# 依人口数移民的下临界独立同分布环境两性 G-W 分枝过程的极限行为

陈虹仿
太原理工大学数学系，太原（030024）
E-mail:chf0329@163.com

**摘　要**：Gonz á lez .M 与 Molina.M 等作者在 2000 年建立了带移民的两性 G-W 分枝过程模型，2007 年 Yong-sheng Xing 和 Shi-xia Ma 又在此基础上建立了伴有依人口数移民的两性 G-W 分枝过程.基于上述工作，本文建立了依人口数移民的随机环境两性 G-W 分枝过程，并在下临界情况下推得,当 $n\to\infty$时,$\{Z_n\}$ 依分布收敛于一个有限的，正的，非退化的随机变量.

**关键词**：两性 G-W 分枝过程；独立同分布随机环境；移民；极限行为
中图分类号：O211.65　　　文献标识码：A

## 0 引言

两性 G-W 分枝过程作为一种重要的两类型分枝模型是由 Daley 首次提出的.迄今已有很多作者对其进行过研究（见[1]），2000 年，González .M 与 Molina.M 等作者又建立了带移民的两性 G-W 分枝过程以及变化环境中的两性 G-W 分枝过程模型，对于这些比较复杂的模型，首先讨论的是其灭绝概率准则，在其基础上进一步研究其极限行为（见[2]- [3]），2006 年马世霞又建立了随机环境下两性 G-W 分枝过程模型, 其中后代概率分布受一个随机环境过程的影响, 并且对假设环境过程是独立同分布的随机变量序列或者是一般的平稳遍历过程情形进行了研究, 得到了判断过程必然灭绝与非必然灭绝的判定准则（见[4]）. 2007 年 Yong-sheng Xing 和 Shi-xia Ma 又在此基础上建立了伴有依人口数移民的两性 G-W 分枝过程(见[5]).

本文考虑依人口数移民的独立同分布随机环境两性 G-W 分枝过程, 在下临界情况下研究此过程的极限行为, 为简便约定其中涉及到的随机变量的期望均存在.

## 1 概率模型

设$(\Omega,F,P)$是给定的概率空间，$(\Theta,\Sigma)$是离散的可测空间. $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$是从$(\Omega,F,P)$映射到$(\Theta,\Sigma)$上的一个独立同分布随机环境序列. 令

$$\begin{cases} Z_0=N, \\ (F_{n+1},M_{n+1})=\sum_{j=1}^{Z_n}(f_{\xi_n j},m_{\xi_n j}), \\ Z_{n+1}=L(F_{n+1},M_{n+1})+I_{n+1}^{(L(F_{n+1},M_{n+1}))}, \quad n=0,1,2\cdots. \end{cases} \tag{1}$$

假设$\{(f_{\xi_n j},m_{\xi_n j})\}_{j=1}^{\infty}$在给定$\xi_n$条件下为取非负整数值的独立同分布二维随机变量序列，其共同的概率母函数为

$$\phi_{\xi_n}(s_1,s_2)=\sum_{k,l=0}^{\infty}p_{k,l}(\xi_n)s_1^k s_2^l, 0\le s_1,s_2\le 1.$$

其中$p_{k,l}(\xi_n)$表示第$n$代中的任一个配对单元在环境变量$\xi_n$的条件下生$k$个雌性和$l$个

雄性个体的条件概率. 配对函数 $L: Z^{+}\times Z^{+}\rightarrow Z^{+}$,满足 $L(x,y)\le xy$. $I_n^{(k)}$ 表示第 $n$ 代移入的配对单元数，它仅仅依赖于当前参与配对的人口数. 我们假设，对任意的 $k=0,1,\cdots$，随机变量 $I_n^{(k)}(n=1,2,\cdots)$ 是独立同分布的. 则称 $\{Z_n\}$ 为依人口数移民的随机环境 $\{\xi_n\}$ 的两性 G-W 分枝过程.

(对 $\forall n=1,2,\cdots$ 都成立)，我们称 $I_n^{(k+1)}$ 被 $I_n^{(k)}$ 随机控制，且 $P(I_{n+1}^{(0)}=1)>0$.

本文考虑模型（1）下移民序列的一个可能的情况，即 $\left\{I_n^{(k)}\right\}_k$ 满足 $P(I_n^{(k+1)}\le I_n^{(k)})=1$

**性质 1** 若 $g(\cdot)$ 为有界增函数，那么有 $P(I_n^{(k+1)}\le I_n^{(k)})=1$ 等价于

$Eg(I_n^{(k+1)})\le Eg(I_n^{(k)})$

证明 “$\Rightarrow$” 因为 $P(I_n^{(k+1)}\le I_n^{(k)})=1$，所以有 $I_n^{(k+1)}\le I_n^{(k)}\quad a.s.$ .

又因为 $g(\cdot)$ 为有界增函数，所以 $g(I_n^{(k+1)})\le g(I_n^{(k)})\quad a.s.$ .

因此得出 $Eg(I_n^{(k+1)})\le Eg(I_n^{(k)})$.

“$\Leftarrow$” 因为 $Eg(I_n^{(k+1)})\le Eg(I_n^{(k)})$，即 $\int_\Omega g(I_n^{(k+1)})dP\le\int_\Omega g(I_n^{(k)})dP$. (a)

令 $B=\{g(I_n^{(k+1)})>g(I_n^{(k)})\}$，则由测度论中的定理：设 $f,g$ 是测度空间 $(X,F,\mu)$ 上的可测函数，那么如果 $f,g$ 积分存在且 $f\ge g\quad a.e.$ ，则 $\int_X fd\mu\ge\int_X gd\mu$ (见[7]) 有

$$\int_B(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))dP=\int_\Omega(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))I_B dP\ge 0 \quad . \tag{b}$$

再由（a）式，我们故可由测度论中的定理：设 $f,g$ 是测度空间 $(X,F,\mu)$ 上积分存在的可测函数，如果 $\int_X fd\mu+\int_X gd\mu$ 有意义，则 $f+g\quad a.e.$ 有定义，其积分存在且 $\int_X(f+g)d\mu=\int_X fd\mu+\int_X gd\mu$ (见[7]) 推得

$$\begin{aligned}\int_B(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))dP&=\int_\Omega(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))I_B dP\\&=\int_\Omega(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))dP-\int_\Omega(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))I_B dP\\&\le\int_\Omega(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))dP-\int_\Omega(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))dP\\&=0.\end{aligned} \tag{c}$$

由(b) (c)可得
$$\int_\Omega(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))I_B dP$$
$$=\int_B(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))dP$$
$$=0.$$

由测度书论中的结论：设 $f$ 是测度空间 $(X,F,\mu)$ 上的可测函数，如果 $f=0\quad a.e.$，则 $\int_X fd\mu=0$；反之，如果 $\int_X fd\mu=0$ 且 $f\ge 0\quad a.e.$，则 $f=0\quad a.e.$ (见[7])，上式意味着

$$(g(I_n^{(k+1)})-g(I_n^{(k)}))I_B=0\quad a.s. .$$

但在 B 上，有 $g(I_n^{(k+1)})>g(I_n^{(k)})$ .

故此时必须有 $I_B=0\quad a.s.$ . 即 $P(B)=0$.

所以 $P(g(I_n^{(k+1)})\le g(I_n^{(k)}))=1$.

再加上 $g(\cdot)$ 为有界增函数，即证得 $P(I_n^{(k+1)}\le I_n^{(k)})=1$.

为了研究 $\{Z_n\}$ 的极限行为，我们也类似地引入每个配对单元的平均增长率的概念，这将对我们后面的研究有很大的作用.

**定义 1** 对于一个伴有依人口数移民的随机环境下的两性 G-W 分枝过程，当第 $n$ 代人口数为 $k$ 时，定义第 $n$ 代每个配对单元的平均增长率为

$$r_k=\frac{1}{k}E[Z_{n+1}|Z_n=k]=\frac{1}{k}E[L(\sum_{j=1}^{k}(f_{\xi_n j},m_{\xi_n j})+I_{n+1}^{L(\sum_{j=1}^{k}(f_{\xi_n j},m_{\xi_n j}))})],n=0,1,\cdots,k=1,2\cdots.$$

**性质 2** 假设在模型（1）下，$\{Z_n\}$ 满足条件 $P(I_n^{(k+1)}\le I_n^{(k)})=1\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\lambda_0=EI_n^{(0)}<\infty$,那么极限 $\lim_{k\to\infty}r_k=r$ 存在.

证明 由 $Eg(I_n^{(k+1)})\le Eg(I_n^{(k)})$，得

$$\lambda_k:=EI_n^{(k)}<\lambda_0:=EI_n^{(0)},k=1,2,\cdots\ .$$

我们记 $\beta_k:=L(\sum_{j=1}^{k}(f_{\xi_n j},m_{\xi_n j}))$ , $\psi(k,\xi_n):=EL(\sum_{j=1}^{k}(f_{\xi_n j},m_{\xi_n j}))$ .

那么我们有 $\lim_{k\to\infty}r_k=\lim_{k\to\infty}k^{-1}E\left[Z_{n+1}|Z_n=k\right]$

$$=\lim_{k\to\infty}k^{-1}E[L(\sum_{j=1}^{k}(f_{\xi_n j},m_{\xi_n j}))+I_{n+1}^{(\beta_k)}]$$

$$=\lim_{k\to\infty}(k^{-1}\psi(k,\xi_n)+k^{-1}EI_{n+1}^{(\beta_k)})$$

$$=\lim_{k\to\infty}k^{-1}\psi(k,\xi_n).$$

由于 $k^{-1}\psi(k,\xi_n)=k^{-1}EL(\sum_{j=1}^{k}(f_{\xi_n j},m_{\xi_n j}))$ 具有上可加性，所以 $\lim_{k\to\infty}k^{-1}\psi(k,\xi_n)$ 存在，并将其极限记为 $r(Ef_{\xi_n 1},Em_{\xi_n 1})$.

故有 $\lim_{k\to\infty}r_k=r=r(Ef_{\xi_n 1},Em_{\xi_n 1})$. 从而证得结论.

## 2 模型(1)的主要结论及证明

不失一般性，对固定的 $n$，我们可以假设 $P\{I_n^{(0)}=1\}>0$. 也就是说，当配对单元数为"0"时，至少有一个配对单元被移入，且我们约定 $EI_n^{(0)}<\infty$. 令 $S$ 记为 $\{Z_n\}$ 的状态空间，$S(1):=\{i:P(Z_m=i\text{ 对某些 }m\ge 0|Z_0=1)>0\}$.

**引理 1** 如果$P(f_{\xi_0 1}=0,m_{\xi_0 1}=0)>0$，那么$S(1)$是模型(1)中$\{Z_n\}$的状态空间$S$的子集，且$S(1)$为不可约的非周期闭集.

证明 由$S(1)$的定义易知 $S(1)\subseteq S$.

进一步，对任何一个状态$k\in S(1)$，我们有

$$
\begin{aligned}
P(Z_{m+1}=1|Z_m=k) &\geq P(f_{\xi_{m}i}=0,m_{\xi_{m}i}=0,i=1,\cdots,k,I_{m+1}^{(0)}=1)\\
&\geq P(f_{\xi_m 1}=0,m_{\xi_m 1}=0)^k P(I_{m+1}^{(0)}=1)>0. \qquad \text{(d)}
\end{aligned}
$$

即$S(1)$中的每一个状态均只需一步就到达状态“1”. 由$S(1)$的定义和（d）式，我们可得$S(1)$是一个不可约的非周期闭集.

**引理 2** 令$\{x_n\}$是由$S(1)$中所有元素组成的不可约马氏链，其中所有的状态都是非负整数. 假设存在$M>0$，使得对所有的$n$都有$E\left[x_n|x_0=1\right]\leq M$，且状态“1”是最小的本质态，那么$\{x_n\}$是正常返的.

证明 （反证法） 如果状态“1”是非正常返的，

记$p_{11}^{(n)}=P(x_{m+n}=1|x_m=1)$，$n\geq 0$，那么有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{11}^{(n)}=0$.

由于$S(1):=\{i:P(Z_m=i$ 对某些 $m\geq 0|Z_0=1)>0\}$，$S(1)$是模型(2)中$\{Z_n\}$的状态空间$S$的一个子集，且为不可约非周期闭集，所以其状态都互通.

故对每个 $i\in S,\exists l_i>0$，使得 $p_{i1}^{(l_i)}>0$.

那么对$\forall n>l$，$p_{11}^{(n)}=\sum\limits_{j\in s}p_{1j}^{(n-l_i)}p_{j1}^{l_i}\geq p_{1i}^{(n-l_i)}p_{i1}^{(l_i)}\geq 0$.

令$n\to\infty$，上式两边同时取极限得

$$0=\lim_{n\to\infty}p_{11}^{(n)}\geq(\lim_{n\to\infty}p_{1i}^{(n-l_i)})p_{i1}^{(l_i)}\geq 0.$$

由夹逼定理有 $(\lim\limits_{n\to\infty}p_{1i}^{(n-l_i)})p_{i1}^{(l_i)}=0$.

又因为 $p_{i1}^{(l_i)}>0$，因此有$\lim\limits_{n\to\infty}p_{1i}^{(n-l_i)}=0$.

所以$\lim\limits_{n\to\infty}p_{1i}^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}p_{1i}^{(n-l_i)}=0$. 从而进一步有$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{M}p_{1i}^{(n)}=0$.

那么我们有 $\limsup\limits_{n\to\infty}E[x_n|x_0=1]$

$$
\begin{aligned}
&\geq\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=M+1}^{\infty}ip_{1i}^{(n)}\\
&\geq\limsup_{n\to\infty}(M+1)\sum_{i=M+1}^{\infty}p_{1i}^{(n)}\\
&=(M+1)\limsup_{n\to\infty}(1-\sum_{i=1}^{M}p_{1i}^{(n)})
\end{aligned}
$$

$= M + 1.$

与引理中的假设矛盾，所以“1”是正常返的，从而由不可约知$\{x_n\}$所有状态都是正常返的. 从而证得结论.

**引理 3** 设 $j \in S$ 是非常返状态或零常返状态，则$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \quad \forall i \in S$ (见[8]) .

**定理 1** 如果$P(f_{\xi_0 1} = 0, m_{\xi_0 1} = 0) > 0$，且$\limsup_{k\to\infty} r_k < 1$，那么当$n \to \infty$时，$\{Z_n\}$依分布收敛到一个正的，有限的，非退化的随机变量.

证明　在假设的前提下，模型（2）中的$\{Z_n\}$为不可约马氏链. 由于 L 是非降的配对函数，因此有$P(Z_n \geq 1) = 1, n = 1, 2, \cdots$. 进一步，如果“$k$”是一个本质态，就可得$k \geq 1$，也即“1”是最小的本质态.

考虑引理 4.2.2，要证明$\{Z_n\}$是正常返的,我们只需证明$\limsup_{n\to\infty} E[Z_{n+1} | Z_0 = 1]$是有限的即可.

由下临界性，可令$k_1 > 0, r' < 1$,使得$r_k < r'$,对所有的$k > k_1$都成立.

再令$C = \max_{0 \le k \le k_1} E[Z_{n+1} | Z_n = k]$.那么

$$E[Z_{n+1} | Z_n] \leq r' Z_n + C.$$

因此，$\limsup_{n\to\infty} E[Z_{n+1} | Z_0 = 1] = \limsup_{n\to\infty} E[E[Z_{n+1} | Z_n] | Z_0 = 1]$

$$\leq r' \limsup_{n\to\infty} E[Z_n | Z_0 = 1] + C$$

$$\limsup_{n\to\infty} E[Z_{n+1} | Z_0 = 1] \leq (1 - r')^{-1} C < \infty.$$

即证得 $\{Z_n\}$是正常返的. 再由马氏链理论可得结论成立.

## 参考文献

[1]　Daley D J. Extinction conditions for certain bisexual Galton-Watson processes [J]. Z Wahr，1968，9：315-322．
[2]　González. M，Molina.M．, Mota.M. Limit behaviour for subcritical bisexualGalton-Watson branching process with immigration [J]． Stat Probab Letts, 2000, 49: 19-24.
[3]　Gonza’lez M, Molina M, Mota M. A note on bisexual Galton-watson branching processes with immigration [J]. Extr. Math., 2001, 16(3): 361-365.
[4]　Ma Shixia．Bisexual Galton-Watson branching processes in random environemts [J]．Acta Math Appl Sinica，2006，22：1-10．
[5]　Xing Yongsheng, MaShixia. Limit behaviour of the bisexual Galton-Watson branching processes with population-size-
dependent immigration [J] J.Biomathematics, 2007, 22(4)：599-604.
[6]　Daley D J，HullD A，Taylor J M．Bisexual Galton-Watson branching processes with superadditivemating funtions [J]．J Appl Prob，1986，23：585-600．
[7]　程士宏. 测度论与概率论基础 [M]. 北京：北京大学出版社，2004.
[8]　毛用才，胡奇英. 随机过程 [M]. 西安：西安电子科技大学出版社，1998.

# Limit Behaviour for a Subcritical Bisexual Galton-Watson Branching Processes with Population-Size-Dependent Immigration in Independentand Identically Distributed Random Environments

Chen Hongfang
Department of Mathematics,Taiyuan University of Technology, Taiyuan (030024)

**Abstract**

A kind of modified bisexual Galton-Watson branching processes models allowing immigration was introduced by Gonzalez M, Molina etal in 2000. On this basis, a bisexual Galton-Watson branching processes allowing population-size-dependent immigration is considered by Yong-sheng Xing and Shi-xia Ma in 2007. Based on these foundations, a bisexual Galton-Watson branching processes in random environments allowing population-size-dependent immigration is considered in this paper, and for the subcritical case, that convergence in distribution of $\{Z_n\}$ to a limit, positive and non-degenerate random variable as $n \to \infty$ is given.

**Keywords:** bisexual Galton-Watson branching processes;independent and identically distributed random environments;with immigration; limit behaviour