G -invariant.

D'autre part, le radical unipotent de G est $U = \{(1, x, y)_G, x, y \in k\}$, d'algèbre de Lie

$$\mathfrak{u} = \{(0, y, z)_{\mathfrak{g}}, y, z \in k\}.$$

Pour $(\beta, \gamma) \in k^2$, on note $u_{(\beta, \gamma)} = \beta E_{2|\mathfrak{u}}^* + \gamma E_{3|\mathfrak{u}}^*$. Avec ces notations, on a :

$$\Omega_U = \{u_{(\beta, \gamma)}, \beta, \gamma \in k^\times\}.$$

Soit Γ_U le graphe de la relation d'équivalence définie par G sur Ω_U . On a :

$$\Gamma_U = \{(u_{(\beta, \gamma)}, u_{(\beta a, \gamma a^{-1})}), \beta, \gamma, a \in k^\times\}.$$

On voit que Γ_U coïncide avec l'image du plongement :

$$k^{\times 3} \longrightarrow \Omega_U \times \Omega_U, (\beta, \gamma, a) \longmapsto (u_{(\beta, \gamma)}, u_{(\beta a, \gamma a^{-1})}).$$

Il en résulte que $G \backslash \Omega_U$ admet une structure de variété k -analytique telle que la projection canonique de Ω_U dans $G \backslash \Omega_U$ soit une submersion.

Pour $\beta, \gamma \in k^{\times}$, on note $\mathcal{O}_{(\beta, \gamma)} = G \cdot u_{(\beta, \gamma)}$. On a :

$$\mathcal{O}_{(\beta, \gamma)} = \{u_{(\beta a, \gamma a^{-1})}, a \in k^{\times}\} = \mathcal{O}_{(1, \beta\gamma)}.$$

On en déduit que l'application :

$$\psi : k^{\times} \longrightarrow G \backslash \Omega_U, \gamma \longmapsto \mathcal{O}_{(1, \gamma)},$$

est un difféomorphisme.

Pour $\gamma \in k^{\times}$, on a $\mathcal{O}_{(1, \gamma)}$ est fermée dans \mathfrak{u}^* et $G(u_{(1, \gamma)}) = U$. On munit U de la mesure de Haar $d_U(1, x, y)_G = d\mu(x)d\mu(y)$, \mathfrak{u} de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{u}}(0, y, z)_{\mathfrak{g}} = d\mu(y)d\mu(z)$, et \mathfrak{u}^* de la mesure de Haar $d_{\mathfrak{u}^*}l$ duale de $d_{\mathfrak{u}}(0, y, z)_{\mathfrak{g}}$. Alors, on a :

$$\int_{\mathcal{O}_{(1, \gamma)}} \varphi(l) d\beta_{\mathcal{O}_{(1, \gamma)}}(l) = \int_{k^{\times}} \varphi(u_{(a, a^{-1}\gamma)}) \frac{d\mu(a)}{|a|_p}.$$

Ainsi, pour toute fonction φ continue à support compact dans \mathfrak{u}^* , on a :

$$\int_{\mathfrak{u}^*} \varphi(l) d_{\mathfrak{u}^*}l = \int_{k^{\times}} \int_{\mathcal{O}_{(1, \gamma)}} \varphi(l) d\mu_{\mathcal{O}_{(1, \gamma)}}(l) d\mu(\gamma).$$

16.2 Mesure de Plancherel de G . Soit $\gamma \in k^{\times}$. On désigne par χ_{γ} le caractère de U défini par :

$$\chi_{\gamma}((1, x, y)_G) = \varsigma(\langle f_{0,1,\gamma}, (0, x, y)_{\mathfrak{g}} \rangle) = \varsigma(x + \gamma y), \quad x, y \in k.$$

On note $\pi_{\gamma} = \text{Ind}_U^G \chi_{\gamma}$. Alors, π_{γ} est une représentation unitaire irréductible de G . Elle se réalise dans $L^2(k^{\times}, |x|_p^{-1} d\mu(x))$, l'action de G étant définie par :

$$\pi_{\gamma}((a, x, y)_G) \varphi(b) = \varsigma(b^{-1}x + b\gamma y) \varphi(a^{-1}b).$$

On a π_{γ} est admissible. En effet, soit K un sous-groupe compact ouvert de G . Il s'agit de démontrer que $(L^2(k^{\times}, |x|_p^{-1} d\mu(x)))^K$ est de dimension finie. Pour cela, on note $K_1 = \{a \in k^{\times} / (a, 0, 0)_G \in K\}$, $K_2 = \{(x, y) \in k^2 / (1, x, y)_G \in K\}$. Alors, K_1 (resp. K_2) est un sous-groupe compact ouvert de k^{\times} (resp. k^2). Soit $\varphi \in (L^2(k^{\times}, |x|_p^{-1} d\mu(x)))^K$ que l'on suppose non nulle. Si $b \in k^{\times}$ tel que $\varphi(b) \neq 0$ alors on a $b^{-1}x + b\gamma y \in \ker \varsigma$, pour tout $(x, y) \in K_2$. Ainsi, il existe un compact M de k^{\times} dépendant de K_2 tel que le support de φ soit contenu dans M . On note \bar{M} l'image de M dans k^{\times}/K_1

par la projection canonique de k^\times dans k^\times/K_1 . Alors \bar{M} est un ensemble fini et on a $\dim(L^2(k^\times, |x|_p^{-1}d\mu(x)))^K \leq |\bar{M}|$.

On note Θ_γ le caractère de π_γ . Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(G)$, on a :

$$\varphi((1, 0, 0)_G) = \int_{k^\times} \Theta_\gamma(\varphi d_G x) d\mu(\gamma).$$

Remerciements : *Ma reconnaissance va au Professeur P. Torasso, dont l'étendue des connaissances et la disponibilité m'ont permis de mener à bien ce présent travail. Je remercie le Professeur A. Bouaziz pour les discussions enrichissantes que nous avons eues. Je remercie le Professeur M. Duflo pour l'intérêt qu'il a montré pour mon travail. Cet article a été en partie réalisé lors d'un séjour au sein du Laboratoire de Mathématiques et Applications, UMR 6086 du CNRS et de l'Université de Poitiers, financé par une bourse de Chercheur invité de la Région Poitou-Charentes et aussi d'un séjour senior au sein du même Laboratoire dans le cadre du PHC Curien G1504.*

Références

- [1] P. Bernat et al., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris (1972).
- [2] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, New-York (1969).
- [3] A. Borel et J. P. Serre, *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne*, Comm. Math. Helv., **39** (1964), 111-164.
- [4] A. Bouaziz, *Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes*, J. Funct. Anal., **70** (1987), 1-79.
- [5] J.Y. Charbonnel et J. Dixmier, *Sur la représentation co-adjointe des algèbres de Lie résolubles*, J. Reine Angew. Math., **324** (1981), 154-164.
- [6] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie, Tome II : groupes algébriques*, Hermann, Paris, (1951).
- [7] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris (1974).
- [8] — , *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris (1964).
- [9] M. Duflo, *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta. Math., **149** (1982), 153-213.
- [10] — , *On the Plancherel formula for almost algebraic real Lie groups*, Lecture Notes in Math., **1077**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1984), 101-165.
- [11] M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne, *Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner*, Mem. Soc. Math. Fr., **15** (1984), 65-128.
- [12] M. Duflo et M. Raïs, *Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles*, Ann. Scien. Ecole Norm. Sup., **9** (1976), 107-144.

- [13] M. Duflo et M. Vergne, *Cohomologie équivariante et descente*, Astérisque, **215** (1993), 5-108.
- [14] — , *La Formule de Plancherel des Groupes de Lie Semi-simples Réels* , Adv. Stud. Pure Math., **14** (1988), 289-336.
- [15] J.M.G. Fell , *A Hausdorff topology for the closed subsets of locally compact non-Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc., **13** (1962), 472-476.
- [16] — , *The dual spaces of C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 365-403.
- [17] R. Godement , *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires*, J. Math. Pures Appl., **30** (1951), 1-110.
- [18] S. Grosser ; M. Moskowitz, *Harmonic Analysis on Central Topological Groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **156** (1971), 419-454.
- [19] Harish-Chandra, *Harmonic analysis on reductive p -adic groups*, Lecture Notes in Math., **162**, Springer-Verlag, Berlin, (1970). (Notes by G. van Dijk).
- [20] R. Howe, *Topics in harmonic analysis on solvable algebraic groups*, Pacific J. Math., **73** (1977), 383-435.
- [21] M.S. Khalgui et P. Torasso, *La formule du caractère pour les groupes de Lie presque algébriques réels*, Annal. Inst. Fourier, **52**, No. 5 (2002), 1301-1364.
- [22] — , *La formule de Plancherel pour les groupes de Lie presque algébriques réels*, J. Funct. Anal., **235** (2006), 449-542.
- [23] A.A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups* , Russian. Math. Surveys, **17** (1962), 53-104.
- [24] — , *Characters of unitary representations of Lie groups*, Func. Anal. and its App., **2** (1968), 133-146.
- [25] G. Lion et P. Perrin, *Extensions des représentations des groupes unipotents p -adiques*, Lecture Notes in Math., **880** , Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1981), 337-356.
- [26] G. Lion et M. Vergne, *The Weil representation Maslov index and theta series* , Progress in Math. **6**, Birkhauser, Boston, MA, (1980).
- [27] K. Maktouf, *La formule du caractère au voisinage des éléments semi-simples pour un groupe de Lie résoluble presque algébrique sur un corps p -adique*, Thèse de l'Université de Poitiers, (1998).
- [28] — , *Le caractère de la représentation métaplectique et la formule du caractère pour certaines représentations d'un groupe de Lie presque algébrique sur un corps p -adique*, J. Funct. Anal., **164** (1999), 249-339.
- [29] J.S. Milne, *Etale Cohomology*, Princeton Math. **33**, Princeton Univ. Press, (1980).
- [30] C. Moeglin, M.-F. Vignéras et J.-L. Waldspurger, *Correspondance de Howe sur un corps p -adique*, Lectures Notes in Math., **1291**, Springer, Berlin, (1987).
- [31] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Lectures Notes in Math., **1358**, Springer, Berlin, (1999).

- [32] P. Perrin, *Représentations de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique*, Lecture Notes in Math., **880**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1981), 370-407.
- [33] L. Pukanszky, *Unitary representations of solvable Lie groups*, Ann. Scien. Ecole Norm. Sup., **4** (1971), 457-608.
- [34] R. Rao, *On some explicit formulas in the theory of the Weil representation*, Pacific J. Math. **157**, (1993), 335-371.
- [35] R. W. Richardson, *On orbits of algebraic groups and Lie groups*, Bull. Austral. Math. Soc., **25** (1982), 1-28.
- [36] M. Rosenlicht, *A Remark on Quotient Spaces*, An. Acad. Brasil. Ciênc. **35**, No. 4 (1963), 487-489.
- [37] — , *Some rationality questions on algebraic groups*, Annali di mat. (IV). **43** (1957), 25-50.
- [38] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Lecture notes in Math., Springer, Berlin, **5** (1965).
- [39] — , *Lie algebras and Lie groups*, Lecture notes in Math., Springer, Berlin, **1500** (1992).
- [40] A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta. Math., **111** (1964), 143-211.
- [41] — , *Basic number theory*, Springer, Berlin (1967).
- [42] — , *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris (1965).
- [43] H. Whitney, *Elementary structure of real algebraic varieties*. Ann. of Math. **66** N. 3 (1957), 545-556.