p(t)-Laplace 常微分方程的 Dirichlet 边值问题

周仕敏
河海大学理学院，江苏南京 (210098)

摘　要：讨论加权 p(t)-Laplace 常微分方程

$$\begin{cases} -(w(t)|u'(t)|^{p(t)-2}u'(t))' + w(t)f(t,u(t)) = 0, & t\in(a,b) \\ u(a)=u(b)=0, & a<b. \end{cases}$$

在一定条件下证明了解的存在性。

关键词：加权常微分方程；解的存在性

1．引言

设 $N\ge 1$, $f:[a,b]\times R^N \to R^N$ 连续，

（H_1）$\exists R>0$, 对所有满足 $|u(t)|=R$ 的 u 有 $\langle f(t,u),u\rangle \ge 0$, $t\in[a,b]$.

（H_2）$\exists R>0$, 和线性向量场 V, 使得：对 $\forall u\in R^N$, $\langle Vu,u\rangle = |u|^2, \langle V^*u,u\rangle = |u|^2$, 且对所有满足 $|u(t)|=R$ 的 u 有 $\langle f(t,u),Vu\rangle \ge 0$, $\langle f(t,u),V^*u\rangle \ge 0$.

2000 年，Mawhin [1] 证明了 p-Laplace 方程

$$(\psi_p(u'))' = f(t,u), \tag{1.1}$$

其中 $\psi_p: R^N \to R^N$ 定义为：

$$\psi_p(u) = \begin{cases} |u|^{p-2}u, & 若\ u\ne 0, \\ 0, & 若\ u=0. \end{cases} \tag{1.2}$$

在满足（H_1）条件下，其 Dirichlet 问题解的存在性。

本人在文献 [8] 中，将 Mawhin 结论中的条件 （H_1）放弱为条件（H_2），得到同样的结论。

2001 年，范先令 [2] 证明加权 p(t)-Laplace 方程

$$\begin{cases} -(w(t)|u'(t)|^{p(t)-2}u'(t))' + w(t)f(t,u(t)) = 0, & t\in(a,b) \\ u(a)=u(b), & a<b. \end{cases} \tag{1.3}$$

在（H_1） 条件下解的存在性。

令 $p_- = \min_{t\in[a,b]} p(t)$, $p_+ = \max_{t\in[a,b]} p(t)$, 则 $1<p_-<p_+<\infty$. (1.4)

$p(t)\in C([a,b],R^1)$, $w(t)\in C([a,b],R^1)$, $a<b$, 对 $\forall t\in(a,b)$, $w(t)>0$ 且满足 $\exists s\in(1,p_-)$ 使得 $w^{\frac{1}{1-s}}\in L^1(a,b)$. (1.5)

基本符号定义如下：$I=(a,b)$,

$L^{p(t)}(I,R^N,wdt)=\left\{u\,|\,u:\int_I |u|^{p(t)}\,w(t)dt<\infty\right\}$, 其范数定义为：

$|u|_{p(t),w}=|u|_{L^{p(t)}}\,(I,R^N,wdt)=\inf\left\{\lambda>0:\int_I \left|\frac{u}{\lambda}\right|^{p(t)}w(t)dt\le 1\right\}$.

$W^{1,p(t)}(I,R^N,wdt)=\left\{u\in L^{p(t)}(I,R^N,wdt);\ u'\in L^{p(t)}(I,R^N,wdt)\right\}$，其范数定义为：$\|u\|_W=\|u\|_{W^{1,p(t)}}=|u|_{p(t),w}+|u'|_{p(t),w}$.

$W_0^{1,p(t)}(I,R^N,wdt)=\left\{u\in W^{1,p(t)}(I,R^N,wdt);\ 且\mathrm{u(a)=u(b)=0}\right\}$，其范数定义为：$\|u\|_0=\|u\|_W$.

其中关于 $L^{p(t)},W^{1,p(t)}$ 的介绍见参考文献 [3]。

为方便起见，记 $X=W_0^{1,p(t)}(I,R^N,wdt)$, $\int\cdot=\int_I\cdot$.

引理 1.1.：(见 [3,4]) $L^{p(t)},W^{1,p(t)},W_0^{1,p(t)}$ 都是可分的自反的 Banach 空间。

引理 1.2.： (见 [4,5]) $|u|_{p(t)}\le c|u'|_{p(t)}$， $u\in W_0^{1,p(t)}$， $c>0$ 为一常数。

定义 $T:X\to X^*$ 为 $\langle T(u),v\rangle=\int |u'|^{p(t)-2}u'v'dt,\ \ \forall v\in X$.

$F:X\to X^*$ 为 $\langle F(u),v\rangle=\int f(t,u)vdt,\ \ \forall v\in X$.

引理 1.3.：(见 6]) $T:X\to X^*$ 是一有界，连续且严格单调算子。

引理 1.4.：(见 [2]) $F:X\to X^*$ 满足当 X 中的 $u_n\to u$ 时，对应 X^* 中的 $F(u_n)\to F(u)$.

引理 1.5.： (见 [2]) $W^{1,p(t)}(I,R^N,wdt)\ \mathrm{a}\ \ C(\bar{I},R^N)$.

定理 1.6.：若 $f:[a,b]\times R^N\to R^N$ 连续，则问题 (1.3) 有一个解。

证明：Q f 连续，$\therefore$ 对所有的 $t\in[a,b]$, $u\in R^N$，有常数 $M>0$, 使得 $|f(t,u)|\le M$.

由引理 1.4，1.3 知 $(T+F):X\to X^*$ 有界，连续，伪单调。(见 [7] P586.)

若 $\|u\|_0\to\infty$, 则

$$\frac{\langle (T+F)(u),u\rangle}{\|u\|_0}=\frac{\int |u'|^{p(t)}\,dt+\int f(t,u)udt}{\|u\|_0}$$

$$\geq \frac{\|u\|_0^{p_-} - M\int |u|\,dt}{\|u\|_0}$$

$$\geq \frac{\|u\|_0^{p_-} - cM\|u\|_0}{\|u\|_0} \to \infty.$$

$\therefore T+F$ 强制。

又 Q 在自反 Banach 空间上的有界单调强制算子是满射，

$\therefore$ 存在 $u \in X$，使得 $T(u)+F(u)=0.$

即 $\int |u'(t)|^{p(t)-2}u'(t)v'(t)dt + \int f(t,u(t))v(t)dt = 0, \ \forall v \in X.$

$\therefore u$ 是 (1.3) 的解。

2. 主要定理和结论

定理 2.1.：若（H_2）成立，则 (1.3) 至少有一个满足 $|u(t)| \leq R$ 的解 $u.$

证明：定义 $\rho_R : R^N \to R^N$ 为 $\rho_R(u) = \begin{cases} u, & |u| \leq R \\ \dfrac{Ru}{|u|}, & |u| > R \end{cases}$. 显然 ρ_R 在 R^N 上连续且有界。考虑

$$\begin{cases} -(w(t)|u'(t)|^{p(t)-2}u'(t))' + w(t)f(t,\rho(u(t))) = 0, & t \in (a,b) \\ u(a)=u(b)=0. \end{cases} \tag{2.1}$$

由引理 1.6 知，问题 (2.1) 有一个解 $u \in W_0^{1,p(t)}(I,R^N,wdt)$. 由引理 1.5 知，$u \in C(\overline{I},R^N)$. 由 (2.1) 知 $|u'(t)|^{p(t)-2}u'(t) \in C^1(\overline{I},R^N)$，而对所有的 $t \in I, w(t)>0$，则 $u \in C^1(\overline{I},R^N)$. 接下来证对所有的 $t \in I$，$|u(t)| \leq R$ 都成立，即 u 是 (1.3) 的解。

由 (2.1)，有

$$\left\langle w(t)|u'(t)|^{p(t)-2}u'(t), Vu(t)\right\rangle' = w(t)|u'(t)|^{p(t)} + \left\langle w(t)f(t,\rho_R(u(t))), Vu(t)\right\rangle \tag{2.2}$$

且对每一个 $|u(t)|>R,\ t\in[a,b]$，有 $|\rho_R(u(t))| = |(R/|u(t)|)u(t)| = R.$

由 (2.2) 和（H_2）得

$$\left\langle w(t)|u'(t)|^{p(t)-2}u'(t), Vu(t)\right\rangle' \geq 0. \tag{2.3}$$

则

$$\left\langle u'(t), Vu(t)\right\rangle' \geq 0. \tag{2.4}$$

将 V 换成 V^* 同理可得 $\left\langle u'(t), V^*u(t)\right\rangle' \geq 0$，则

$$\langle Vu'(t),u(t)\rangle' \geq 0. \tag{2.5}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned}[(\frac{1}{2}|u(t)|^2)']' &= [\frac{1}{2}\langle Vu(t),u(t)\rangle']' \\ &= \frac{1}{2}[\langle Vu'(t),u(t)\rangle + \langle Vu(t),u'(t)\rangle]' \\ &= \frac{1}{2}[\langle Vu'(t),u(t)\rangle' + \langle Vu(t),u'(t)\rangle'] \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

若存在 $t_1 \in [a,b]$, 使得 $|u(t_1)| > R$. 由于 $|u(a)| = |u(b)| = 0 < R$, 由 $t \in [a,b]$ 上 $u(t)$ 的连续性，可以找到 τ 和 $\sigma > \tau$ 使得

$$|u(\tau)| = R, \quad |u(\sigma)| = \max_{t\in[a,b]}|u(t)| > R, \quad |u(t)| > R, t \in [\tau,\sigma].$$

由于 σ 是 $|u(t)|$ 的极值点，有 $(\frac{|u(\sigma)|^2}{2})' = 0.$

由 (2.6) 知，$(\frac{1}{2}|u(t)|^2)'$ 在 $[\tau,\sigma]$ 上递增，所以

$$(\frac{1}{2}|u(t)|^2)' \leq (\frac{1}{2}|u(\sigma)|^2)' = 0.$$

则 $\frac{1}{2}|u(t)|^2$ 在 $[\tau,\sigma]$ 上递减。所以有

$$\frac{R^2}{2} < \frac{|u(\sigma)|^2}{2} \leq \frac{|u(\tau)|^2}{2} = \frac{R^2}{2}.$$

矛盾。定理得证。

推论：考虑

$$\begin{cases} -(|u'(t)|^{p(t)-2}u'(t))' + f(t,u(t)) = 0, & t \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0, & a < b. \end{cases} \tag{2.7}$$

若（H_2）成立，则 (2.7) 至少有一个满足 $|u(t)| \leq R$ 的解 u.

将定理 2.1 中 $w(t) \equiv 1$, 则结论显然成立。

参考文献

[1] Mawhin Jean, Some boundary value problems for Hartman-type perturbations of the ordinary vector p-Laplacian, [J].Jour. Nonl Ana TMA,2000,40:497-503.
[2] X.L.Fan, H.Q.Wu, F.Z.Wang, Hartman-type results for p(t)-Laplacian systems,Nonlinear Anal.52(2003)585-594.
[3] X.L.Fan, D.Zhao, On the space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ J.Math.Anal.Appl.262(2001)749-760.
[4] X.L.Fan, Y.Z.Zhao, D.Zhao, Compact imbedding theorems with symmetry of Strauss-Lions type for the space $W^{1,p(x)}(\Omega)$, J.Math.Anal.Appl.255(2001)333-348.
[5] D.Zhao, The local regularity of weak solutions of elliptic equations of divergence form with p(x)-growth conditions, Doctoral Dissertation, Lanzhou University,Lanzhou, China, 1998.
[6] X.L.Fan, p(x)-Laplace operator, J.Gansu Education College(NS)13(1)(1999)1-5.
[7] E.Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Ⅱ/B: Nonlinear Monotone Operators, Springer, New York,1990.
[8] S.M.Zhou, T.Q.An, Boundary-value problems of p-Laplacian ordinary differential equations, J.Suzhou Science and Technology University, Vol.23 No.2, 2006.

The Dirichlet Boundary-value Problems of p(t)-Laplacian Ordinary Differential Equations

Zhou Shimin
College of Science, Hohai University, Nanjing（210098）

Abstract
In this paper, we consider the weighted p(t)-Laplacian ordinary differential system
$$\begin{cases} -(w(t)\,|u'(t)|^{p(t)-2}\,u'(t))' + w(t)\,f(t,u(t)) = 0, & t\in(a,b) \\ u(a)=u(b)=0, & a<b. \end{cases}$$
We obtain the existence of its solution on some conditions.
Keywords：weighted p(t)-Laplacian ordinary differential system; existence of its solution