基于进化博弈论两种群的生灭过程

毕玲玲，李伟
（辽宁工程技术大学理学院，辽宁 阜新 123000）

摘要：本文基于进化博弈论在生物方面的应用，利用行为博弈论深入而广泛的理论实践性，针对博弈者在特定环境下、完全理性和追求均衡解的限制，引入外界环境对种群成长影响程度参数，排除经典博弈论对种群数量及完全理性的要求，分析适合度景观和随机博弈过程，建立种群在非理想环境下的生灭过程模型。

关键词：进化博弈论；适合度；固定概率；Moran 过程
中图分类号：[Q89]

The birth-death process of two species base on evolutionary game theory

BI Lingling, LI Wei
(science school,Liaoning Technical University, LiaoNing FuXin 123000)

Abstract: In this paper，we base on the applications of evolutionary game theory in biology , apply behavioral game's deep and extensive practical theory, against the questions about a particular environment and completely rationality and equilibrium solution to the player ,add parameters that the external environment impacts on types of biological communities' growth, exclude the limit populations and fully rational requirements of the classic game，analysis the fitness landscape and the process of random game, establish the birth-death process model of types of biological communities in the non-ideal environment.

Keywords: Evolutionary game theory; The fitness landscape; Fixed probability; Moran process

0 引言

经典非合作博弈认为博弈者是完全理性的，对于博弈有着共同的认识，并且有相同的经验[1]，能完全准确地预测博弈的均衡结果。然而，现实的博弈者并不一定能达到这样的要求，使博弈论在一定程度上受到局限。随着博弈论的深入研究,1970 年代，生态学家 Maynard Smith and Price 结合生物进化论与经典博弈理论在研究生态演化现象的基础上而提出了进化博弈理论的基本均衡概念-进化稳定策略，使博弈论广泛应用经济市场、股票市场以及生物进化等领域。对比环境对生物进化的影响[2]及 “复制动态”[3]方程，要求种群相互作用也是均等的，而进化博弈给出种群彼此之间的作用具有随机性，更为接近现实。文献[4]对有限理性做出的进一步解释，以及文献[5]对合作博弈中复杂性与稳定性的分析，文献[6]生物在污染环境随的生灭过程，以及空间环境对生物种群生长发展的作用，比较全面了解了种群内的相互作用机制，以及对环境的适应关系，一定条件下竞争有利于物种进化，但当其它物种入侵时，合作是有利于抵制入侵的。本文将基于前人的分析研究，深入学习博弈论与生物相关知识，运用进化博弈论系统理论，分析环境因素，引入随机环境变化的参数，分析两种群的竞争合作关系，利用转移概率矩阵，得到其适合度，建立生灭过程模型，探究其固定概率。

1 相关理论及内容

进化博弈论考虑到人们的有限理性[4]，即人们不可能一开始就找到均衡解，它是一个不断学习的过程。这样就克服了经典博弈对实际脱离的问题，其理论基础实践性更强，也是在

作者简介：毕玲玲，（1986-），女，硕士，主要研究方向：生物数学，工程分析与计算，金融数学。
通信联系人：李伟，（1961-），男，教授，硕士，主要研究方向：工程分析与计算. E-mail: fengyun6002@126.com

一定程度上对纳什均衡方法的筛选，使其应用深刻而广泛。特别是对研究生物竞争合作关系及生物多样性等问题意义重大。

生灭过程可作如下解释[7]：若 $X(t)$ 代表一个生物群体在时刻 t 的大小，则在很小的时间 h 内，群体变化有三种可能，状态由 i 变到 $i+1$，即增加一个个体，其概率为 $\lambda_i h+o(h)$；状态由 i 变到 $i-1$，即减少一个个体，其概率为 $\mu_i h+o(h)$；种群大小不增不减，其概率为 $1-\lambda_i h-\mu_i h+o(h)$.

适合度[8]：种群的繁殖速率。

固定概率[8]:某类种群最终占领整个种群的概率。

Moran 过程[8]:基于生灭过程的策略进化动态模型。

在某随机环境里，生活着数量一定的 A 和 B 两种群，其中 A 的数量为 i、B 的数量为 $N-i$；环境对它们影响程度分别为 α_1 和 α_2；种群内个体相互作用是随机的，内个体间的博弈效用函数如图下：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

2 建立模型

因为环境是随机的，环境对每类个体的影响是不同；并且每类个体死亡和繁殖速率也不可能相等;下面引入环境对两种群的影响参数 α_1、α_2，分析两种群的 Moran 过程。

基本假设：

(1) 环境对不同种群影响不同，分别为 α_1 和 α_2；对种群内每一个体影响是相同的。

(2) 种群中个体生殖或死亡的概率与个体的年龄无关。

(3) 单位时间内，一个个体死亡就有一个个体繁殖，即：随机选择 A 或 B 个体繁殖或死亡，个体总数不变。

(4)不考虑漂变，即：A 体后代仍为 A，B 个体后代仍为 B。

此时，两种群的适合度除种群博弈外，还受环境的影响。

建立模型：

设唯一的随机变量 A 类个体的数量为 i，则可知 B 类个体数量为 $N-i$，在此条件下两类个体的 Moran 过程的状态空间是 $i=0,1,2,...N$，则 A 和 B 的适合度分别是 f_i 和 g_i。

两种群的博弈期望支付为[8]：

$$F_i=\frac{a(i-1)+b(N-i)}{N-1} \qquad (1)$$

$$G_i=\frac{ci+d(N-i-1)}{N-1} \qquad (2)$$

经典进化博弈论动力学下，期望支付代表适合度，F_i 和 G_i 就表示适合度。

现在引入自然环境影响对两种群影响的参数，并求其其适合度：

$$f_i=1-\alpha_1+\alpha_1 F_1 \qquad (3)$$

$$g_i = 1-\alpha_2+\alpha_2 G_i \qquad (4)$$

考虑下面的 Moran 过程，A、B 两种群的随机进化过程，状态变量 i 表示 A 个体的数量。从状态 i 转移到状态 $i+1$ 的概率是

$$p_{i,i+1} = \frac{if_i}{if_i+(N-i)g_i}\frac{N-i}{N} \qquad (5)$$

$$p_{i,i-1} = \frac{(N-i)g_i}{if_i+(N-i)g_i}\frac{i}{N} \qquad (6)$$

从而过程保持在状态 i 的概率为

$$p_{i,i} = 1-p_{i,i+1}-p_{i,i-1} \qquad (7)$$

从状态 i 转移到其他状态的概率是 0.

令 $\partial_i = P_{i,i+1}$，$\beta_i = P_{i,i-1}$，则 $P_{i,i} = 1-\partial_i-\beta_i$

故其转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1-\partial_1-\beta_1 & \partial_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{N-1} & 1-\partial_{N-1}-\beta_{N-1} & \partial_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意到 $p_{0,0}=1$ 和 $p_{N,N}=1$,表示 $i=0$ 和 $i=N$ 的生灭过程，即种群达到吸收态。一旦种群达到吸收状态，那么种群将将永远保持在那里。

用 x_i 表示 A 个体由状态 i 出发的固定概率，则由状态 i 到达 0 时的固定概率为 $1-x_i$；可得

$$x_i = \beta_i x_{i-1}+(1-\partial_i-\beta_i)+\partial_i x_{i+1}, i=1,2,3,\ldots N-1 \qquad (8)$$

$$x_N = 1$$

令 $\gamma_i = \dfrac{\beta_i}{\partial_i}$，整理（8）式得

$$x_i = \frac{1+\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=1}^{j}\gamma_k}{1+\sum_{j=1}^{N-1}\prod_{k=1}^{j}\gamma_k}$$

将 f_i, g_i 代入上式，得 A 的固定概率为

$$x_i = \frac{1+\sum_{k=1}^{i-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{f_i}{g_i}}{1+\sum_{k=1}^{N-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{f_i}{g_i}}$$

最终混合种群将达到共存、全 A 或全 B 状态。

3 结论

A,B 在受环境影响的同时，它们彼此之间进行博弈，结果共存或一类群体占领整个种群。随着环境的改变 α_1 和 α_2 也发生改变，但对于特定环境，α_1 和 α_2 是常数。求出 A 类个体的固定概率 x_i。若 $x_i > \frac{i}{N}$，则选择将有利于 A 被固定下来，即有利于 A 占领整个种群；若 $x_i = \frac{i}{N}$，自然选择有利于其共存；若 $x_i < \frac{i}{N}$，选择将更利于 B 被固定下来，即有利于 B 占领整个种群。

[参考文献] (References)

[1] 孙洪洋. 随机过程[M]. 机械工业出版社，2007，108-117.
[2] 肖条军. 博弈论及其应用[M]. 上海三联书店-上海人民出版社, 2004.7, 17-96.
[3] 陈 欣，和金生. 随机环境生灭过程模型的应用[J].辽宁工程技术大学学报，2005,（24）:433-435.
[4] Martin A.Nowak. Evolutionary Dynamics Exporing the Equations of Life[M].Harvard University Press, 2009, 67-91.
[5] 谢识予. 有限理性条件下的进化博弈理论[J]. 上海财经大学学报,2001,(3):3-9.
[6] 吴 昊, 杨梅英. 合作竞争博弈中的复杂性与演化均衡的稳定性分析[J]. 系统工程理论与实践, 2004(2)90-94.
[7] 张 玲，刘宇红. 生物种群在污染环境中的生灭过程[J]. 大学数学，2007,(23):27-32.