基于半差分格式的欧式看涨期权定价模型数值解法

牛成虎
（中国矿业大学理学院，江苏 徐州 221008）

摘要：本文主要研究了欧式看涨期权定价模型的一种数值解法，利用半差分技术对以构造的偏微分方程做离散处理，并引入四阶 Lagrange 插值多项式对边界进行拓展，使得所有网格点均在离散域中，数值实例验证了本文方法的有效性。

关键词：期权定价；半差分；欧式期权；数值解； Black-Scholes

中图分类号：O242，F830.91

Numerical Solution of European Call Option Pricing Model with Semidiscretization Technique

Niu Chenghu
(College of Science,China University of mining and Technology,JiangSu XuZhou 221008)

Abstract: INumerical method of European call option pricing model is provided in this paper. Partial differential equation, which adopted fourth-order Lagrange interpolating polynomial to expand boundary values making all the neighbors mesh internal nodes in domain, was discredited by the semidiscretization technique. Numerical results coincide with the theoretical results.

Keywords: OptionPrice;SemidiscretizationTechnique;EuropeanCallOption;NumericalSolution;Black-Scholes

0 引言

期权定价问题是金融数学和金融工程的核心问题之一。1973 年 Black-Scholes 模型[1]在期权定价方面取得了空前成功，随之广泛的应用于实际经济投资中去。但金融商品频繁交易的同时不光要求精确的定价模型，同时还要求快速反应的机制，这对期权定价模型的计算速度提出了较高的要求，大量的学者在这方面不断深入研究。文献[2]中，作者总结了求解欧式期权定价模型的差分法、二叉树法，这些方法的有效性已经得到充分的证明，并已应用到实际的交易中；李东和金朝嵩[3]利用小波分析的方法给出了美式期权定价模型的数值解；吴建祖和宣慧玉[4]则通过最小二乘蒙特卡洛模拟的方法对美式期权价格做了估计。但这些方法要么计算量较大，要么精度受限，本文在此基础上利用半差分法，构造了欧式看涨期权所满足的半差分方程，数值实例说明本文的方法是有效可行的。

1 预备知识

文献[1]中建立了欧式看涨期权所满足的微分方程及终值条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \\ V(S,T)=\max(S-K,0) \end{cases} \tag{1.1}$$

模型(1.1)的求解区域为半带状规划区域 $(S,t)\in(0,+\infty)\times[0,T]$，显然，当 $S\to 0$ 时，

作者简介：牛成虎（1986-），男，硕士，主要研究方向：期权定价与风险管理，金融数值计算. E-mail: nch2005@126.com

期权一定不会执行，那么此时期权价值趋近于零，即期权的下边界可表示成：

$$V(0,t)=\lim_{S\to 0}V(S,t)=\lim_{x\to -\infty}V(e^x,t)=0 \qquad (1.2)$$

另一方面，当标的股票价格足够大时，我们几乎可以肯定期权到期后被执行，所以，当 $S\to +\infty$ 时，期权的上边界可表示为：

$$V(+\infty,t)=\lim_{S\to +\infty}V(S,t)=\lim_{x\to +\infty}V(e^x,t)=e^{-r(T-t)}V(e^x,T) \qquad (1.3)$$

但在实际交易中，标的股票价格总不会出现为零或无穷大的情况，所以，对股票价格定义一个足够小的值为其下界 $S_{\min}(S_{\min}>0)$，一个足够大的值为其上界 $S_{\max}(S_{\max}<+\infty)$，则 $S\in[S_{\min},S_{\max}]$。即

上边界：

$$V(S_{\min},t)=0 \qquad (1.4)$$

下边界：

$$V(S_{\max},t)=e^{-r(T-t)}V(e^x,T) \qquad (1.4)$$

2 离散过程

令 $\tau=T-t$，则微分方程(1.1)可转化为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial \tau}-\frac{1}{2}\sigma^2S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}-rS\dfrac{\partial V}{\partial S}+rV=0\\ V(S,0)=\max(S-K,0)\end{cases} \qquad (2.1)$$

对空间做离散化处理，作等距划分如下：

$$S_i=S_{\min}+ih,\quad i=0,1,2,\cdots,N \qquad (2.2)$$

其中 $h=\dfrac{S_{\max}-S_{\min}}{N}$ 为步长。

利用四阶差分构造计算格式

$$V\approx V_i$$

$$\frac{\partial V}{\partial S}\approx\frac{V_{i-2}-8V_{i-1}+8V_{i+1}-V_{i+2}}{12h};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\approx\frac{-V_{i-2}+16V_{i-1}-30V_i+16V_{i+1}-V_{i+2}}{12h^2};$$

将上式代入(2.1)可得以下方程：

$$\frac{dV}{d\tau}=BV(\tau)+\omega \qquad (2.3)$$

其中，$V=[V_1,V_2,\cdots,V_{N-1}]^T$

$$B=\begin{bmatrix}\gamma_1 & \delta_1 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \xi_3 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \xi_4 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{N-3} & \beta_{N-3} & \gamma_{N-3} & \delta_{N-3} & \xi_{N-3}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \alpha_{N-2} & \beta_{N-2} & \gamma_{N-2} & \delta_{N-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1}\end{bmatrix}_{N-1\times N-1} \tag{2.4}$$

以及

$$\omega=\begin{bmatrix}\alpha_1V_{-1}+\beta_1V_0\\ \alpha_2V_0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \xi_{N-2}V_N\\ \delta_{N-1}V_N+\xi_{N-1}V_{N+1}\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

所涉及各个参数分别为：

$$\alpha_i=-\frac{\sigma^2S_i^2}{24h^2}+\frac{rS_i}{12h};\beta_i=\frac{2\sigma^2S_i^2}{3h^2}-\frac{3rS_i}{3h};\gamma_i=-\frac{5\sigma^2S_i^2}{4h^2}-r$$
$$\delta_i=\frac{2\sigma^2S_i^2}{3h^2}+\frac{3rS_i}{3h};\xi_i=-\frac{\sigma^2S_i^2}{24h^2}-\frac{rS_i}{12h}; \tag{2.6}$$

3 半差分格式的构造

在计算中将要涉及V_{-1},V_0,V_N,V_{N+1}这几个值，所以在此引入四阶 Lagrange 插值多项式对边界做拓展，使得所有的差分网格点处于离散域中。

$$\begin{aligned}&V_{-1}=10V_1-20V_2+15V_3-4V_4;\\&V_0=4V_1-6V_2+4V_3-V_4;\\&V_N=4V_{N-1}-6V_{N-2}+4V_{N-3}-V_{N-4};\\&V_{N+1}=10V_{N-1}-20V_{N-2}+15V_{N-3}-4V_{N-4};\end{aligned} \tag{3.1}$$

结合(2.3)-(2.6)上述半差分问题可转换成

$$\frac{dV}{d\tau}=AV(\tau) \tag{3.2}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \xi_3 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \xi_4 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{N-3} & \beta_{N-3} & \gamma_{N-3} & \delta_{N-3} & \xi_{N-3}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{N-2N-4} & a_{N-2N-3} & a_{N-2N-2} & a_{N-2N-1}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{N-1N-4} & a_{N-1N-3} & a_{N-1N-2} & a_{N-1N-1}\end{bmatrix}_{N-1\times N-1} \tag{3.3}$$

$V_i(0)=\max(S_i-K,0),1\le i\le N-1$

系数矩阵前两行及最后两行所涉及到的参数分别如下：

$$a_{11}=\gamma_1+10\alpha_1+4\beta_1;a_{12}=\delta_1-20\alpha_1-6\beta_1;a_{13}=\xi_1+15\alpha_1+4\beta_1;a_{14}=-4\alpha_1-\beta_1;$$
$$a_{21}=4\alpha_2+\beta_2;a_{22}=\gamma_2-6\alpha_2;a_{23}=\delta_2+4\alpha_2;a_{24}=\xi_2-\alpha_2;$$
$$a_{N-2N-4}=\alpha_{N-2}-\xi_{N-2};a_{N-2N-3}=\beta_{N-2}+4\xi_{N-2};a_{N-2N-2}=\gamma_{N-2}-6\xi_{N-2};$$
$$a_{N-2N-1}=\delta_{N-2}+4\xi_{N-2};a_{N-1N-4}=-\delta_{N-1}-4\xi_{N-1};a_{N-1N-3}=\alpha_{N-1}+4\delta_{N-1}+15\xi_{N-1};$$
$$a_{N-1N-2}=\beta_{N-1}-6\delta_{N-1}-20\xi_{N-1};a_{N-1N-1}=\gamma_{N-1}+4\delta_{N-1}+10\xi_{N-1}; \quad (3.4)$$

其他参数与(2.6)相同。

那么半差分方程(3.2)的解如下：

$$V=e^{A\tau}V(0) \quad (3.5)$$

其中 $V(0)=[V_1(0),V_2(0),\cdots,V_{N-1}(0)]^T$

4 数值实例

对方程(1.1)，在文献[6]有具体的解析表达式以及推导过程，可用如下定理加以描述。

定理 1：标准欧式看涨期权定价公式为

$$V=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (3.6)$$

其中 $d_1=\dfrac{\ln(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$

我们将以此为标准来检验本文方法的有效性。

对算例中所设涉及到的参数分别赋值如下：

$\sigma=0.2,r=0.04,K=40,t=0,T=0.5$

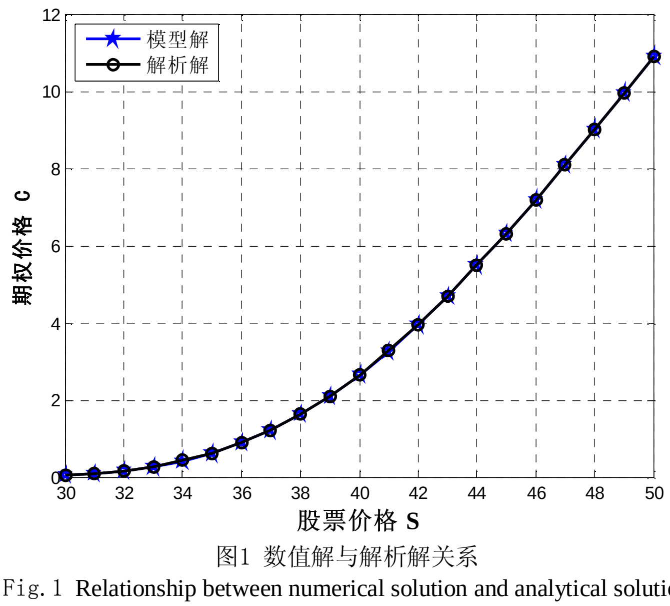

图1 数值解与解析解关系

Fig. 1 Relationship between numerical solution and analytical solution

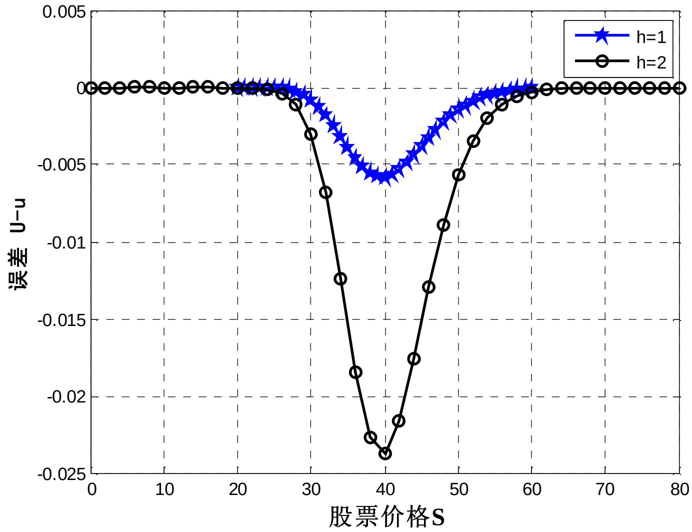

图2 数值解所产生的误差
Fig. 2 Error of numerical solution

计算结果表明本文方法是十分有效地，能够较好的逼近精确解，图 2 中反映出来的误差非常小(最大误差也能控制在 0.025 以内)，说明该方法具有较高的精度，并且该方法计算简便，容易操作，可以作为欧式看涨期权一种较好的数值处理方法。

[参考文献] (References)

[1] Black.F, Scholes.M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81 (3) : 637 - 659.
[2] [美]约翰·赫尔.期权、期货与衍生证券[M].张陶伟,译.北京:华夏出版社,1997
[3] 李东,金朝嵩.美式看跌期权定价中的小波方法[J].经济数学,2003,20(4)
[4] 吴建祖,宣慧玉.美式期权定价的最小二乘蒙特卡洛模拟[J].统计与决策,2006,1
[5] 李庆扬,王能超,易大义.数值分析(第 4 版)[M].北京:清华大学出版社,2008
[6] 姜礼尚.期权定价的数学模型和方法[M].北京:高等教育出版社,2003.
[7] 姜礼尚.金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M].北京:高等教育出版社, 2008.