

# 模拟退火算法在优化路径问题中的应用

刘雨博, 胡楠

(辽宁工程技术大学机械学院, 辽宁 阜新 123000)

**摘要:** 近半个多世纪以来随着运筹学的发展, 在设施布置和物流工程方面已经开发了许多物理和数学模型, 并随着计算机技术的飞速进步, 又开发出形形色色的各类软件。有了模型还要结局算法的问题, 当代的技术发展更趋向于将模型与算法和在一起考虑, 本文就向读者介绍更富于时代气息的模拟退火法在最优化路径的选取问题中的应用。

**关键词:** 模拟退火法; 设施布置; 最优路; 非线性; 目标函数

中图分类号: O224

## Simulated annealing algorithm in the problem of optimal path

Liu Yubo, Hu Nan

(Liaoning Technical University, Liaoning FuXin 123000)

**Abstract:** With nearly half a century the development of operational research in facility layout and logistics engineering has developed a number of physical and mathematical models, and with the rapid progress of computer technology, has developed various types of software. With models, the algorithm should also end problems, the contemporary technological development models tend to be considered together with the algorithm and, this article introduces the reader to a more rich flavor of the times of the simulated annealing method in the most optimal path selection Problem .

**Keywords:** Simulated annealing; facility layout; optimal path; nonlinear; objective function

## 0 引言

模拟退火法 (simulated annealing) 最早见于 IBM 托马斯.J.沃森研究中心的 S.Kirkpatrick 等人的文章。他们在对组合优化进行研究后, 根据迭代改进的思想提出了“模拟退火法”。模拟退火法来源于固体退火原理, 将固体加温至充分高, 再让其徐徐冷却。加温时, 固体内部粒子随温升变为无序状, 内能增大, 而徐徐冷却时粒子渐趋有序, 在每个温度都达到平衡态, 最后在常温时达到基态, 内能减为最小<sup>[1]</sup>。根据 Metropolis 准则, 粒子在温度  $T$  时趋于平衡的概率为  $e^{-\Delta E/(kT)}$ , 其中  $E$  为温度  $T$  时的内能,  $\Delta E$  为其改变量,  $k$  为 Boltzmann 常数。用固体退火模拟组合优化问题, 将内能  $E$  模拟为目标函数值  $f$ , 温度  $T$  演变成控制系数  $t$ , 即得到解组合优化问题的模拟退火算法: 由初始解  $i$  和控制参数初值  $t$  开始, 对当前解重复“产生新解→计算目标函数差→接受或舍弃”的迭代, 并逐步衰减  $t$  值, 算法终止时的当前解即是近似最优解, 这是基于蒙特卡罗迭代求解法的一种启发式随机搜索过程。退火过程有冷却进度表 (cooling schedule) 控制, 包括控制参数的初值  $t$  及其衰减因子  $\Delta t$ , 每个  $t$  值时的迭代次数  $L$  和停止条件  $S$ <sup>[2]</sup>。

---

作者简介: 刘雨博, 男, 教师, 工业工程

通信联系人: 胡楠, 女, 学生, 工业工程. E-mail: 778187600@qq.com

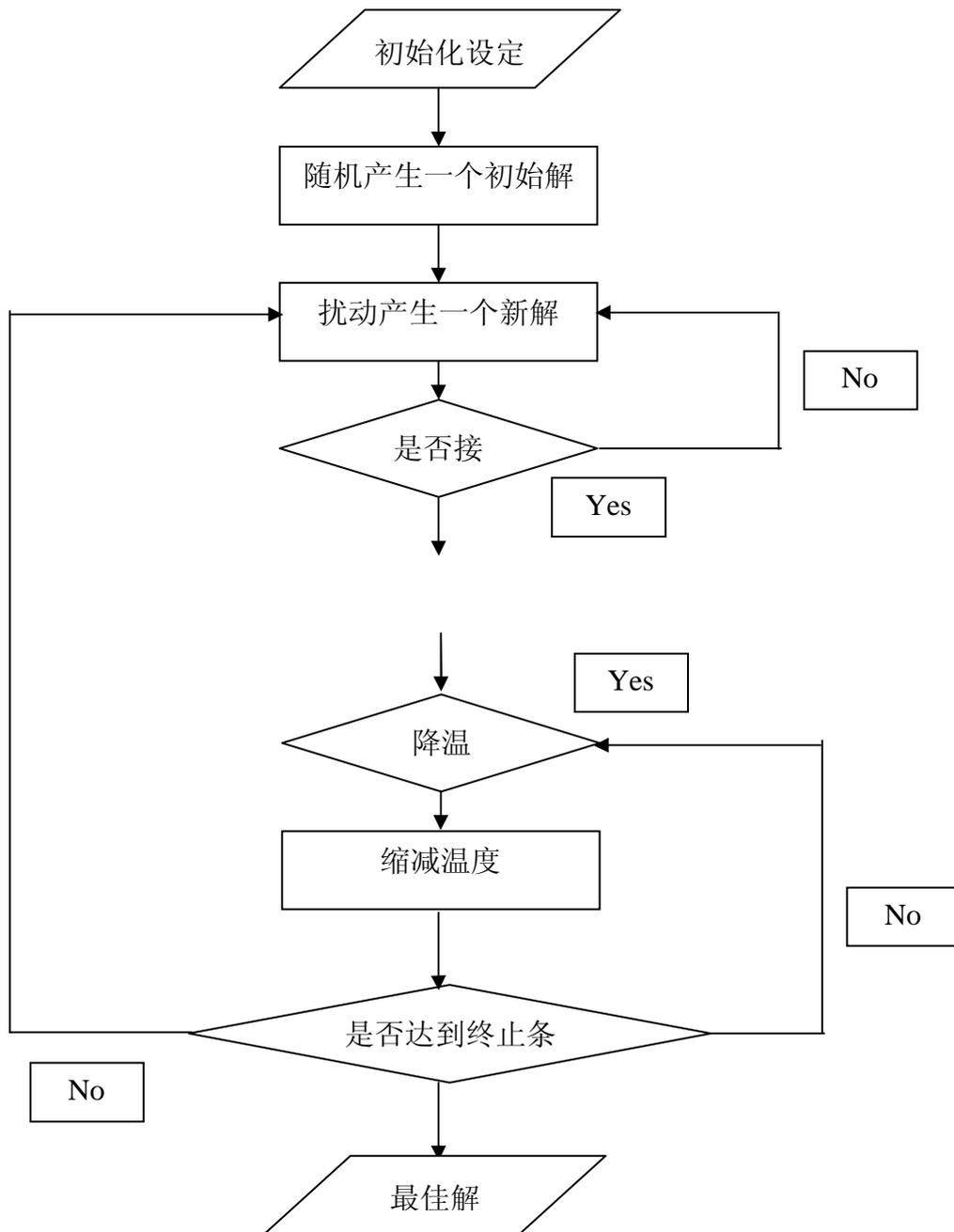


图 1 模拟退火法流程图  
Fig.1 Flowchart SA

## 1 模拟退火算法的模型

模拟退火法的基本思想，就函数最小值问题来说，模拟退火的主要思想是：在搜索区间（二维平面中）随机游走（即随机选择点），再以 Metropolis 抽样准则，使随机游走逐渐收敛于局部最优解。而温度即是 Metropolis 算法中的一个重要控制参数，可以认为这个参数的大小控制了随时过程向局部或全局最优解移动的快慢<sup>[3]</sup>。

冷却参数表、领域结构和新解产生器、接受准则和随机数产生器（即 Metropolis 算法）一起构成算法的三大支柱。

## 1.1 重点抽样与 Metropolis 算法

Metropolis 是一种有效的重点抽样法，其算法为：系统从能量一个状态变化到另一个状态时，相应的能量从  $E_1$  变化到  $E_2$ ，概率为  $p = \exp[-(E_2 - E_1)/kT]$ 。如果  $E_2 < E_1$ ，系统接收此状态，否则，以一个随机的概率接收此或丢弃此状态。这种经常一定次数的迭代，系统会逐渐趋于一个稳定的分布状态<sup>[4]</sup>。

重点抽样时，新状态下如果向下则接受（局部最优），若向上（全局搜索），以一定机率接受。模拟退火方法从某个初始解出发，经过大量解的变换后，可以求得给定控制参数值时组合优化问题的相对最优解。然后减小控制参数  $T$  的值，重复执行 Metropolis 算法，就可以在控制参数  $T$  趋于零时，最终求得组合优化问题的整体最优解。控制参数的值必须缓慢衰减。

其中温度是一个 Metropolis 的重要控制参数，模拟退火可视为递减控制参数时 Metropolis 算法的迭代。开始  $T$  值大，可能接受较差的恶化解，随着  $T$  的减小，只能接受较好的恶化解，最后在  $T$  趋于 0 时，就不再接受任何恶化解了。

在无限高温时，系统立即均匀分布，接受所有提出的变换。 $T$  的衰减越小， $T$  到达终点的时间越长；但可使马可夫链越小，到达准平衡分布的时间越短。

## 1.2 参数的选择

我们称调整模拟退火法的一系列重要参数为冷却进度表。它控制参数  $T$  的初值及其衰减函数，对应的 MARKOV 链长度和停止条件，非常重要<sup>[5]</sup>。

### 1.2.1 冷却进度表应当规定的参数

1. 控制参数  $t$  的初值  $t_0$ ;
2. 控制参数  $t$  的衰减函数;
3. 马尔可夫链的长度  $L_k$ 。（即每一次随机游走过程，要迭代多少次，才能趋于一个准平衡分布，即一个局部收敛解位置）
4. 结束条件的选择

### 1.2.2 有效的冷却进度表判据

- 1、算法的收敛：主要取决于衰减函数和马可夫链的长度及停止准则的选择
- 2、算法的实验性能：最终解的质量和 CPU 的时间。

### 1.2.3 参数的选择

- 1、控制参数初值  $T_0$  的选取

一般要求初始值  $t_0$  的值要充分大，即一开始即处于高温状态，且 Metropolis 的接收率约为 1。

- 2、衰减函数的选取

衰减函数用于控制温度的退火速度，一个常用的函数为： $T(n+1) = K * T(n)$ ，其中  $K$  是一个非常接近于 1 的常数。

- 3、马可夫链长度  $L$  的选取

原则是：在衰减参数  $T$  的衰减函数已选定的前提下， $L$  应选得在控制参数的每一取值上都能恢复准平衡。

- 4、终止条件

有很多种终止条件的选择, 各种不同的条件对算法的性能和解的质量有很大影响, 我们选择一个最优解与最新的一个最优解之差小于某个容差, 即可停止此次马尔可夫链的迭代。

## 2 模拟退火算法在最优化路径的简单应用

2008 年五月十二日四川遭遇了数十年未见的巨大地震, 对当地的各方面都造成了难以计数的破坏, 对这种情况, 我们除了对死者表示哀悼外, 还可以借助我们自己掌握的一点微薄之力, 使用数学工具建立一些模型, 让灾情的巡视路线设计的更合理。设计一组巡视灾区的简略模型和详细模型, 在模型中应用了模拟退火法。

### 2.1 问题重述

2008 年 5 月 12 日四川发生大地震, 图 2 为四川地震一截图。成都领导决定带领有关部门负责人到受灾地区各县(市)巡视, 巡视路线指导从成都所在地出发, 走遍各受灾县(市), 又回到成都政府所在地的路线。路上合理考虑阻抗。

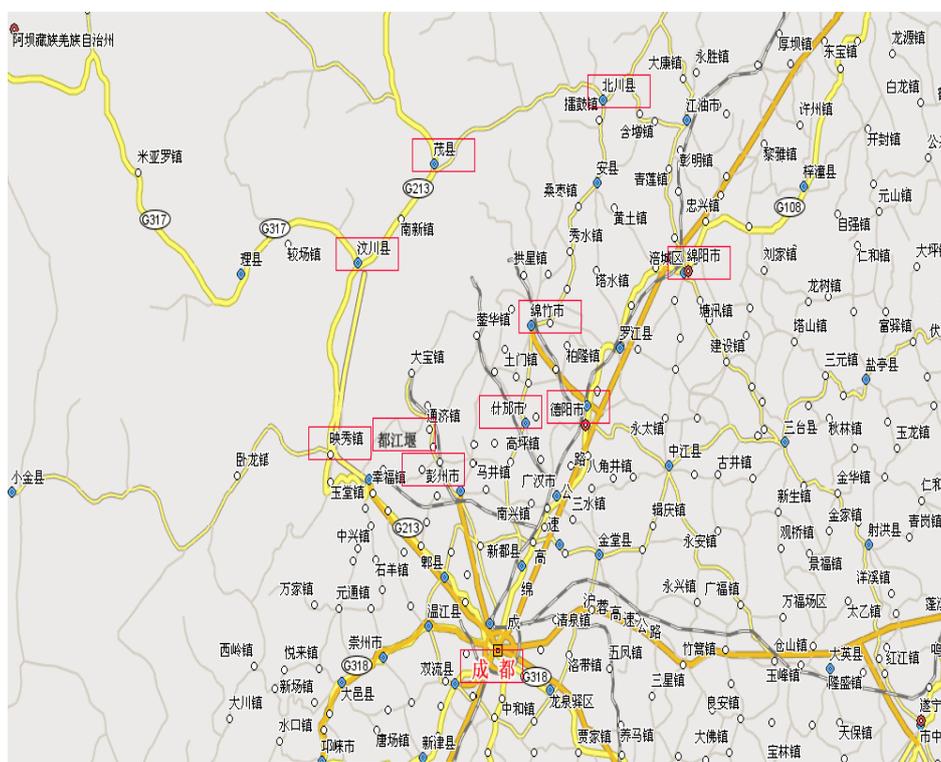


图 2 四川地震截图

Fig.2 Screenshot of Sichuan Earthquake

问题是假定巡视人员在各县停留时间  $t=1.5$  小时, 市停留时间  $T=2.5$  小时, 汽车行驶一般公路(国道)速度  $v=60$  公里/小时, 行驶高速速度  $V=89$  公里/小时。若分一组巡视地图上的方框地区, 如何设计巡视线路, 最短时间为多少? 若要在 18 小时内完成巡视, 至少应分几组? 请给出这种分组下你认为最佳的巡视路线。

表 1 四川主要受灾地区

Table.1 Sichuan mainly affected areas

汶川县	北川县	绵竹市	都江堰市
广元市	青川县	成都	什邡市
安县	平武县	彭州市	茂县
江油市	理县	雅安	眉山
巴中	南充	遂宁	乐山
甘孜	广安	泸州	凉山
自贡	资阳	内江	

说明：两地间的距离可以通过 INTERNET 网查询，路况可做一个大致估计，路上的行驶不需要很精确，但要大致合理。

### 模型的假设

把各个县市看做质点。

所查资料真实可信。

巡视路线可以重复。

无任何意外发生巡视中断。

对于某些要经过多次的县市,只停留一次。

对于巡视时已巡视过的市县路过时不必停留。

对于工作人员休息问题，可认为巡视人员在路上休息。

### 符号的说明

1) 图中黑线表示一般的公路和国道。

2) 图中加粗的红线表示高速公路。

3) 图中加粗的蓝线表示区域分界线。

3) 各质点用  $v_i$  表示。

4) 图中的数字表示两地间的行驶时间。

5)  $t_2$ : 市停留时间;  $t_1$ : 县停留时间。

6) 各组巡视时间为  $T_i$ ,  $A_i$  表示均衡度<sup>[6]</sup>。

## 2.2 解析过程

根据上述模拟退火法的基本思想，现步骤如下：

步 1: 设定初始温度 T, 给定一个初始的巡视路线。

步 2 : 步 3 --8 循环 K 次

步 3: 步 4-7 循环 M 次

步 4: 随机选择路线的一段

步 5: 随机确定将选定的路线反转或移动，即两种调整方式：反转、移动。

步 6: 计算代价 D, 即调整前后的总路程的长度之差

步 7: 按照如下规则确定是否做调整：

如果  $D < 0$ , 则调整

如果  $D > 0$ , 则按照  $\text{EXP}(-D/T)$  的概率进行调整

步 8:  $T * 0.9 \rightarrow T$ , 降温

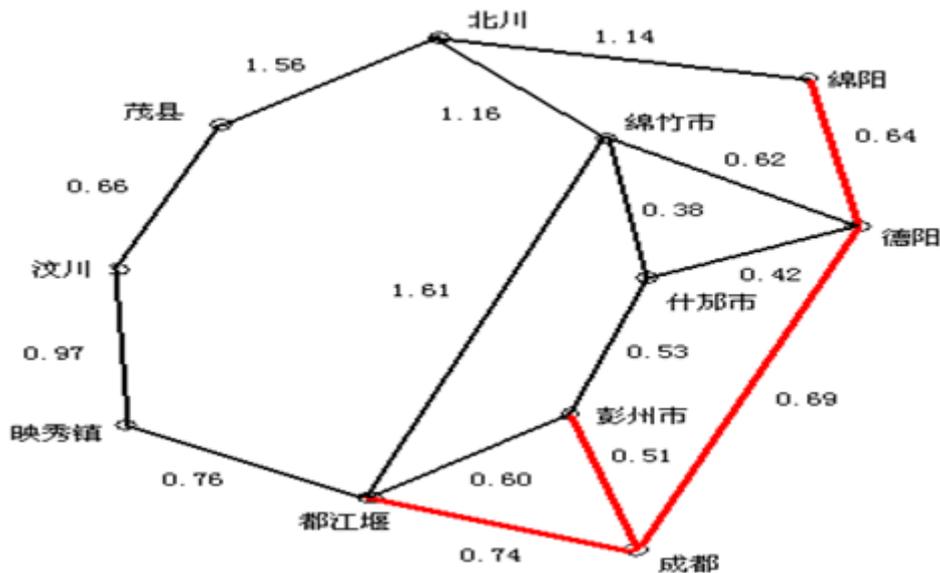


图3 巡视图

Fig.3 Patrol figure

运行结果为：成都——德阳——绵阳——北川——茂县——汶川——映秀——都江堰——绵竹——什邡——彭州——成都，总巡视时间为 29.51。

### 3 总结

模拟退火算法显示了与一般常用算法不同的优越性，具有思路清晰，使用灵活的特点。与局部搜索算法相比，模拟退火算法可以在较短时间内求得更优近似解，而且允许任意选取出时路径和随机数序列，故减少了算法求解路径的前期工作量。另外需指出的是，由于模拟退火法的直接性和简单化，以及自不同具体问题中对冷却参数等需要经过多次修改材可以得到比价好的结果，在具体应用时仍需进一步完善。

### [参考文献] (References)

- [1] KRIKPATRICKS, GELETTTC, VEECHIM. Optimizationbysimulatedannealing[J]. Science, 1983, 220(8):671-680.
- [2] 康立山, 谢云. 非数值并行算法[M]. 北京: 科技出版社, 1994.2-129.
- [3] PAPANIMITRIOUCH, SEIGLITIK, 刘振宏. 组合最优化算法和复杂性[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.533-537.
- [4] 王树禾, 图论, 北京: 科学出版社, 2004
- [5] 郑煜等, 数学模型, 哈尔滨: 东北林业大学出版社, 2006
- [6] 刁在筠等, 运筹学, 北京: 高等教育出版社, 2001
- [1] KRIKPATRICKS, GELETTTC, VEECHIM. Optimizationbysimulatedannealing [J]. Science, 1983, 220(8) :671-680.
- [2] Kang Lishan, Xie. Non-numerical parallel algorithms [M]. Beijing: Science Press, 1994.2-129.
- [3] PAPANIMITRIOUCH, SEIGLITIK, Liu Zhenhong. combinatorial optimization algorithms and complexity [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988.533-537.
- [4] Wang Wo, graph theory, Beijing: Science Press, 2004
- [5] Zheng Yu, etc., mathematical model, Harbin: Northeast Forestry University Press, 2006
- [6] Diao in Yun and so on, operations research, Beijing: Higher Education Press, 2001