

奖金发放问题的多种模型求解

曾希君¹ 谢瑜² 孔丁祥²

1.中国矿业大学计算机科学与技术学院, 江苏徐州 221116

2.中国矿业大学理学院, 江苏徐州 221008

E-mail:zengxijun530@163.com, xieyu1987@yahoo.com.cn

摘要: 本文研究了奖金发放的优化问题。该问题是半定理半定性、多因素的综合选优排序问题。要求给出所有教师评优及前 30 位教师的评奖顺序。我们运用了综合评价问题中的逼近理想解排序法 (Topsis 法) 对教师进行排序。为了便于比较验证, 我们又分别用了灰色模型, 层次分析法对教师的综合水平进行了排序。在 Excel 算出的几组数据中, 我们可以看到每组结果排序后选出的前 30 位教师十分相近, 因为算法的固有缺陷, 排列顺序有差异。所以我们将这四组数据加权平均。得出最终结果: P1, P4, P6, P2, P3, P5, P7, P45, P48, P15, P38, P10, P8, P9, P37, P23, P12, P30, P14, P16, P19, P26, P22, P21, P24, P34, P42, P31, P40, P18, P20, P47, P13, P28, P11, P17, P25, P27, P35, P46, P32, P39, P49, P29, P43, P36, P41, P50, P33, P44

关键词: Topsis; 灰色模型; 层次分析法; 优化模型

1. 背景分析

随着经济的快速增长, 高校师生的奖金也在不断的升高, 奖金发放问题成为广大师生极为关注的问题, 某学院接受了一企业的赞助, 经过校教代会决定, 拿出一部分资金奖励教师, 奖励政策只考虑下列因素: 教师职称, 工龄, 学历, 教学情况。学院职工的职称, 工龄, 学历, 教学情况见表 1。现需要根据此表给出一个对所有教师都奖励的合理政策且只奖励 30 人的方案。

表 1: 该学院随机抽取的教师基本情况

人员	职称	工龄	学历	教学	人员	职称	工龄	学历	教学
P1	1	30	3	1	P26	3	8	2	1
P2	1	25	2	2	P27	3	5	2	2
P3	1	21	2	2	P28	3	9	2	2
P4	1	20	3	1	P29	3	5	2	3
P5	1	19	2	2	P30	3	6	1	2
P6	1	15	1	3	P31	3	4	2	1
P7	2	14	1	2	P32	3	3	2	2
P8	2	16	2	2	P33	3	2	3	2
P9	2	13	2	2	P34	3	5	2	1
P10	2	8	2	1	P35	3	4	2	2
P11	2	10	3	3	P36	3	6	3	3
P12	2	9	3	1	P37	3	8	1	2
P13	2	8	2	3	P38	3	5	1	1
P14	2	12	2	2	P39	3	3	2	2
P15	2	13	3	1	P40	3	4	2	1
P16	2	11	2	2	P41	3	1	2	2
P17	2	10	3	3	P42	3	5	2	1

P18	2	7	2	2	P43	3	2	2	2
P19	2	8	3	1	P44	3	3	3	3
P20	2	9	3	2	P45	3	6	1	1
P21	2	10	2	2	P46	3	4	2	2
P22	2	11	2	2	P47	3	2	2	1
P23	2	13	2	2	P48	3	6	1	1
P24	2	10	2	2	P49	3	3	2	2
P25	2	8	3	3	P50	3	1	2	2

说明：1、职称中的 1, 2, 3 分别表示高级、中级、初级；
 2、学历中的 1, 2, 3 分别表示研究生、本科、专科；
 3、教学中的 1, 2, 3 分别表示好，一般，差。

2. 问题的假设

- 1、假设在层次分析模型中，影响教师评奖的四个因素的重要性依职称（最重要），工龄（次之），学历（第三重要），教学情况（最不重要）递减。
- 2、在其他模型中（除了层次分析模型），四个影响因素重要性相同。
- 3、教师评奖只和表格所给的四个因素有关，与其他条件无关。
- 4、假设工龄越长，教师越容易获奖。

3. 符号说明

f_{ij}	表示第 i 名教师的第 j 个评奖因素
Z_{ij}	Topsis 模型中 f_{ij} 经过归一化处理后的数据
A	Topsis 模型中的决策矩阵
A'	经过归一化处理的决策矩阵
Z'_{ij}	加权后的 Z_{ij} 值
Z^+	各种因素数据中的最优数据，即理想解
Z^-	各种因素数据中的最差数据，即负理想解
S_i^+	教师四项影响因素到理想点的距离
S_i^-	教师四项影响因素到负理想点的距离
C_i	教师四项影响因素对于理想解的相对接近度
$\xi_i(k)$	灰色模型中的最优指标的关联系数
ρ	灰色模型中的分辨系数
R	灰色模型中综合评价矩阵
CR	层次分析法中的一次性比率

4.模型建立与求解

4.1 问题 1 模型建立与求解

4.1.1 模型一：Topsis 模型^{[1][2]}

问题分析：奖金的发放是一个多目标决策问题。每个教师的奖金发放要综合考虑职称，工龄，学历，教学四个因素，从而找出综合水平最高的教师。我们可以利用逼近理想解排序法对教师进行综合评价。

步骤一：数据归一化。

此决策问题有 4 个目标 f_j $j=1,2,3,4$ （分别对应职称，工龄，学历，教学），50 个可行解（50 位可能获得奖学金的教师）。则每一位教师的职称，工龄，学历，教学情况即为此教师的评价指标，设为 f_{ij} ($i=1,2,\dots,50;j=1,2,3,4$)。

$$\text{由此我们可得决策矩阵为 } A = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{501} & f_{502} & f_{503} & f_{504} \end{pmatrix} \quad (1)$$

由于职称，工龄，学历，教学四个因素的指标水平有所不同，我们可以先将四组目标数据进行归一化处理，利用 TOPSIS 法中的公式：

$$Z_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (f_{ij})^2}} \quad (2)$$

Z_{ij} $i=1,2,\dots,50;j=1,2,3,4$ 即为归一化后的决策元素。

$$A = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{501} & Z_{502} & Z_{503} & Z_{504} \end{pmatrix} \quad (3)$$

即为归一化后的决策矩阵。

利用 Excel 处理得归一化后的数据如表 2。

表 2 归一化后的数据

人员	职称'	工龄'	学历'	教学'	人员	职称'	工龄'	学历'	教学'
P1	0.057	0.395	0.194	0.072	P26	0.171	0.105	0.129	0.072
P2	0.057	0.330	0.129	0.143	P27	0.171	0.066	0.129	0.143
P3	0.057	0.277	0.129	0.143	P28	0.171	0.119	0.129	0.143
P4	0.057	0.264	0.194	0.072	P29	0.171	0.066	0.129	0.215
P5	0.057	0.250	0.129	0.143	P30	0.171	0.079	0.065	0.143
P6	0.057	0.198	0.065	0.215	P31	0.171	0.053	0.129	0.072
P7	0.114	0.185	0.065	0.143	P32	0.171	0.040	0.129	0.143
P8	0.114	0.211	0.129	0.143	P33	0.171	0.026	0.194	0.143
P9	0.114	0.171	0.129	0.143	P34	0.171	0.066	0.129	0.072
P10	0.114	0.105	0.129	0.072	P35	0.171	0.053	0.129	0.143
P11	0.114	0.132	0.194	0.215	P36	0.171	0.079	0.194	0.215
P12	0.114	0.119	0.194	0.072	P37	0.171	0.105	0.065	0.143
P13	0.114	0.105	0.129	0.215	P38	0.171	0.066	0.065	0.072
P14	0.114	0.158	0.129	0.143	P39	0.171	0.040	0.129	0.143
P15	0.114	0.171	0.194	0.072	P40	0.171	0.053	0.129	0.072
P16	0.114	0.145	0.129	0.143	P41	0.171	0.013	0.129	0.143
P17	0.114	0.132	0.194	0.215	P42	0.171	0.066	0.129	0.072
P18	0.114	0.092	0.129	0.143	P43	0.171	0.026	0.129	0.143
P19	0.114	0.105	0.194	0.072	P44	0.171	0.040	0.194	0.215
P20	0.114	0.119	0.194	0.143	P45	0.171	0.079	0.065	0.072
P21	0.114	0.132	0.129	0.143	P46	0.171	0.053	0.129	0.143
P22	0.114	0.145	0.129	0.143	P47	0.171	0.026	0.129	0.072
P23	0.114	0.171	0.129	0.143	P48	0.171	0.079	0.065	0.072
P24	0.114	0.132	0.129	0.143	P49	0.171	0.040	0.129	0.143
P25	0.114	0.105	0.194	0.215	P50	0.171	0.013	0.129	0.143

可见，经过归一化

处理后，每个元素值都在 (0, 1) 之间，这便于数据的加权求值。

步骤二：确定数据的加权值

假设职称，工龄，学历，教学这四个因素对教师的评定而言处于同等重要的水平。即可认为四个权值 W_{ij} 都为 0.25。加权后的数据为

$$Z'_{ij} = W_{ij} * Z_{ij} \tag{4}$$

为了简化计算，我们将加权后的数据乘以 4，即使 $4 * Z'_{ij} = Z_{ij}$ (Z_{ij} 为步骤一中归一化后的数据。) 这样我们就可以直接利用步骤一所得数据进行求解。

步骤三：确定理想解和负理想解

由题意可得，四项目标元素的值越小，表示教师越优秀，得奖金机会越大。即决策矩阵 A 中元素 Z_{ij} 值越大表示方案越好，则可得理想解和负理想解

$$\text{理想解 } Z^+ = (Z_1^+, Z_2^+, \dots, Z_{50}^+) = \{\max_i Z_{ij} \mid j=1, 2, \dots, 4\} \tag{5}$$

$$\text{负理想解 } Z^- = (Z_1^-, Z_2^-, \dots, Z_{50}^-) = \{\min_j Z_{ij} \mid j=1, 2, \dots, 4\} \quad (6)$$

利用 Excel 数据处理可得最优方案和最差方案如表 3 所示。

表 3 最优方案和最差方案

人员	职称	工龄	学历	教学
最优	0.057	0.395	0.065	0.072
最差	0.171	0.013	0.194	0.215

步骤四：计算每个方案到理想点的距离 S_i^+ 和到负理想点的距离

根据求理想点的距离公式

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m (Z_{ij} - Z_j^+)^2} \quad (7)$$

和求负理想点的距离公式

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m (Z_{ij} - Z_j^-)^2} \quad (8)$$

利用 Excel 求得理想点和负理想点距离，然后根据可行解对于理想解的相对接近度定义：

$$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+} \quad (9)$$

我们可以求得各个可行解的相对接近度 C_i

若是理想解，则相应的 $C_i=1$ ；若是负理想解，则相应的 $C_i=0$ 。愈靠近理想解， C_i 愈接近于 1；反之，愈接近负理想解， C_i 愈接近于 0。那么，可以对 C_i 进行排队，以求出满意解。排序如表 4 所示。

表 4 Topsis 模型得到的排序结果

人员	P1	P2	P3	P4	P5	P8	P6	P7
ci	0.753	0.752	0.738	0.738	0.733	0.733	0.726	0.725
人员	P15	P9	P23	P14	P10	P16	P22	P45
ci	0.725	0.721	0.721	0.718	0.708	0.708	0.708	0.702
人员	P48	P12	P38	P26	P21	P24	P19	P37
ci	0.7	0.697	0.697	0.684	0.673	0.668	0.666	0.66
人员	P30	P34	P42	P28	P31	P40	P20	P18
ci	0.642	0.637	0.637	0.625	0.616	0.613	0.613	0.613
人员	P47	P11	P17	P13	P25	P27	P35	P46
ci	0.612	0.605	0.589	0.576	0.575	0.572	0.564	0.564
人员	P32	P39	P49	P43	P41	P50	P29	P33
ci	0.562	0.536	0.536	0.529	0.487	0.448	0.445	0.405
人员	P36	P44						
ci	0.331	0.312						

奖励的人分别为：

P1, P2, P3, P4, P5, P8, P6, P7, P15, P9 总 P23 总 P14, P10, P16, P22, P45, P48,

P12, P38, P26, P21, P24, P19, P37, P30, P34, P42, P28, P31, P40

4.1.2 模型二：灰色模型^[3]

对于综合评价问题，灰色模型能够求得较好的结果。设 c_{ik} ($i=1,2,3,\dots,n;k=1,2,\dots,m$) 为所研究系统内第 i 名参评教师第 k 个指标的原始数据,原始数据依矩阵表示为: $C=(c_{ik})_{n \times m}$,即 C 为 n 行 m 列矩阵,设 C_k^* 为第 k 个指标在各参评科室中的最优值 (最优指标取最大值, 低优指标取最小值), 于是 $C^* = \{C_k^*\} = \{C_1^*, C_2^*, \dots, C_m^*\}$ 为该系统内的最优指标集。

将 $C^* = \{C_1^*, C_2^*, \dots, C_m^*\}$ 作为参考数据列, $C_{ik} = (C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{im})$ ($i=1, 2, \dots, n$) 作为比较数据列, 用公式:

$$\xi_i(k) = \frac{\min_i |c_k^* - c_{ik}| + \rho \max_i |c_k^* - c_{ik}|}{|c_k^* - c_{ik}| + \rho \max_i |c_k^* - c_{ik}|} \quad (10)$$

分别求得第 i 名参评教师第 k 个指标与第 k 课外活动最优指标的关联系数 $\xi_i(k)$ ($i=1,2,\dots,n;k=1,2,\dots,m$), 式中分辨系数 $\rho \in (0,1)$, 一般取 $\rho = 0.5$, 得评判矩阵: $E = (\xi_i(k))_{n \times m}$ 。

设 $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ 为 m 个评判指标的权重分配矩阵, 其中 w_k ($k=1,2,\dots,m$) 为第 k 个评判指标权重, 应满足 $\sum_{k=1}^m w_k = 1$, 则综合评价矩阵模型为 $R = W \cdot E^T = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ 为 n 个参评教师的综合评价结果矩阵, 若关联度 r_i 最大, 则说明第 i 个参评教师优于其它教师, 据此可排出各教师的优劣次序。

我们把原始数据标准化后, 可以得到最优指标集为 $C_1^* = (6, 6, 7.385406, 6)$, 将最优指标 $C_1^* = (6, 6, 7.385406, 6)$ 作为参考数据列, 将 $C_{ik} = (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4})$ ($i=1,2,\dots,50$) 作为被比

较数据列, 用公式 $\xi_i(k) = \frac{\min_i |c_k^* - c_{ik}| + \rho \max_i |c_k^* - c_{ik}|}{|c_k^* - c_{ik}| + \rho \max_i |c_k^* - c_{ik}|}$, 取 $\rho = 0.5$, 把标准化的矩阵作

为评判矩阵可以得到 E_1 , 评价教师的四项指标权重 $W_1 = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ 用公式 $R = W \cdot E^T$ 可以得到教师的优劣次序为:

表 5 灰色模型得到的排序结果

名次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人员	P1	P4	P6	P45	P48	P38	P2	P3	P5	P7
名次	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
人员	P15	P10	P12	P19	P26	P37	P30	P34	P42	P31
名次	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
人员	P40	P47	P8	P9	P23	P14	P16	P22	P21	P24

4.1.3 模型三：层次分析法^[1]

问题的分析

由题意可知, 问题一属于半定量半定性、多因素的综合选优排序问题, 是一个多目标决策问题, 我们的又利用层次分析法对此做出了决策。

模型的建立

首先建立层次结构、确定准则层对目标层的权重、确定方案层对准则层的权重,确定方案层层对目标层的组合权重,最后综合排序。问题共有三层:第一层是目标层 O;第二层是准则层 C,共有 4 个条件为职称,工龄,学历,教学情况,分别记为 $C_k(k=1,2,3,4)$;第三层为方案层 P:有 $N=50$ 个参选人组成,依次记为 $P_n(n=1,2,\dots, N)$ 。

1. 层次结构模型的构造

步骤一:确定层次结构,将决策的目标、考虑的因素(决策准则)和决策对象按它们之间的相互关系分为最高层、中间层和最低层,绘出层次结构图。

最高层:决策的目的、要解决的问题。

中间层:考虑的因素、决策的准则。

最低层:决策时的备选方案。

对于相邻的两层,称高层为目标层,低层为因素层。

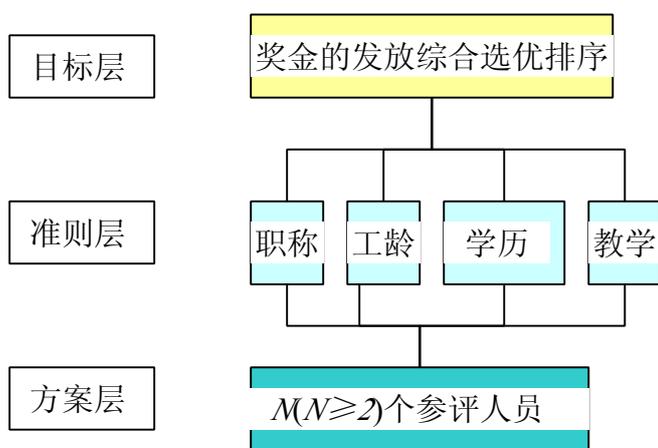


图 1 层次结构模型图

步骤二:通过相互比较,确定下一层各因素对上一层目标的影响的权重,将定性的判断定量化,即构造因素判断矩阵。

步骤三:由矩阵的特征值确定判别的一致性;由相应的特征向量表示各因素的影响权重,计算权向量。

步骤四:通过综合计算给出最底层(各方案)对最高层(总目标)影响的权重,权重最大的方案即为实现目标的最由选择。

2. 因素判断矩阵

比较 n 个因素 $J=(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 对目标 z 的影响.采用两两成对比较,用 a_{ij} 表示因素 j_1 与因素 j_j 对目标 z 的影响程度之比。四个等级的比例问题,我们采用 Saaty 等人提出的 1-9 尺度(见表 1),得到“正互反矩阵” R 。

表 6 1-9 尺度的含义

尺度 a_{ij}	含义
1	C_i 与 C_j 的影响相同
3	C_i 比 C_j 的影响稍强
5	C_i 比 C_j 的影响强
7	C_i 比 C_j 的影响明显的强

9	C_i 比 C_j 的影响绝对的强
2, 4, 6, 8	C_i 与 C_j 的影响之比在上述两个相邻等级之间

根据假设 4 项条件在分奖金方案中所起的作用依次为职称、工龄，学历，教学情况;准则层的 4 个因素是依次排列的，我们可以认为对决策目标的影响程度也是依次排列的，且相邻两个的影响程度之差可以认为基本相等，因此，构造比较矩阵如下：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix};$$

3. 确定准则层 C 对目标层 O 的权重 W_1

利用 MATLAB 软件^[4]可求出矩阵 A 的最大特征根 $\lambda = 4.0310$ 及对应于 λ 的正规化特征向量为：

$$w_1 = (0.4673, 0.2772, 0.1601, 0.0954)^T \quad (11)$$

一致性指标

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{4.0310 - 4}{4 - 1} = 0.0103 \quad (12)$$

随机一致性指标 $RI = 0.90$ ($n = 4$, 查表)，一致性比率

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0.0103 / 0.90 = 0.0115 < 0.1 \quad (13)$$

通过一致性检验，所以判断矩阵具有满意的一致性。对于准则层的四个准则的重要性次序的权值：

$$w_1 = (0.4673, 0.2772, 0.1601, 0.0954)^T$$

于是 w_1 作为 C 层对 O 层的权重向量。

4. 确定方案层 P 对准则层 C 的权重 W_2

我们把职称，学历，教学情况的值取倒数后乘以 6 转换成高优指标，将工龄 取 10 为底的对数再乘以 5 得到下表中职称，工龄，学历，教学情况所组成的 W_2 。

5. 然后我们利用公式 $W = W_2 * W_1$ ，求出方案层对目标层的影响，并进行排序，可以得到的结果是：

P6, P1, P2, P3, P4, P5, P7, P45, P48, P38, P37, P10, P30, P8, P15, P9, P23, P14, P16, P22, P21, P24, P12, P19, P18, P13, P26, P20, P11, P17

4.2. 数据处理^[1]

因为算法的固有缺陷与误差，三种模型算出的教师评奖排列顺序有差距。我们将 Topsis 法，灰色模型，层次分析法 3 组数据进行加权平均，得到 50 位教师评奖的最终结果：

表 8 三种模型综合得到的最终排序结果

排名	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
教师	P1	P4	P6	P2	P3	P5	P7	P45	P48	P15	P38	P10	P8

加权值	149	142	142	141	138	133	128	125	122	118	118	116	110
排名	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
教师	P9	P37	P23	P12	P30	P14	P16	P19	P26	P22	P21	P24	P34
加权值	103	102	100	99	98	97	93	92	91	90	82	79	78
排名	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
教师	P42	P31	P40	P18	P20	P47	P13	P28	P11	P17	P25	P27	P35
加权值	75	70	67	65	62	60	57	56	55	52	46	40	36
排名	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50		
教师	P46	P32	P39	P49	P29	P43	P36	P41	P50	P33	P44		
加权值	33	29	26	23	21	18	13	13	10	6	6		

取以上表格的前 30 个数据，即获奖教师如下：

P1, P4, P6, P2, P3, P5, P7, P45, P48, P15, P38, P10, P8, P9, P37, P23, P12, P30, P14, P16, P19, P26, P22, P21, P24, P34, P42, P31, P40, P18

5. 结束语

奖金的发放是一个多目标决策问题。我们在建模求解过程中运用了综合评价问题中的 Topsis 法，灰色模型，层次分析法。运用模型多而集中。有利于结果的分析比较，并用加权求平均的方法求得了最终结果。弥补了各种模型本身的缺陷与不足。各个模型算法对教师排序有差异。此模型适用于综合评价问题，选优问题，排序问题，分配问题等优化问题。

参考文献

- [1]: 杨启帆, 方道元. 数学建模 [M]. 浙江: 浙江大学出版社, 1999:240—252.
 [2]: 陶庄. 经典秩和比法详解. <http://www.studa.net/yixue/080315/16185814.html> 2008 年 8 月 10 号
 [3]: 邵珠艳. 灰色系统理论在教学评价中的应用, 数理医药学杂志[J]. 第 19 卷第 3 期 2006 年
 [4]: 张兴永. 《Matlab 软件与数学实验》 [M]. 江苏: 中国矿业大学大学出版社, 2007: 70-73.

To solve the problem of bonuses paid with multi-model

ZENG Xijun,XIE Yu,KONG Dingxiang

Department of Computer Science and Technology, China University of Mining and Technology,
Xuzhou (221116)

Abstract

Money is issued by the optimization problem in this paper . The problem is that semi-qualitative theorem and a half, more than the combined selection scheduling problem. Ambassador given the requirements that all teachers and 30 teachers in the order of the awards. We use a comprehensive evaluation of approaching the ideal solution to sort Act (Topsis law) to the sort of teachers. In order to facilitate the validation, we were using the gray model of AHP for teachers to carry out a comprehensive level of the sort. Excel calculated in a few sets of data, we can see that each group sort the results after the election of the 30 teachers are very close because of the inherent defects algorithm, there are differences in the order. Therefore, we weighted the data to an average of four groups. Arrive at the final results: P1, P4, P6, P2, P3, P5, P7, P45, P48, P15, P38, P10, P8, P9, P37, P23, P12, P30, P14, P16, P19, P26, P22, P21, P24, P34, P42, P31, P40, P18, P20, P47, P13, P28, P11, P17, P25, P27, P35, P46, P32, P39, P49, P29, P43, P36, P41, P50, P33, P44

Key words: Topsis; Gray model; AHP; optimal model