一个确定性存储模型的建立与应用

胡科
电子科技大学应用数学学院，四川成都（610054）

摘 要：产品的合理存储对有效利用资金、提高经济效益具有十分重要的意义。本文通过详细的数学推证，建立了一个确定性存储模型并给出其应用实例。

关键词:确定性存储模型；最佳存储模型；存储费；订购费

产品的合理存储对有效利用资金、提高经济效益具有十分重要的意义。以工厂为例，随着生产的进行，原料减少，到一定时间必须补充存储才能使生产正常进行，这时就要考虑存储费用与订货费用。很明显，我们的要求是采用合理的存储策略（决定何时补充及每次补充数量的策略）使两项费用之和最小。直观上可推断，当两项费用相等时形成的存储策略最佳（以下将给予严格的数学论证），研究这类与存储有关的问题构成运筹学的一个分支——存储论。

在制定存储策略之前，有必要了解几个重要基本概念。一是费用，它包括：i）存储费用 ii）订货费用（包括订购费用、成本费用）iii）生产费用（包括固定费用、可变费用）iv）缺货费用。二是提前期，指为在某时刻能补充存储而必须提前订货的时间。

以订货周期t为策略变量，下面建立在不允许缺货、生产时间很短的情况下，使平均费用最小的存储模型[1][2]。

为使问题简化，作如下假设：

1）缺货费用无穷大；

2）存储降至零时，可立即得到补充；

3）需求连续均匀；

4）每次订货量不变，订购费不变；

5）单位存储费不变。

这样，我们仅考虑存储费用与订货费用，存储量变化如[图 1]所示。

设：

R——需求速度，Q——订货量，C_1——单位存储费，C_2——订购费；K——货物单位

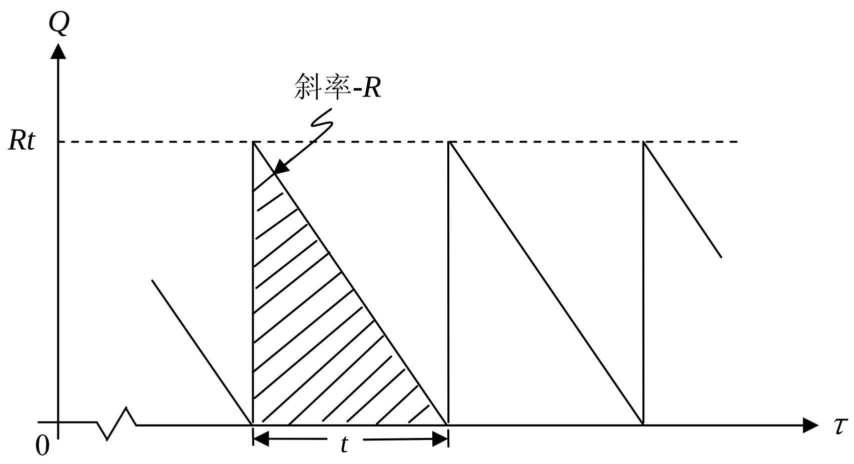

图 1 存储量随时间变化趋势

【第一步】 求平均订货费用

假设每隔t时间补充一次存储，则$Q=Rt$，订货费为C_2+KRt，t时间的平均订货费为$\frac{C_2}{t}+KR$。

【第二步】 求平均存储费用

初始存储为 Rt，经 τ 时间后存储降至 $R(t-\tau)$，存储函数 $S(\tau)=R(t-\tau)$, $\tau\in[0,t]$，则 t 时间的平均存储量为$\frac{1}{t}\int_0^t R(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}Rt$（或直接由积分几何意义求出阴影部分面积为$\frac{1}{2}t\cdot Rt=\frac{1}{2}Rt^2$，取平均得$\frac{1}{2}Rt$），$t$ 时间内平均存储费为$\frac{1}{2}RtC_1$。

【第三步】 求使总的平均费用最小的存储模型

t 时间的总的平均费用$C(t)=\frac{C_2}{t}+KR+\frac{1}{2}C_1Rt \qquad (a)$

(a)式两边求导：$\frac{dC(t)}{dt}=-\frac{C_2}{t^2}+\frac{1}{2}C_1R$

令$\frac{dC(t)}{dt}=0$得：$t_0=\sqrt{\frac{2C_2}{C_1R}}$

又$\frac{d^2C(t)}{dt^2}=\frac{2C_2}{t^3}>0$，∴ 当$t=t_0$时$C(t)$取得极小值

$Q_0=Rt_0=\sqrt{\frac{2C_2R}{C_1}}$ （经济订购批量公式，简称 $E.O.Q$ 公式）

因Q_0、t_0与K无关，则(a)式略去KR项并不影响存储策略，此时(a)式简化为$C(t)=\frac{C_2}{t}+\frac{1}{2}C_1Rt$，代入$t_0$得$C_0=C(t_0)=\sqrt{2C_1C_2R}$。

因此，每隔$\sqrt{\dfrac{2C_2}{C_1R}}$，订货$\sqrt{\dfrac{2C_2R}{C_1}}$，可使平均费用最小（$\sqrt{2C_1C_2R}$）。

另，也可从费用曲线[图 2]求出最佳存储模型。

总费用曲线$C(t)$的最低点横坐标t_0与存储费用直线$\dfrac{1}{2}C_1Rt$，订购费用曲线$\dfrac{C_2}{t}$交点横坐标相同[1]，所以，$\dfrac{C_2}{t_0}=\dfrac{1}{2}C_1Rt_0$

得：$t_0=\sqrt{\dfrac{2C_2}{C_1R}}$，$Q_0=Rt_0=\sqrt{\dfrac{2C_2R}{C_1}}$

因此，$C_0=\dfrac{C_2}{t_0}+\dfrac{1}{2}C_1Rt_0=\sqrt{2C_1C_2R}$，结果与前面推导的一致。

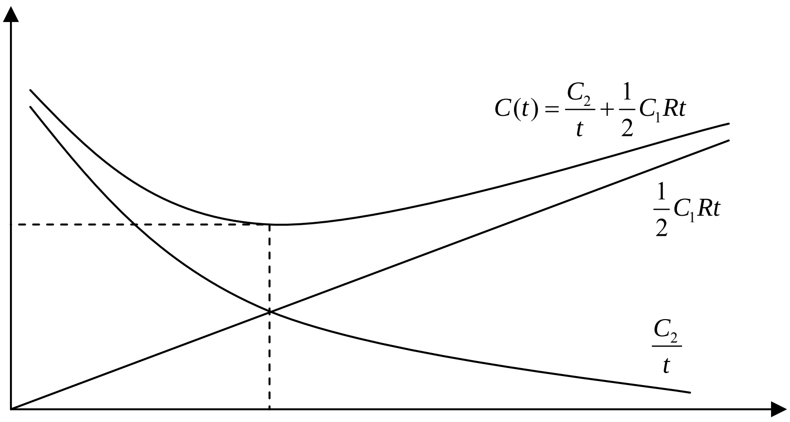

图 2 费用曲线

当不需向外厂订购而由本厂自行生产补充存储时，以固定费用取代订货费用（即装配费用取代订购费用），其它条件不变，所得存储模型仍与前面相同。

【例】 某商店经营某商品，每件商品成本为 400 元，其存储费用每年为成本的 20%，每次订购需订购费 20 元，年需求量为 320 件（均匀需求），提前期为 5 天，若不许缺货，试求*E.O.Q*（一年以 365 天计）[1][2]。

解：由所给条件合乎我们所讨论的存储模型，且R=320，C_1=400*20%=80，C_2=20

---

[1]易求出曲线$\dfrac{C_2}{t}$与直线$\dfrac{1}{2}C_1Rt$交点的横坐标$t_0=\sqrt{\dfrac{2C_2}{C_1R}}$，在$t=t_0$时，$C(t_0)=\sqrt{2C_1C_2R}$。由$\dfrac{C_2}{t}+\dfrac{1}{2}C_1Rt-\sqrt{2C_1C_2R}>0$，即$(t-\sqrt{\dfrac{2C_2}{C_1R}})^2>0$，解得$t\neq\sqrt{\dfrac{2C_2}{C_1R}}$。亦即，当$t\neq t_0$时，均有$C(t)>C(t_0)$，所以，$C(t)$最低点横坐标与$\dfrac{C_2}{t}$、$\dfrac{1}{2}C_1Rt$交点横坐标一定相同。

$$\therefore\ t_0=\sqrt{\frac{2C_2}{C_1R}}=\sqrt{\frac{2*20}{80*320}}\text{B}14(天)\qquad Q_0=Rt_0=320*\frac{14}{365}\text{B}12(件)$$

$$C_0=\sqrt{2C_1C_2R}=\sqrt{2*80*20*320}\text{B}1012(元)$$

由于提前期为 5 天，所以，每隔 14 天订货一次，而每次当商品剩余量为 4 件（$\frac{5}{365}*320$）时即发出订货通知，其订货量为 12 件，这样，可使全年费用最省为 1012 元。

下面根据费用曲线验证以上事实：$C(t)=\frac{C_2}{t}+\frac{1}{2}C_1Rt=\frac{20}{t}+12800t$

t 换算为天，则 $C(t')=\frac{7300}{t'}+35t'$

表 1 费用与时间对应表

t'(天)	4	8	11	**14**	17	20	24	28
$C(t')$(元)	1965	1193	1049	**1012**	1024	1065	1144	1241

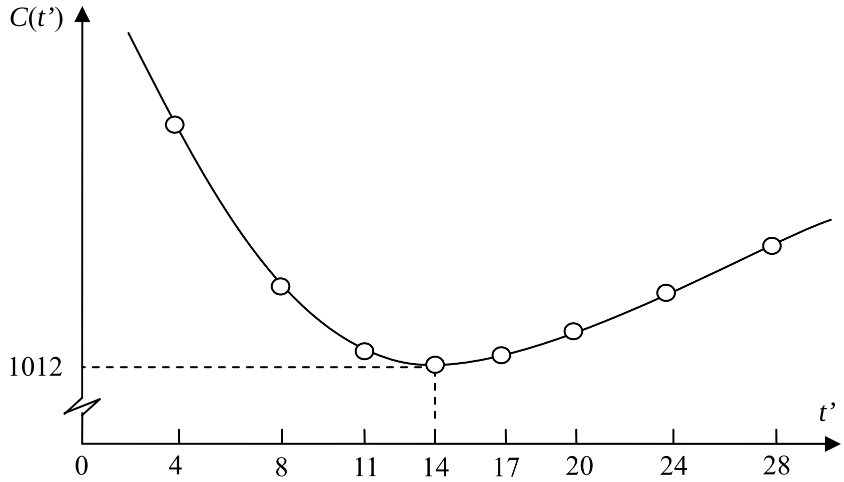

图 3 费用随时间变化趋势

由[图 3]易见，当 t'=14 天时，全年费用最省为 1012 元。

参考文献

[1] 钱颂迪主编．运筹学（修订版）[M]．北京：清华大学出版社，1996．
[2] 黄洁纲．存贮论原理及其应用[M]．上海：上海科学技术文献出版社，1984．

Foundation and Application of a Definite Store Model

Hu Ke
Inst.of Appl. Math，UEST of China，ChengDu，Sichuan（610054）

Abstract

Rational store product plays an important role in fund's efficient utilization and promote economic profit.This article sets up a definite store model through detailed mathematical deduction,then to introduce practical example of this model.

Keywords: definite store model;the best store model;store fare;order fare