

文章编号: 1003-501X(2006)08-0085-05

基于卡尔曼滤波的天文定位算法

赵海波^{1,2}, 郭立红¹, 陈长喜^{1,2}, 邹荣士^{1,2}(1. 中国科学院长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;
2. 中国科学院研究生院, 北京 100039)

摘要: 针对如何提高舰船的导航精度的问题, 提出了一种 Kalman 滤波天文定位算法。该算法根据天文三角形理论, 在确定的时间内, 利用恒星的赤经、赤纬以及利用光电经纬仪 (或其他测量设备) 输出的高度角、方位角等信息实现天文定位, 并建立了舰船动力学模型。采用稳健估计对 Kalman 滤波模型进行处理, 解决了滤波模型中非零均值系统白噪声的处理问题。采用该 Kalman 滤波对恒星的高度角数据进行滤波, 实验结果表明, 噪声为 1' 时定位误差由 0.041253° 降低为 0.010394°, 该算法提高了测量精度, 抑制了测量噪声, 有效增强了天文定位的可信度。

关键词: 天文定位; 卡尔曼滤波; 稳健估计; 天文三角形

中图分类号: U666.11

文献标识码: A

Celestial fixing algorithm based on Kalman filter

ZHAO Hai-bo^{1,2}, GUO Li-hong¹, CHEN Chang-xi^{1,2}, ZOU Rong-shi^{1,2}(1. *Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, the Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;*2. *Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China*)

Abstract: Concerning how to improve the precision of ships' navigation, a celestial fixing algorithm based on Kalman filter is put forward. It can be carried out by star's right ascension, declination, elevation angle and azimuth in the fixed time basing on the celestial spherical triangle theory. The dynamic model for the ship system is established also. The Kalman filter model is robustly estimated to solve the problem that the measurement noise in the model is not zero-mean White one. With the Kalman filter, the star's elevation angle is processed. Results show that fixing error is decreased from 0.041253° to 0.010394° on the condition that noise is 1', and the proposed algorithm can effectively improve the measurement accuracy and restrain the measurement noise, which verifies the reliability of celestial fixing.

Key words: Celestial fixing; Kalman filter; Robust estimation; Celestial spherical triangle

引 言

天文航海定位是一种古老的、独立的定位导航方法, 能够提供比较精确的水上舰艇的导航数据。在确定的时间内, 恒星的赤经、赤纬以及高度角、方位角等信息即可以实现天文定位。天文定位在计算机时代有了新的发展, 可以单独利用天文定位, 也可以与惯性导航系统组成组合导航系统, 用来校正惯性导航系统长期运行后产生的误差^[1]。同时, 由于我国不是 GPS 技术的所有国, “伽里略”计划和“北斗”计划尚未成熟, 天文定位技术成为一种重要的辅助导航系统。在天文定位中, 有关参数的测量的准确性是决定最

收稿日期: 2005-08-01; 收到修改稿日期: 2005-12-30

作者简介: 赵海波 (1978-), 男 (汉族), 吉林长春人, 博士生, 主要研究方向是组合导航和计算机控制系统。E-mail: goodmiller@163.com

终精度的决定性因素，因此，在对天文测量技术不断加强的同时，也应该对原始的测量数据进行必要的处理以提高天文定位的精度。基于此，本文分析了在天文定位中影响定位精度的因素，并提出利用卡尔曼滤波的方法对测量数据进行相关的处理，实现提高天文定位可靠性的目的。

1 天文定位的原理与误差分析

1.1 天文定位的原理

利用电子六分仪、天文经纬仪或者专用的星光潜望镜观测恒星可以测量到恒星的高度角等数据。设 3 个恒星分别为 $A_1(\alpha_1, \beta_1)$, $A_2(\alpha_2, \beta_2)$, $A_3(\alpha_3, \beta_3)$ 。其中, (α, β) 分别表示恒星的赤经和赤纬, 取其中的 A_1, A_2 , 在已知测量时的北京时间 D 的条件下, 可以组成如图 1 所示的天文球面三角形^[2]。

其中, $Z(\lambda, \varphi)$ 为观测点, P 为北极点, A'_1, A'_2 分别表示 A_1, A_2 的星下点, z_1, z_2 为天顶距, z_1, z_2 与恒星的高度角 l_1, l_2 互为余角。恒星的格林时角 T_G 可以利用世界时零时的真恒星时和测量时刻的北京时间计算出。根据球面三角形的余弦定理和余切定理, 计算出的球面三角形的各边和角为

$$s = \arccos(\sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos T) \tag{1}$$

$$\angle PA'_2 A'_1 = \text{arccotg}(\text{tg} \beta_1 \cos \beta_2 \csc T - \sin \beta_2 \text{ctg} T) \tag{2}$$

$$\angle ZA'_2 A'_1 = \arccos[\sin l_1 \csc(90 - l_2) \csc s - \text{ctg}(90 - l_2) \text{ctg} s] \tag{3}$$

$$\angle PA'_2 Z = |\angle PA'_2 A'_1 - \angle ZA'_2 A'_1| \tag{4}$$

$$\angle A'_2 P Z = \text{arccotg}(\text{tg} l_2 \sin \beta_2 \csc \angle PA'_2 Z - \cos \beta_2 \text{ctg} \angle PA'_2 Z) \tag{5}$$

则测量点 Z 的位置为

$$\begin{cases} \varphi = \arcsin(\cos \beta_2 \sin l_2 + \sin \beta_2 \cos l_2 \cos \angle PA'_2 Z) \\ \lambda = \begin{cases} 360 - (T_{G2} + T), & 180 < T_{G2} + T < 360 \\ T_{G2} + T, & 0 \leq T_{G2} + T \leq 180 \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

其中 $T = |T_{G1} - T_{G2}|$, 这样便可以计算出测量点 Z 的经纬度。但是这里要注意一点: 利用 2 个恒星能够计算出 2 个测量点的位置, 其中一个为伪船位。因此, 需要用第 3 个恒星的高度角 l_3 , 利用公式(7)

$$\sin l_3 = \sin \varphi \sin \beta_3 + \cos \varphi \cos \beta_3 \cos(T_{G3} + \lambda) \tag{7}$$

将 2 个计算后得到的经纬度带入公式(7), 如果是伪船位则不满足(7), 这样就可剔除伪船位。因此, 通过公式(1)~(7), 可以利用 3 个恒星的赤经、赤纬和高度角、方位角和测量时间来计算出测量点的经纬度。

1.2 天文定位的误差分析

如图 1 中的球面三角形 $PA'_2 Z$ 所示, Z 是测量点, 它的定位精度取决于恒星的高度 l_1, l_2, l_3 的测量精度和 $\angle PA'_2 Z$ 的计算精度。在科学技术高度发展的今天, 计算机的计算精度日益提高, $\angle PA'_2 Z$ 的计算精度已经不是主要问题。因此, 在准确的赤经和赤纬且计算准确的条件下, 天文定位的精度主要取决于测量恒星的高度角的准确度。

下面通过图 2 来分析观测高度误差对天文定位精度的影响。在实际观测中, 由于各种因素的作用, 天体高度的观测值不可能没有误差。我们假设 2 个导航星的高度角误差分别为 $\Delta l_1, \Delta l_2$, Z 为真实船位, Z' 为测量误差所导致的实测船位(为了能够比较方便的说明问题这里仅考虑误差都为偏大的情况)。在通常情况下, 观测高度的误差值远远小于天文船位圆的半径, 因此, 可以将弧 $Z'F$ 和弧 ZF 近似地看成直线。直线 ZZ' 即为真实船位和实测船位之间的距离, 也就是测量值引起的定位误差。在 $\Delta ZZ'F$ 中:

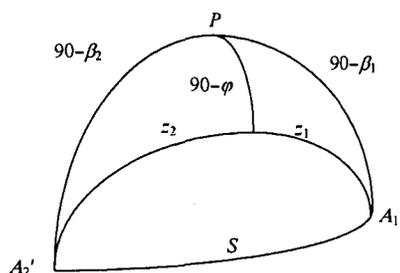


图 1 天文球面三角形
Fig.1 Celestial spherical triangle

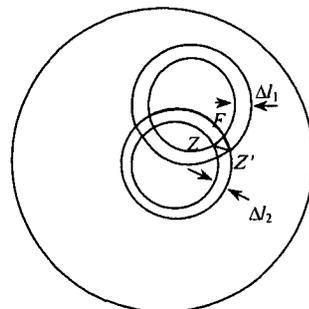


图 2 天文定位误差分析
Fig.2 Analysis of celestial fixing error

$$ZZ' = \sqrt{\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2 - 2|\Delta l_1| \times |\Delta l_2| \times \cos(\angle ZFZ')} \quad (8)$$

通过以上分析可以看出，天文定位的精度取决于测量工具的精度，对恒星的高度角的测量水平越高则定位精度越高，反之相反。

2 卡尔曼滤波数学模型的建立与应用

天文导航应用的实践表明，在对天体参数的测量中必定存在一些随机噪声和测量设备的系统误差，对测量天体参数的精确度造成很大的影响，直接影响天文导航的定位精度^[3]。利用卡尔曼滤波理论可以对天体测量参数进行数学处理，减少系统噪声和测量噪声，提高天文定位的精度^[4]。

2.1 系统状态方程的建立

确定系统的状态向量 X_k 的原则是系统的能控性。在本文中将舰船在海上的运动做为动力学系统来处理^[5]，选择如公式(9)所示的状态向量

$$X_k = [X(1) \ X(2) \ X(3) \ X(4) \ X(5) \ X(6)]^T \quad (9)$$

式中 $X(1)$ 为舰船的纬度 φ ， $X(2)$ 为舰船的经度 λ ， $X(3)$ 为海流速度的北向分量 $V_N(m/s)$ ， $X(4)$ 为海流速度的东向分量 $V_E(m/s)$ ， $X(5)$ 为舰船速度的北向分量 $Y_N(m/s)$ ， $X(6)$ 为舰船速度的东向分量 $Y_E(m/s)$ 。

系统的状态转移矩阵 $\phi_{k,k-1}$ 根据 X_k 之间的物理意义和相互关系来确定。假设舰船和海流的速度都为匀速，则：

$$\dot{X}_k = [V_N + Y_N \ V_E + Y_E \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (10)$$

对式(10)采用围绕标称值线性化的方法，在标称点用泰勒级数展开，系统的状态转移矩阵可表示为

$$\phi_{k,k-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T - \kappa T^2 / 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T - \kappa T^2 / 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \kappa T + \kappa T^2 / 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \kappa T + \kappa T^2 / 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 $\kappa = 1/3600$ ，表示海流相关时间， T 为滤波时间。

$$\text{系统噪声为} \quad W_k = [W_k(1) \ W_k(2) \ W_k(3) \ W_k(4) \ W_k(5) \ W_k(6)]^T \quad (12)$$

其中 $E[W_i] = 0$ ， $E[W_i W_j] = \tau_i^2 \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$)，具有零均值白噪声的特性。

2.2 系统量测方程的建立及对量测噪声的处理

选取 2 个导航恒星的高度角 l_1, l_2 作为量测向量，即 $Z_k = [l_1 \ l_2]^T$

$$\text{则} \quad \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = H_k X_k + V_k = H_k \cdot [\varphi \ \lambda \ V_N \ V_E \ Y_N \ Y_E]^T + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中 $H_k = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_3 & F_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ， $F_i (i=1, 2, 3, 4)$ 可以从式(1)~(6)中推导出来。 V_k 为量测噪声，在一些文献中将 V_k 作为零均值白噪声并利用卡尔曼滤波进行处理^[6]，即

$$E[V_i] = 0, E[V_i V_j] = \sigma_i^2 \delta_{ij} (i, j = 1, 2) \quad (14)$$

$$\text{方差矩阵} \quad R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

在实际的海上测量中，由于多种因素的干扰， V_i 往往不满足公式(14)和(15)，含有大量的粗差，应用稳健估计的方法来对卡尔曼滤波数学模型进行处理，设极限准则函数^[7, 8]：

$$\sum_{i=1}^2 \sigma_i^{-2} \rho(V_i) = \sum_{i=1}^2 \sigma_i^{-2} \rho(z_i - h_i X) = \min \quad (16)$$

常用的 $\rho(V_i)$ 是对称的、凸的或者在正半轴上非降的函数，式(16)对 X 求导。

令
$$\phi(V_i) = \frac{\partial[\rho(V_i)]}{\partial V_i}, \quad \omega_i = \frac{\phi(V_i)}{V_i} = \frac{\partial[\rho(V_i)]}{\partial V_i} / V_i$$

则
$$\sum_{i=1}^2 \sigma_i^{-2} \phi(V_i) h_i = \sum_{i=1}^2 \sigma_i^{-2} \omega_i V_i h_i = 0 \tag{17}$$

令等价方差的平方倒数为： $\bar{\sigma}_i^{-2} = \sigma_i^{-2} \cdot \omega_i$ ，等价方差的逆矩阵为 $\bar{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1^{-2} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_2^{-2} \end{bmatrix}$ 。

结合天文定位的量测数据的特点可以利用 IGGIII 方案确定 ρ 函数和 ω 函数：

$$\phi(V_i) = \begin{cases} V_i, & |V_i| \leq k_0 \sigma_i \\ k_0(k_1 - |V_i|)/(k_1 - k_0)^2, & k_0 \sigma_i < |V_i| \leq k_1 \sigma_i \\ 0, & |V_i| > k_1 \sigma_i \end{cases} \tag{18}$$

$$\omega_i = \begin{cases} 1, & |V_i| \leq k_0 \sigma_i \\ \chi_i, & k_0 \sigma_i < |V_i| \leq k_1 \sigma_i \\ 0, & |V_i| > k_1 \sigma_i \end{cases} \tag{19}$$

其中 $\chi_i = d_i^2 \cdot k_0 / |V_i|$ ， $d_i = (k_1 - |V_i|)/(k_1 - k_0)$ ， k_0 和 k_1 在 1.5~2.5 和 3.0~5.0 之间选择。

设
$$V_{xk} = X_k - \bar{X}_k = X_k - \phi_{k,k-1} X_{k-1} \tag{20}$$

则
$$E(V_{xk} V_k^T) = 0, \quad E(V_{xk} V_{xk}^T) = \sum \bar{X}_k, \quad E(V_{xk} V_{xj}^T) = 0 (k \neq j)$$

构造天文定位的卡尔曼滤波稳健估计模型

$$\sum_{i=1}^2 \sigma_i^{-2} \rho(V_i) + 0.5 V_{xk}^T \sum \bar{X}_k^{-1} V_{xk} = \min \tag{21}$$

则
$$X_k = \bar{X}_k + \bar{K}_k (Z_k - H_k \bar{X}_k) \tag{22}$$

$$\bar{K}_k = \sum \bar{X}_k H_k^T (H_k \sum \bar{X}_k H_k^T + \bar{R}_k)^{-1} \tag{23}$$

式中 \bar{K}_k 为经过稳健估计处理后的卡尔曼滤波增益。式(22)和(23)与一般的 Kalman 滤波在于观测方差矩阵 R_k 和等价方差矩阵 \bar{R}_k 的不同。当残差 V_k 达到可信的边界时，等价方差矩阵 \bar{R}_k 对角线元素增大， \bar{K}_k 将减小，从而量测量的修正作用减小，降低了测量粗差的影响。

舰船在海上进行天文定位时，同时测量 3 个已知恒星的高度角和方位角，并对恒星的高度角进行指标差和器差改正、眼高差和折光差以及蒙气差修正等，得到恒星的真高度角；同时，确定卡尔曼滤波的各项初值(状态向量中的经纬度初值利用未滤波的恒星高度角通过解算天文三角形获得)，通过多次滤波后即可获得处理后的恒星高度信息。第三颗恒星作为删除伪船位的恒星可以不对其数据进行滤波处理。

3 实验结果及分析

已知测量时间为 2005 年 7 月 27 日 20:25:25，利用 GPS 精确测量出船位为(120°, 35°)，天文测量的系统噪声和量测噪声为 1'，每次滤波时间间隔为 1s，数据如表 1。

选择 560 号和 570 号恒星做为导航星，导航星经滤波后的高度角如图 3 和图 4 所示。

从表 2 中的数据可以看出卡尔曼滤波能有效的减小恒星高度角的误差。利用滤波前的测量数据计算得到的船位是(125°2'28"，35°0'10")，利用滤波后的测量数据计算得到的船位是(125°0'31"，35°0'3")，定位误差从 0.041253°减小到 0.010394°，有效的提高了天文定位的精度。

表 1 天文定位测量数据

Table 1 Data of celestial fixing

Star number	α /h	β /deg	TG/deg	A/deg	E/deg
560	19.89529	24.093374	318.287755	95.311485	52.440729
570	22.121405	25.370853	284.896017	75.996849	25.884103
577	14.753916	27.053243	35.408253	265.151028	58.844753

表 2 滤波处理数据分析

Table 2 Data analysis of filter

	Elevation angle of No.560/deg	Elevation angle of No.570/deg
Before filter	52.440729	25.884103
After filter	52.415732	25.859103
Error before filter	0.035862	0.033256
Error after filter	0.008521	0.007621

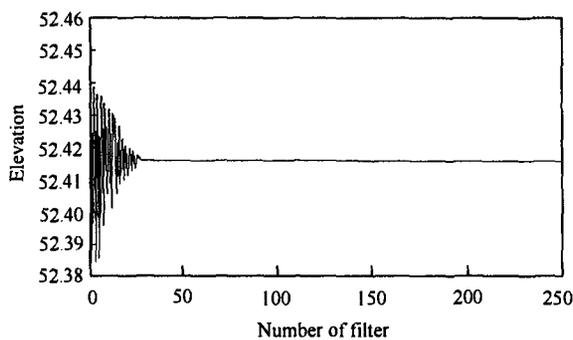


图3 560号恒星滤波后的高度角

Fig.3 Elevation angle of No.560 after filter

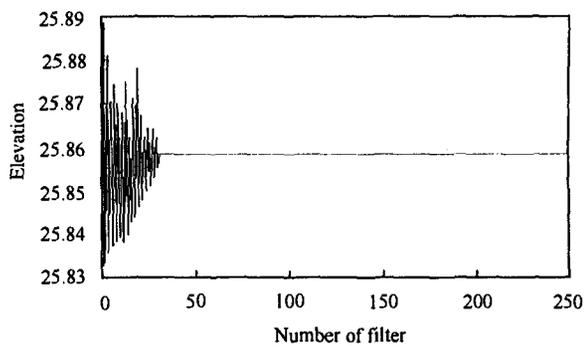


图4 570号恒星滤波后的高度角

Fig.4 Elevation angle of No.570 after filter

4 结论

首先通过解算天文三角形实现利用恒星的赤经、赤纬和高度角、方位角等信息进行天文定位,并对天文定位的误差进行分析。然后利用卡尔曼滤波的方法提高测量恒星的高度角精度,建立天文定位卡尔曼滤波的系统方程、量测方程,并利用稳健估计的方法解决量测噪声非零均值白噪声的问题。实验数据表明,利用卡尔曼滤波可以提高测量恒星的高度角精度,从而提高了天文定位的可靠性。

参考文献:

- [1] 郭立红,朱伟,李岩.基于卡尔曼滤波技术解算惯导的水平偏差[J].光学精密工程,2003,11(4):379-383.
GUO Li-hong, ZHU Wei, LI Yan. Using Kalman Filtering Technology Establishment of Attitude and Course for Measurement Ship Inertial Navigation System [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2003, 11(4): 379-383.
- [2] 毕修颖.航海计算法求天文船位的精度评定[J].大连海事大学学报,1997,23(1):37-40.
BI Xiu-ying. Accuracy analysis on celestial fixing by calculation [J]. *Journal of Dalian Maritime University*, 1997, 23(1): 37-40.
- [3] Mohamed A H, Schwarz K P. Adaptive Kalman filtering for INS/ GPS [J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 7(3): 193-203.
- [4] Mehra R K. On the Identification of Variances and Adaptive Kalman Filtering [J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1970, 15(4): 175-184.
- [5] 卫祥,唐正平.一种新型滤波器在天文定位中的应用研究[J].导航,2003,39(1):94-100.
WEI Xiang, TANG Zheng-ping. Research on Celestial Fix Based on New Type of Filter [J]. *Navigation*, 2003, 39(1): 94-100.
- [6] Paul F.Ross. Minimizing Errors in Celestial Positioning [J]. *Navigation*, 1994, 41(3): 12-15.
- [7] 孙连云.卡尔曼滤波稳健估计在天体参数测算中的应用[J].青岛大学学报,2003,18(2):20-23.
SUN Lian-yun. Application of Kalman Filter to Measurement of Celestial Bodies Parameters [J]. *Journal of Qingdao University*, 2003, 18(2): 20-23.
- [8] 文援兰,王威,杨元喜.卫星轨道卡尔曼滤波稳健估计[J].国防科技大学学报,2001,23(2):12-17.
WEN Yuan-lan, WANG Wei, YANG Yuan-xi. Robust Kalman Filtering for Satellite Orbit Determination [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2001, 23(2): 12-17.