

## 比例速率约束下 OFDMA 系统近似最优的资源分配算法

陈瑾平 李春国 杨绿溪\*

(东南大学信息科学与工程学院 南京 210096)

**摘要:** 中继协作 OFDMA 系统以及非中继 OFDMA 系统, 在比例速率公平性约束下的无线资源分配问题, 是含非线性等式约束的混合离散型优化问题, 很难得到满足实时性要求的近似最优算法。该文分别基于这两种系统在速率公平性约束下的等价优化模型, 提出拉格朗日松弛的联合优化算法。算法的关键在于 OFDMA 系统的渐进强对偶性, 这个性质使得多项式时间算法的设计成为可能。该文算法的复杂度与系统载波数目成线性关系; 仿真结果表明, 算法的性能极好地逼近最优分配方案性能。

**关键词:** OFDMA 系统; 比例公平; 中继; 资源分配; 近似最优

中图分类号: TN92

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2011)05-1147-07

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2010.00934

## Near-optimal Resource Allocation Algorithms for OFDMA Systems with Proportional Rate Constraints

Chen Jin-ping Li Chun-guo Yang Lu-xi

(School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** The joint resource allocation issue in OFDMA systems or relay-based OFDMA systems with proportional fairness constraints is a mixed discrete programming issue including nonlinear equality constraints, which is hard to tackle efficiently and near optimally. In this paper, an algorithms to solve these two non-convex problems are proposed by Lagrangian dual relaxation based on the equivalent forms. The key in the algorithms is the so-called asymptotic strong duality for OFDMA systems. The asymptotic strong duality suggests that it may be possible to devise polynomial time approximation schemes. These algorithms have the computational complexity linear with the number of subcarriers. Numerical results show that the proposed algorithms can be near optimal to the globally optimal solutions.

**Key words:** OFDMA systems; Proportional fairness; Relay; Resource allocation; Near-optimal

### 1 引言

OFDMA系统资源包括多维自由度(子载波, 功率, 中继等), 动态分配资源对系统性能的提升起着关键作用, 然而大多数资源分配问题都属于 NP-hard问题(最优求解复杂度与载波的数目成指数关系), 所以研究重点集中在寻找次优算法或近似最优算法<sup>[1,2]</sup>。

文献[3]的贪婪算法为每个子载波选择信道最好的用户并基于注水原理分配功率; 文献[4]针对多中继单用户系统, 提出对偶方法进行近似最优的资源分配; 文献[5]通过约束松弛的方法, 将混合离散型问题变换为凸优化问题求解, 追求最大的系统效用; 文献[6]是松弛方法在中继系统下的应用。文献[7,8]针对系统用户具有最小的速率要求, 分别提出资源

分配的次优和近似最优算法。然而, 以上的工作都没有考虑用户之间速率的比例公平性。

文献[9]研究了非中继系统下的max-min问题, 优化目标为系统中最小用户速率最大化。在大多数实际通信系统中, 不同业务类型的用户有不同的速率要求, 被赋予不同的系统资源分配优先权; 所以, 用户速率比例公平性约束下的资源优化问题具有实际的意义(max-min为其特例, 速率比例为1:1)。然而, 比例速率约束下系统的资源分配, 是含非线性等式约束的混合离散型优化问题。文献[10]采用分步分配资源的次优算法, 首先分配子载波, 然后再分配功率使得用户速率满足比例约束条件; 文献[11]是文献[10]方法在单中继多用户情形下的推广。这两种算法都没能对资源进行联合优化, 在用户信道质量差异较大的情况下, 系统有一定的容量损失, 且用户速率不能较理想地满足比例关系。文献[12]的部分内容中, 基于文献[13]的工作, 提出一种二分逐次逼近的近似最优算法, 但复杂度较高  $O(N \log_2(\epsilon \sqrt{N}))$  ( $\epsilon$  为较大初始误差值), 实时性较

2010-08-31 收到, 2010-12-06 改回

国家重点基础研究发展计划(2007CB310603), 国家自然科学基金(61071113)和国家科技重大专项(2009ZX03003-004)资助课题

\*通信作者: 杨绿溪 lxyang@seu.edu.cn

差。

文献[14]分析了功率约束下OFDMA系统吞吐量最大化问题的渐进强对偶性,即随子载波数目的增大,原优化问题及其对应对偶优化问题之间的最优对偶间隙渐进趋小为零,文献[15]给出更为严谨的理论分析和证明。本文针对用户比例公平性约束条件,首先给出等价的优化形式(epigraph form)<sup>[16]</sup>,消除问题中所包含的非线性等式约束,便于进一步求解;并基于OFDMA系统渐进强对偶性,提出拉格朗日松弛的资源分配算法,该算法分成两步,第1步使用修正的椭圆算法求解对偶问题最优解,第2步基于对偶框架下的最优解,比例缩放每个子载波分配功率,得到满足原问题功率约束条件的近似最优解,无需求解非线性等式约束原问题。算法充分考虑了无线资源的联合优化,系统吞吐量性能极好地逼近最优方案上界,同时满足严格的速率公平性约束条件;算法复杂度与载波数目成线性关系。

## 2 系统模型

本文假定基站可得到所有信道的瞬时状态信息,采用中心控制的方法完成资源分配。

### 2.1 非中继系统

考虑多用户OFDMA系统下行链路,系统内有  $M$  个用户,  $N$  个载波,系统总带宽为  $B$ ,基站总功率约束  $P_T$ 。 $h_{m,n}$ ,  $p_{m,n}$  分别为基站与用户  $m$  之间载波  $n$  的信道增益及分配功率,  $N_0$  为加性高斯白噪声的功率谱密度。每个子载波的信息传输率可表示为

$$r_{m,n} = \log_2 \left( 1 + \frac{p_{m,n} h_{m,n}^2}{N_0 B / N} \right) = \log_2 (1 + p_{m,n} H_{m,n})$$

系统动态资源分配的目标是:在满足用户之间速率严格比例关系的前提下,对频带和功率资源联合优化,使得系统吞吐量最大。

用户之间的速率比例约束为

$$r_1 : r_2 : \dots : r_M = \frac{1}{\phi_1} : \frac{1}{\phi_2} : \dots : \frac{1}{\phi_M} \quad (1)$$

由于非线性等式约束式(1)的存在,使得资源分配问题更为复杂。本文引入辅助变量  $t$ ,得到该优化问题等价的数学模型(epigraph form)如下:

$$\left. \begin{aligned} \max \quad & \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} t \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{m,n} \leq P_T \\ & \phi_m \sum_{n=1}^N r_{m,n} \geq t, \forall m \\ & p_{m,n} \geq 0, \forall m, n \\ & p_{m_i, n} p_{m_j, n} = 0, \forall m_i, m_j, m_i \neq m_j \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

问题式(2)的第2个约束条件强制用户之间满足速率比例关系,最后一个约束表示每一子载波只能被一个用户占用,这是典型的混合离散型优化问题,属于NP-hard问题。理论上,离散型最优解可以通过穷举搜索的方法获得,然而所有可能的子载波分配将有  $M^N$  种。式(2)满足渐进强对偶性,所以本文通过拉格朗日松弛的方法,求得原问题的近似最优解。

### 2.2 中继协作系统

考虑单中继协作的资源分配算法,稍做修改,可推广至多中继系统。OFDMA系统下行通信链路,由于信道衰减太大或障碍物阻断信号等原因,基站通过解码转发中继与用户协作传输信号,即由两跳链路完成通信。设中继采用时分双工(TDD)方式共享同一子载波。

系统中有  $M$  个用户,  $N$  个载波,系统总带宽为  $B$ ,基站和中继分别具有各自功率约束  $P_S$  和  $P_R$ 。 $h_{s,m,n}$ ,  $p_{s,m,n}$  分别为基站与用户  $m$  之间子载波  $n$  的第1跳的信道增益及分配功率; $h_{r,m,n}$ ,  $p_{r,m,n}$  分别为基站与用户  $m$  之间子载波  $n$  第2跳的信道增益及分配功率。 $N_0$  为加性高斯白噪声功率谱密度。

对解码转发中继,同一条子载波的最优功率分配满足  $p_{s,m,n} H_{s,m,n} = p_{r,m,n} H_{r,m,n}$ ,所以每个子载波  $n$  经两跳链路的信息传输率为

$$\begin{aligned} r_{m,n} &= \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{p_{r,m,n} |h_{r,m,n}|^2}{N_0 B / N} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 (1 + p_{r,m,n} H_{r,m,n}) \end{aligned}$$

参照2.1节,比例速率约束下中继协作OFDMA系统资源优化问题为

$$\left. \begin{aligned} \max \quad & \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} t \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{r,m,n} \frac{H_{r,m,n}}{H_{s,m,n}} \leq P_S \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{r,m,n} \leq P_R \\ & \phi_m \sum_{n=1}^N r_{m,n} \geq t, \forall m \\ & p_{r,m,n} \geq 0, \forall m, n \\ & p_{r,m_i, n} p_{r,m_j, n} = 0, \forall m_i, m_j, m_i \neq m_j \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

## 3 联合的子载波分配、功率控制算法

### 3.1 非中继系统下的资源分配

**3.1.1 对偶问题的最优求解** 问题式(2)的拉格朗日函数如下:

$$L(t, \mathbf{p}, \lambda, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} t + \lambda \left( P_T - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{m,n} \right) + \sum_{m=1}^M \mu_m \left( \phi_m \sum_{n=1}^N r_{m,n} - t \right) \quad (4)$$

分析其对偶函数：

$$g(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \sup_{t, \mathbf{p}} L(t, \mathbf{p}, \lambda, \boldsymbol{\mu}) = \lambda P_T + \sup_t \left( \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} t - \sum_{m=1}^M \mu_m t \right) + \sup_{\{p_{m,n}\}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (\mu_m \phi_m r_{m,n} - \lambda p_{m,n}) = \begin{cases} \lambda P_T + \sup_{\{p_{m,n}\}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (\mu_m \phi_m r_{m,n} - \lambda p_{m,n}), \\ \sum_{m=1}^M \mu_m = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} \\ \infty, \text{ 其它} \end{cases} \quad (5)$$

所以，相应的对偶优化问题如下：

$$\left. \begin{aligned} \min g(\lambda, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{s.t. } \lambda \geq 0, \boldsymbol{\mu} \geq 0 \\ \sum_{m=1}^M \mu_m = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

显然，对于给定的  $\{p_{m,n}\}$ ，拉格朗日函数式(4)都是  $(\lambda, \boldsymbol{\mu})$  的线性函数，其对偶函数式(5)必是凸函数<sup>[16]</sup>。而且优化问题式(6)只有线性约束条件存在，所以式(6)是凸优化问题。

对偶问题式(6)的约束条件中，包含约束条件  $\sum_{m=1}^M \mu_m = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m}$ ，为求解该优化问题，我们用

$\mu_M = \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} - \sum_{m=1}^{M-1} \mu_m$  代入，以消去等式约束，

于是得到如下等价的优化问题：

$$\left. \begin{aligned} \min \tilde{g}(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) \\ \text{s.t. } C1: \lambda \geq 0 \\ C2: \tilde{\mu}_m \geq 0, \forall m \in \{1, \dots, M-1\} \\ C3: \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} - \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{\mu}_m \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{g}(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) &= \lambda P_T + \sum_{n=1}^N \tilde{g}_n(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) \\ \tilde{g}_n(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) &= \sup_{\{p_{m,n}\}} \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} (\tilde{\mu}_m \phi_m r_{m,n} - \lambda p_{m,n}) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} - \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{\mu}_m \right) \phi_M r_{M,n} - \lambda p_{M,n} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由原问题式(2)约束条件可知，每一条子载波只能分配给一个用户。对于给定的  $(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}})$ ，当子载波  $n$  分配给用户  $m$  时，式(8)是一个凸优化问题，由KKT条件，可以得到最优的功率分配。

$$p_{m,n}^* = \left[ \frac{\tilde{\mu}_m \phi_m}{\lambda \ln 2} - \frac{1}{H_{m,n}} \right]^+, \quad \forall m \in \{1, \dots, M-1\}$$

$$p_{M,n}^* = \left[ \frac{\left( \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} - \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{\mu}_m \right) \phi_M}{\lambda \ln 2} - \frac{1}{H_{M,n}} \right]^+$$

本文中， $[x]^+ = \max(x, 0)$

对于子问题式(8)的求解，即是对于子载波  $n$ ，选择用户  $m$  使式(8)最大。

$$m_n^*(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) = \arg \max_{m \in \{1, \dots, M\}} \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} (\tilde{\mu}_m \phi_m r_{m,n}^* - \lambda p_{m,n}^*) + \left[ \left( \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} - \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{\mu}_m \right) \phi_M r_{M,n}^* - \lambda p_{M,n}^* \right] \right\}, \forall n$$

$$\text{所以有 } p_{m,n}^*(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) = \begin{cases} p_{m,n}^*, & m = m_n^*(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \forall n$$

对于目标函数为不可微对偶函数的凸优化问题，可考虑用收敛速度较快的椭圆算法求解。

因为在本文中，对偶问题式(7)不仅仅有非负的拉格朗日乘子约束  $C1, C2$  存在，还出现不等式约束  $C3$ ，我们不得不考虑求解优化问题收敛过程中可能出现椭圆中心落入不可行域的情形，所以，本文对椭圆算法进行如下修正：

(1)当椭圆中心不满足约束条件  $C1, C2$  时，椭圆算法收敛的次梯度为

$$\nabla = -\mathbf{e}_m \in R^M$$

$m$  为  $[\lambda, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_{M-1}]^T$  中任一不满足条件的变量序号， $\mathbf{e}_m$  为第  $m$  个变量为1的单位向量。

(2)当椭圆中心不满足约束条件  $C3$  时，算法收敛的次梯度为

$$\nabla = [0, 1, \dots, 1]^T \in R^M$$

(3)当约束条件  $C1, C2, C3$  都满足时，收敛的次梯度是

$$\nabla = [\nabla \lambda, \nabla \tilde{\mu}_1, \dots, \nabla \tilde{\mu}_{M-1}]^T \in R^M$$

$$\nabla \lambda = P_T - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{m,n}^*(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}})$$

$$\nabla \tilde{\mu}_m = \sum_{n=1}^N \left[ \phi_m r_{m,n}^*(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) - \phi_M r_{M,n}^*(\lambda, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) \right], \quad \forall m \in \{1, \dots, M-1\} \quad (9)$$

式(9)中, 次梯度的求解过程如下:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\lambda', \tilde{\mu}') &= \lambda' P_T + \sup_{\{p_{m,n}\}} \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^N (\tilde{\mu}'_m \phi_m r_{m,n} - \lambda' p_{m,n}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^N \left[ \left( \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} - \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{\mu}'_m \right) \phi_M r_{M,n} - \lambda' p_{M,n} \right] \right\} \\
&\geq \lambda' P_T + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^N (\tilde{\mu}'_m \phi_m r_{m,n}^* (\lambda, \tilde{\mu})) \\
&\quad - \lambda' p_{m,n}^* (\lambda, \tilde{\mu}) + \sum_{n=1}^N \left[ \left( \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} - \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{\mu}'_m \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \phi_M r_{M,n}^* (\lambda, \tilde{\mu}) - \lambda' p_{M,n}^* (\lambda, \tilde{\mu}) \right] \\
&= \tilde{g}(\lambda, \tilde{\mu}) + (\lambda' - \lambda) \\
&\quad \cdot \left[ P_T - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{m,n}^* (\lambda, \tilde{\mu}) \right] + \sum_{m=1}^{M-1} (\tilde{\mu}'_m - \tilde{\mu}_m) \\
&\quad \cdot \sum_{n=1}^N \left[ \phi_m r_{m,n}^* (\lambda, \tilde{\mu}) - \phi_M r_{M,n}^* (\lambda, \tilde{\mu}) \right]
\end{aligned}$$

因为对偶问题的最优解  $(\lambda^*, \tilde{\mu}^*)$  满足KKT条件,

$\frac{\partial L(t, \mathbf{p}, \lambda^*, \tilde{\mu}^*)}{\partial p_{m,n}} = 0$ , 所以, 可得到最优解的取值范围如下:

$$\left. \begin{aligned}
0 \leq \lambda^* &\leq \max_{\substack{m \in \{1, \dots, M\} \\ n \in \{1, \dots, N\}}} \left\{ \frac{\phi_m H_{m,n}}{\ln 2} \right\} \\
0 \leq \tilde{\mu}_m^* &\leq 1, \quad \forall m \in \{1, \dots, M-1\}
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

根据式(10), 可确定算法的初始椭圆。

**3.1.2 原问题的近似最优求解** 当得到对偶问题的最优解  $(\lambda^*, \tilde{\mu}^*)$  时, 在给定的  $(\lambda^*, \tilde{\mu}^*)$  下, 可得到对偶框架下子载波分配  $\{m_n^*(\lambda^*, \tilde{\mu}^*)\}$  和功率分配  $\{p_{m,n}^*(\lambda^*, \tilde{\mu}^*)\}$  的最优情况。当子载波数目一定时, 最优对偶间隙总是存在的, 对偶最优解的功率分配可能不能满足原问题的约束条件, 由此, 我们仍然需要求解原问题的近似最优解。

考虑到OFDMA系统的渐进强对偶性, 本文基于对偶问题框架下最优的子载波分配, 通过功率等比例缩放的方法重新分配子载波上的功率, 以满足原问题的约束条件, 如下:

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{m,n}^* (\lambda^*, \tilde{\mu}^*) \\
p_{m,n}^+ &= p_{m,n}^* (\lambda^*, \tilde{\mu}^*) \frac{P}{P}, \quad \forall m \in \{1, \dots, M\}, \forall n
\end{aligned}$$

**3.1.3 复杂度分析** 以上基于拉格朗日松弛的算法中, 椭圆算法收敛的复杂度为  $O(M^2)$ , 而每次迭代中最优  $\{p_{m,n}^*(\lambda, \tilde{\mu})\}$  搜索过程的复杂度  $O(MN)$ , 所以本文算法的复杂度为  $O(M^3N)$ , 与子载波数目成线

性关系。穷举法的复杂度为  $O(M^N)$ ; 文献[12]的近似最优算法的计算复杂度为  $O(M^3N \log_2(\epsilon\sqrt{N}))$ 。

### 3.2 中继系统下的资源分配

**3.2.1 对偶问题的最优求解** 问题式(3)的拉格朗日函数如下:

$$\begin{aligned}
L(t, \mathbf{p}, \lambda, \rho, \boldsymbol{\mu}) &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} t + \lambda \left( P_S - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{r,m,n} \frac{H_{r,m,n}}{H_{s,m,n}} \right) \\
&\quad + \rho \left( P_R - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{r,m,n} \right) \\
&\quad + \sum_{m=1}^M \mu_m \left( \phi_m \sum_{n=1}^N r_{m,n} - t \right)
\end{aligned}$$

其对偶函数为

$$g(\lambda, \rho, \boldsymbol{\mu}) = \sup_{t, \mathbf{p}} L(t, \mathbf{p}, \lambda, \rho, \boldsymbol{\mu})$$

参照3.1节, 我们消去保证对偶函数向上有界的等式约束  $\sum_{m=1}^M \mu_m + \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} = 1$ , 得等价的对偶优化问题如下:

$$\left. \begin{aligned}
\min \lambda P_S + \rho P_R + \sum_{n=1}^N \tilde{g}_n(\lambda, \rho, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) \\
\text{s.t. } C1: \lambda \geq 0 \\
C2: \rho \geq 0 \\
C3: \tilde{\mu}_m \geq 0, \quad \forall m \in \{1, \dots, M-1\} \\
C4: \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} - \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{\mu}_m \geq 0
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_n(\lambda, \rho, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) &= \sup_{\{p_{r,m,n}\}} \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} \left[ \tilde{\mu}_m \phi_m r_{m,n} - \lambda p_{r,m,n} \frac{H_{r,m,n}}{H_{s,m,n}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot - \rho p_{r,m,n} \right] + \left[ \left( \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m} - \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{\mu}_m \right) \phi_M r_{M,n} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \lambda p_{r,M,n} \frac{H_{r,M,n}}{H_{s,M,n}} - \rho p_{r,M,n} \right] \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

参照3.1节, 对于给定的  $(\lambda, \rho, \tilde{\boldsymbol{\mu}})$ , 可求得当子载波  $n$  分配给用户  $m$  时, 中继端最优的功率分配:

$$p_{r,m,n}^*, m \in \{1, \dots, M-1\}, p_{r,M,n}^*.$$

所以, 求解子问题式(12), 即是对于子载波  $n$ , 选择用户  $m$  使式(12)最大。

$$m_n^*(\lambda, \rho, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) = \arg \max_{m \in \{1, \dots, M\}} \tilde{g}_n(\lambda, \rho, \tilde{\boldsymbol{\mu}}), \quad \forall n$$

$$p_{m,n}^*(\lambda, \rho, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) = \begin{cases} p_{m,n}^*, & m = m_n^*(\lambda, \rho, \tilde{\boldsymbol{\mu}}) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \forall n$$

同理, 我们对椭圆算法进行修正如下:

(1)当椭圆中心不满足对偶问题式(11)的约束条件  $C1, C2, C3$  时, 算法收敛的次梯度为

$$\nabla = -\mathbf{e}_m \in R^{M+1}$$

$m$  为  $[\lambda, \rho, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_{M-1}]^T$  中任一不满足条件的变量序号,  $\mathbf{e}_m$  为第  $m$  个变量为1的单位向量。

(2)当椭圆中心不满足约束条件  $C4$ , 算法收敛的次梯度为

$$\nabla = [0, 0, 1, \dots, 1]^T \in R^{M+1}$$

(3)当所有约束条件  $C1, C2, C3, C4$  都满足时, 算法收敛的次梯度为

$$\nabla = [\nabla\lambda, \nabla\rho, \nabla\tilde{\mu}_1, \dots, \nabla\tilde{\mu}_{M-1}]^T \in R^{M+1}$$

参照3.1节, 解得

$$\nabla\lambda = P_S - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{r,m,n}^* (\lambda, \rho, \tilde{\mu}) \frac{H_{r,m,n}}{H_{s,m,n}}$$

$$\nabla\rho = P_R - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{r,m,n}^* (\lambda, \rho, \tilde{\mu})$$

$$\nabla\tilde{\mu}_m = \sum_{n=1}^N [\phi_m r_{m,n}^* (\lambda, \rho, \tilde{\mu}) - \phi_M r_{M,n}^* (\lambda, \rho, \tilde{\mu})],$$

$$\forall m \in \{1, \dots, M-1\}$$

参照3.1节, 因为对偶问题式(11)的最优解  $(\lambda^*, \rho^*, \tilde{\mu}^*)$  满足KKT条件, 所以我们可得其取值范围, 并由此确定算法的初始椭圆。

**3.2.2 原问题的近似最优求解** 求得对偶问题的最优解  $(\lambda^*, \rho^*, \tilde{\mu}^*)$  时, 得到对偶框架下子载波分配  $\{m_n^*(\lambda^*, \rho^*, \tilde{\mu}^*)\}$  和功率分配  $\{p_{r,m,n}^*(\lambda^*, \rho^*, \tilde{\mu}^*)\}$  的最优情况。我们必须同时考虑原问题中基站和中继功率约束是否满足。采用与无中继OFDMA系统类似的方法, 基于对偶问题框架下最优的子载波分配情况, 通过功率等比例缩放的方法重新分配两跳子载波上的功率, 功率分配方案如下:

$$P_S^+ = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{r,m,n}^* (\lambda^*, \rho^*, \tilde{\mu}^*) \frac{H_{r,m,n}}{H_{s,m,n}}$$

$$P_R^+ = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{r,m,n}^* (\lambda^*, \rho^*, \tilde{\mu}^*)$$

(1)如果  $(P_S^+/P_S) \leq (P_R^+/P_R)$ , 有

$$p_{r,m,n}^+ = p_{r,m,n}^* (\lambda^*, \rho^*, \tilde{\mu}^*) (P_R/P_R^+), \forall m \in \{1, \dots, M\}, \forall n$$

(2)如果  $(P_S^+/P_S) > (P_R^+/P_R)$ , 有

$$p_{r,m,n}^+ = p_{r,m,n}^* (\lambda^*, \rho^*, \tilde{\mu}^*) (P_S/P_S^+), \forall m \in \{1, \dots, M\}, \forall n$$

**3.2.3 复杂度分析** 针对单中继协作OFDMA系统动态资源分配, 椭圆算法的复杂度为  $O((M+1)^2)$ , 而每次迭代搜索过程的复杂度  $O(MN)$ , 所以本文算法的复杂度为  $O(M^3N)$ , 与子载波数目成线性关系。

## 4 仿真与分析

### 4.1 非中继系统

本文采用的信道模型, 为6径的瑞利衰落信道, 每一径用Clarke模型建模, 功率时延谱是  $e^{-l}$  的指数衰减,  $l$  表示第  $l$  径, 系统总带宽  $B = 1$  MHz, 载波数  $N = 256$ , 总的发射功率为  $P_T = 5$  W, AWGN的功率谱密度为  $-140$  dB·W/Hz, 路径损耗采用3GPP-TR25.814模型  $L(BS \sim UE) : 128.1 + 37.6 \lg(d)$ ,  $d$ (km)。6个用户平均分成两组, 其中用户1,2,3位于距离基站0.1 km处, 用户4,5,6位于距离基站0.2 km处。比例约束条件设定为组内用户的速率相等, 即1:1; 两组用户之间的速率比例为  $K:1$ ,  $K \in \{1, 2, \dots, 8\}$ 。仿真了150次信道实现, 取平均值。

图1为两组用户比例速率约束分别为  $K:1$ ,  $K \in \{1, 2, \dots, 8\}$  时, 系统的平均总吞吐量曲线。随着  $K$  值的增大, 系统容量也增大, 这是因为距离基站更近(即信道增益更好)的第1组将获得更多的资源分配优先权。图1中给出求解对偶问题式(7)所得到的性能曲线, 是满足比例速率公平性约束问题式(2)的容量上界。如果所提算法的系统吞吐量大于优化问题式(2)的容量上界, 则必以牺牲用户之间的比例公平性达到较高的容量; 反之, 如果算法吞吐量较低, 则必然会有资源的损失, 即功率分配给了系统中较差的信道。如图1所示, 本文算法的仿真曲线, 极好地逼近理论的上界, 则可以预料到用户之间的比例公平性是近似严格满足的, 以下的图2, 图3以及表1充分验证了公平性性能。

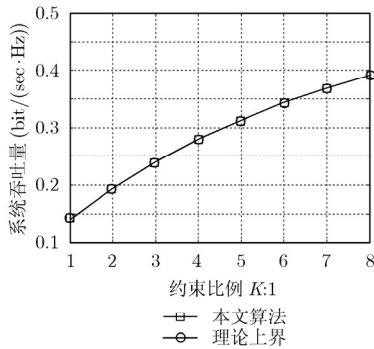


图1 非中继系统所提算法系统吞吐量与理论上界的比较

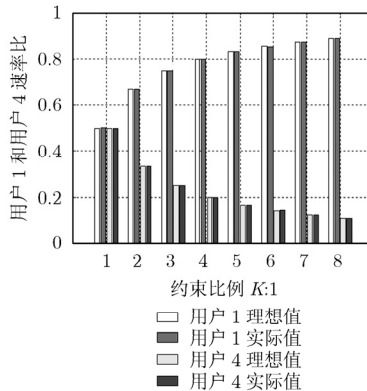


图2 非中继系统不同组两用户实际速率比

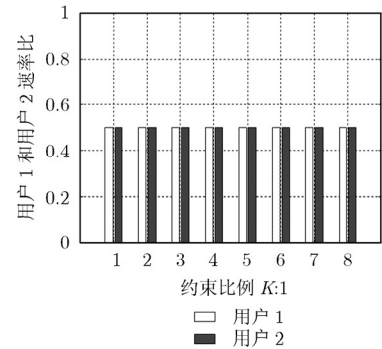


图3 非中继系统同组两用户实际速率比

表1 非中继系统所提算法对公平性约束的偏离与约束速率比  $K : 1$  的关系

$K$	1	2	3	4	5	6	7	8
$D$	0.00238	0.00174	0.00195	0.00226	0.00236	0.00227	0.00254	0.00294

图2是从两组用户分别取用户1和用户4,比较它们的速率,可看出不同组用户实际速率之比可以满足两组用户之间的约束速率条件:  $K : 1, K \in \{1, 2, \dots, 8\}$ 。图3是从第1组用户之中取用户1和用户2,比较它们的速率,可看出同组用户实际速率比例满足比例约束条件1:1,不随  $K$  值变化。

本文定义一个指标  $D$  来定量衡量本算法对问题式(2)比例速率约束条件的满足情况,定义如下:

$$D = \sum_{i=1}^I \max_{m \in \{1, \dots, M\}} \left| \tilde{R}_{m,i} / \gamma_m - 1 \right| / I$$

$$\tilde{R}_{m,i} = R_{m,i} / \sum_{m=1}^M R_{m,i}, \quad \gamma_m = \frac{1}{\phi_m} / \sum_{m=1}^M \frac{1}{\phi_m}$$

$R_{m,i}$  为第  $i$  次信道实现中第  $m$  个用户的实际速率,  $I$  为信道仿真的次数。表1为实际仿真结果对比例速率约束条件的偏离值  $D$ , 可见算法能近似严格地满足比例公平性约束。

### 4.2 中继协作系统

这里采用的小尺度衰落信道模型,是与非中继OFDMA系统中相同的6径的瑞利衰落信道,系统总带宽  $B = 1$  MHz, 载波数  $N = 256$ , 基站的发射功率为  $P_S = 5$  W, 中继节点的发射功率为  $P_R = 5$  W, AWGN的功率谱密度为  $-140$  dB·W/Hz, 路径损耗采用修正的COST-231 Hata模型:  $L(BS \sim RS): 103.2 + 37.6 \lg(d), d(\text{km}); L(RS \sim UE): 132.2 + 39.6 \lg(d), d(\text{km})$ 。中继距离基站  $0.2$  km, 6个用户分成两组, 用户1, 用户2, 用户3位于距离中继

$0.1$  km处, 用户4, 用户5, 用户6位于距离中继  $0.2$  km处, 基站通过中继与用户通信。设定比例速率约束条件为组内用户的速率相等, 即  $1:1$ , 两组用户之间的速率比例分别为  $K : 1, K = \{1, 2, \dots, 8\}$ 。仿真150次信道实现, 给出与非中继系统下相同性能指标的仿真, 如图4所示。

图4, 表明中继协作下所提算法的系统吞吐量能极好地逼近比例速率公平性问题式(3)容量上界; 同时, 图4还给出了无中继模式下, 基站发射功率为  $P_S = 10$  W, 两组用户距离基站分别为  $0.3$  km,  $0.4$  km, 比例速率约束下资源分配问题式(2)的容量上界, 显然, 中继的加入, 能大大提高系统的总吞吐量。

图5表明中继系统下用户1和用户4的实际速率比例能极好地满足两组用户之间的比例速率约束条件  $K : 1, K = \{1, 2, \dots, 8\}$ , 图6表明中继系统下组内用户1和用户2的实际速率近似相等, 且速率比例不随  $K$  值变化。从表2可见, 本文算法能极好地满足问题式(3)的比例速率约束条件。

### 5 结束语

本文针对用户比例速率约束下OFDMA系统的资源分配问题, 给出了相应的等价优化模型, 并提出基于拉格朗日松弛的联合优化算法, 该算法复杂度与子载波数目成线性关系, 具有较好的实时性, 且能与最优方案的性能极好地逼近。

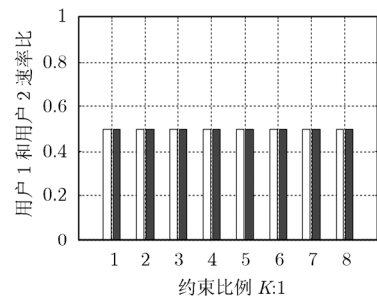
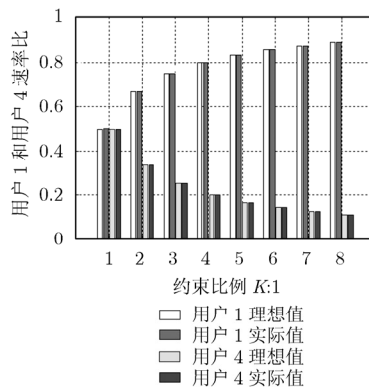
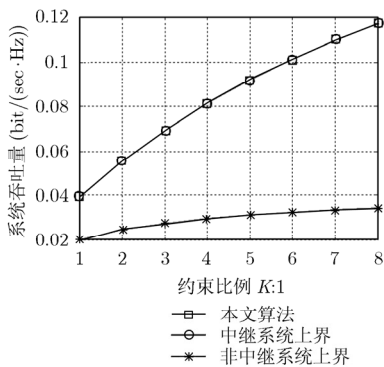


图4 中继系统所提算法系统吞吐量与理论上界的比较

图5 中继系统不同组两用户实际速率比

图6 中继系统同组两用户实际速率比

表2 中继系统所提算法对约束的偏离与约束速率比  $K : 1$  的关系

$K$	1	2	3	4	5	6	7	8
$D$	0.00625	0.00523	0.00692	0.00565	0.00714	0.00536	0.00601	0.00473

## 参 考 文 献

- [1] Sadr S, Anpalapan A, and Raahemifar K. Radio resource allocation algorithms for the downlink of multiuser OFDM communication systems. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2009, 11(3): 92–106.
- [2] Salen M, Adinoyi A, and Rahman M. An overview of radio resource management in relay-enhanced OFDMA-based networks. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2010, 12(3): 422–438.
- [3] Jang J and Lee K B. Transmit power adaptation for multiuser OFDM systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2003, 21(2): 171–178.
- [4] Dang W B, Tao M X, and Huang J W. Subcarrier-pair based resource allocation for cooperative multi-relay OFDM systems. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2010, 9(5): 1640–1649.
- [5] Huang J W, Subramanian V G, and Agrawal R, *et al.* Downlink scheduling and resource allocation for OFDM systems. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2009, 8(1): 288–296.
- [6] Mu H, Tao M X, and Dang W B. Joint subcarrier-relay assignment and power allocation for decode-and-forward multi-relay OFDM systems. ChinaCom'09, Xi'an, China, Aug. 2009: 1–6.
- [7] Lin Y B, Chiu T H, and Su Y T. Optimal and near-optimal resource allocation algorithms for OFDMA networks. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2009, 8(8): 4066–4077.
- [8] Shim W, Han Y, and Kim S. Fairness-aware resource allocation in a cooperative OFDMA uplink system. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2010, 59(2): 932–939.
- [9] Rhee W and Ciof J M. Increasing in capacity of multiuser OFDM system using dynamic subchannel allocation. *IEEE VTC*, Tokyo, Japan, May 2000: 3648–3652.
- [10] Shen Z, Andrews J G, and Evans B L. Adaptive resource allocation in multiuser OFDM systems with proportional rateconstraints. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2005, 4(6): 2726–2737.
- [11] Yuan J and Wang Q. Adaptive resource allocation schemes for multiuser OFDMA nonregenerative relay networks. *IEEE ICC*, CapeTown, South Africa, May 2010: 1–5.
- [12] Liu C H, Schmeink A, and Mathar R. Dual optimal resource allocation for heterogeneous transmission in OFDMA systems. *IEEE GLOBECOM*, Honolulu, Hawaii, USA, Dec. 2009: 1–6.
- [13] Seong K, Mohseni M, and Cioffi J M. Optimal resource allocation for OFDMA downlink systems. *IEEE ISIT*, Seattle, Washington, USA, July 2006: 1394–1398.
- [14] Yu W and Lui R. Dual methods for nonconvex spectrum optimization of multicarrier systems. *IEEE Transactions on Communications*, 2006, 54(7): 1310–1322.
- [15] Luo Z Q and Zhang S Z. Duality gap estimation and polynomial time approximation for optimal spectrum management. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(7): 2675–2689.
- [16] Boyd S and Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge, Britain: Cambridge University Press, 2004: 127–188.
- 陈瑾平：男，1977年生，博士生，研究方向为无线通信系统资源优化、通信信号处理。
- 李春国：男，1983年生，博士，研究方向为MIMO通信信号处理、多用户信号处理和中继无线通信系统优化设计。
- 杨绿溪：男，1965年生，教授，博士生导师，研究方向为下一代移动通信中的信号处理。