Vasicek 随机利率下跳扩散模型的欧式期权定价

许晴，张建英
（中国矿业大学理学院，江苏 徐州 221116）

摘要：本文主要研究在无交易费用无摩擦费用的理性市场条件下，当标的股票价格服从 Vasicek 随机利率下跳扩散时，欧式看涨看跌期权的定价公式及其平价公式的问题。该跳扩散模型的跳跃次数服从泊松过程，跳跃的幅度服从正态分布过程，比较形象地反应市场冲击对股市价格的影响；同时利率服从 Vasicek 模型，较常数利率模型更能够反应当前利率市场化对金融衍生产品价值的影响。根据鞅定价原理，充分利用广义 Itô 公式和随机分析的性质，推导出欧式看涨看跌期权定价公式以及平价公式。

关键词：Vasicek 随机利率；跳扩散模型；欧式期权
中图分类号：F830.9

Pricing European options based on jumping diffusion model with Vasicek stochastic interest rate

XU Qing, ZHANG Jianying
(The Science of School, China University of Mine and Technology, Jiangsu Xuzhou 221116)

Abstract: This paper mainly studied European option pricing problems when underlying stock price follows a jumping diffusion model with Vasicek stochastic interest rate.In this jump diffusion model number of jumping follows random poisson process, jump amplitude follows normal distribution process, which reacts influence of the market shocks on stock price ; Meanwhile, compareing constants interest rate obedience Vasicek interest model can refelect the reaction of the current interest rate marketization on financial derivatives value .According to the principle of martingale,using generalized Itô formula,the pricing formulae of European call, put options and parity formulae were deduced.

Key words: Vasicek stochastic interest rate,;Jumping diffusion model; European options.

0 引言

1973 年 Black 和 Shocle[1]推导出著名的 B-S 欧式期权的定价公式，在此基础上，1976 年 Merton[2]构造出跳扩散模型，并推导出相应的欧式期权定价公式，2007 年陈超[3]构造出了跳扩散模型时的脆弱欧式期权定价。这三种模型均假设利率为常数。目前市场化利率是时刻变动的，对金融产品的价值产生着不容忽视的影响，因此期权的定价需要考虑利率风险。于此同时文献[4][5]分别讨论了当标的股票价格服从随机利率下的连续扩散模型的欧式期权定价。本文研究 Vasicek 随机利率下的跳扩散的欧式期权，应用风险中性定价原理和 Itô 公式，推导出该情况下欧式看涨看跌期权的定价公式及平价公式。

1 基础知识

1.1 随机利率下的跳扩散模型

假设股票价格 S_t 在风险中性概率测度 Q 下满足随机利率下的跳扩散模型[2]

作者简介：许晴（1985-），女，硕士研究生，金融数学. E-mail: xuqingxuexi@126.com

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t - \lambda k)dt + \sigma_s dW_s(t) + U dq_t \text{，} \tag{1.1}$$

其中常数 σ_s 为股票价格的波动率， $W_S(t)$ 是 Q 下的标准布朗运动, U 表示股票价格发生跳跃时的跳幅, $k = E_Q(U)$， q_t 是一个强度为 λ 的泊松计数过程， r_t 是 Vasicek 随机利率，满足如下随机微分方程[6]

$$dr_t = a(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_r(t) \tag{1.2}$$

其中 a, θ 和 σ_r 均为常数，$W_r(t)$ 是 Q 下的标准布朗运动，而且 $(W_S(t), W_r(t))$ 是 Q 下的二维正态分布， $Cov(W_S(t), W_r(t)) = \rho_{sr} t$ 。应用 Itô 公式解方程(1.2)得

$$r_u = \theta + (r_t - \theta)e^{a(t-u)} + \sigma_r e^{-au}\int_t^u e^{at} dW_r(t) \text{，} \quad \forall u > t \tag{1.3}$$

显然 r_u 服从高斯过程。作如下假设：

(1) U 与 q_t 相互独立, (U, q_t) 与 $(W_s(t), W_r(t))$ 相互独立；(2) $\ln(1+U)$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma_U^2)$.

由 Poisson 过程的性质 $q_T - q_t = q_\tau$ ，利用广义 Itô 公式解方程(1.1)，得 T 时刻标的股票价格 S_t 的概率分布

$$S_T = S_t e^{\int_t^T r_u du + \sigma_S \int_t^T dW_S(u) - \left(\frac{1}{2}\sigma_S^2 + \lambda_S k\right)\tau + \sum_{i=1}^{q_\tau}\ln(1+U_i)} , \tag{1.4}$$

其中 $\tau = T - t$. 由(1.3)式和 Brown 运动的性质，可知随机积分 $R = \int_t^T r_u du$ 服从正态分布 $N(\mu_R, \sigma_R^2)$ ，其中 [7]

$$u_R = \theta\tau + \frac{r_t - \theta}{k}\left(1 - e^{-a\tau}\right),\ \sigma_R^2 = \frac{\sigma_r^2}{2a^3}\left(2a\tau + 4e^{-a\tau} - e^{-2a\tau} - 3\right)$$

又 $W = \sigma_S \int_t^T dW_S(u)$ 服从正态分布 $N\left(0, \sigma_S^2(T-t)\right)$ ，因此存在标准正态随机变量 Z_S ，使得 $R + W = r_R\tau + \sigma\sqrt{\tau}Z_S$,其中

$$r_R = \frac{\mu_R}{\tau},\ \sigma^2 = \frac{\left(\sigma_R^2 + \sigma_S^2\tau + 2\gamma\right)}{\tau},\ \gamma = Cov(R, W) = \frac{\rho_{sr}\sigma_r\sigma_s}{a}\left[\tau - \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a\tau}\right)\right],$$

故 T 时刻标的股票价格 S_t 的概率分布为

$$S_T = S_t e^{\left(r_R - \frac{1}{2}\sigma_S^2 - \lambda k\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau}Z_S + \sum_{i=1}^{q_\tau}\ln(1+U_i)} \tag{1.5}$$

由正态分布的可加性可知 $\sum_{i=1}^{q_\tau}\ln(1+U_i) \sim N(n\mu, n\sigma_U^2)$ ，存在随机变量 $Z_1 \sim N(0,1)$ ，使得

$$\sum_{i=1}^{q_\tau}\ln(1+U_i) = n\mu + \sqrt{n}\sigma_U Z_1$$

当 $q_\tau = n$ 时，存在随机变量 $Z_n \sim N(0,1)$ ，使得

$$\sqrt{n}\sigma_U Z_1 + \sigma\sqrt{\tau}Z_S = \sigma_n Z_n$$

则股票价格在 T 时刻的概率分布又可以表示为

$$S_T = S_t e^{\left(r_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2\right)\tau + \sigma_n\sqrt{\tau}Z_n}$$

其中 $\sigma_n^2 = \sigma^2 + n\sigma_U^2$ ， $r_n = r_R - \lambda k + \frac{1}{\tau}\left(n\mu + \frac{1}{2}n\sigma_U^2 + \frac{1}{2}\sigma_R^2 + \gamma\right)$

2 欧式期权的定价

在风险中性概率Q下，根据鞅定价原理，利用随机分析的性质，研究在上述模型下的欧式看涨看跌期权定价公式以及平价公式。

定理 2.1 标的股票价格S_t服从 Vasicek 随机利率下的跳扩散模型，执行价格为K，到期日为T的欧式股票看涨期权，在t时刻的价值为

$$C(t,T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda(1+k)\tau}}{n!}S_t HN(a_n)-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}Ke^{-\mu_R+\frac{1}{2}\sigma_R^2}N(b_n) \qquad (2.1)$$

其中$\tau=T-t$, $H=e^{n\mu+\frac{1}{2}n\sigma_U^2}$.

$$a_n=\frac{\ln\frac{S_t}{K}+\left(r_n-\frac{1}{2}\sigma_n^2+\rho_{1n}\sigma_1\sigma_n\right)\tau}{\sigma_n\sqrt{\tau}},\ b_n=\frac{\ln\frac{S_t}{K}+\left(r_n-\frac{1}{2}\sigma_n^2-\rho_{2n}\sigma_R^{'}\sigma_n\right)\tau}{\sigma_n\sqrt{\tau}}$$

$$\rho_{1n}=\frac{\sigma_S^2\tau+n\sigma_U^2+\gamma}{\sigma_n\sigma\tau},\ \rho_{2n}=\frac{\sigma_R^2\tau+\gamma}{\sigma_n\sigma_R^{'}\tau}.$$

证明 由鞅定价原理，在t时刻欧式看涨期权的价值为

$$\begin{aligned}C(t,T)&=\left[e^{-\int_t^T r(u)du}\max(S_T-K,0)\right]\\&=E_Q\left[e^{-\int_t^T r(u)du}S_T I_{\{S_T>K\}}\right]-E_Q\left[Ke^{-\int_t^T r(u)du}I_{\{S_T>K\}}\right]=E_1-E_2\end{aligned} \qquad (2.2)$$

分别计算E_1和E_2.

（1）根据全期望公式

$$\begin{aligned}E_1&=E_Q\left[E_Q\left[e^{-\int_t^T r(u)du}S_T I_{\{S_T>K\}}\right]|q_\tau\right]\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}E_Q\left[e^{-\int_t^T r(u)du}S_T I_{\{S_T>K\}}\,|\,q_\tau=n\right]\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}E_1^{'}\end{aligned} \qquad (2.3)$$

对$E_1^{'}$进行计算.将标的股票价格S_t概率分布 (2.4) 式代入$E_1^{'}$，

$$E_1^{'}=E_Q\left[S_t e^{\left(-\lambda k-\frac{1}{2}\sigma_S^2\right)\tau+\sigma_S\int_t^T dW(u)+\sum_{i=1}^{n}\ln(1+U_i)}I_{\{S_T>K\}}\,|\,q_\tau=n\right] \qquad (2.4)$$

不妨记$W=\sigma_S\int_t^T dW(u)$， $J=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+U_i)$， $R=\int_t^T r_u du$，由正态分布的可加性，$W+J$服从正态分布$N\left(\mu,\sigma_S^2\tau+n\sigma_U^2,\right)$，又$U$与$q_t$相互独立，$(U,q_t)$与$(W_s(t),W_r(t))$相互独立，所以存在$Z_2\sim N(0,1)$，使得

$$\sigma_S\int_t^T dW(u)+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+U_i\right)=n\mu+\sigma_1\sqrt{\tau}Z_2$$

其中$\sigma_1^2=\frac{\left(\sigma_S^2\tau+n\sigma_U^2\right)}{\tau}$.由正态分布的性质可以得到$(Z_2,Z_n)$服从二维正态分布，相关系数

$$\rho_{1n}=\mathrm{cov}\left(Z_2,Z_n\right)=\frac{\mathrm{cov}\left(W+J,W+J+R\right)}{\sigma_n\sigma\tau}=\frac{\sigma_S^2\tau+n\sigma_U^2+\gamma}{\sigma_n\sigma\tau}.$$

所以 $$E_1^{'} = S_t e^{-(\lambda k+\frac{1}{2}\sigma_S^2)\tau+n\mu}\int_a^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma_1\sqrt{\tau}Z_2}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{1n}^2}}e^{-\frac{Z_2^2-2\rho Z_2Z_n+Z_n^2}{2\left(1-\rho_{1n}^2\right)}}dZ_2dZ_n \tag{2.5}$$

作积分变换，令 $u = Z_S-\rho_{1n}\sigma_1\sqrt{\tau}$，$v = Z_2-\sigma_1\sqrt{\tau}$，则有

$$E_1^{'} = S_t e^{\left(-\lambda k-\frac{1}{2}\sigma_S^2+\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\tau+n\mu}\int_{a^{'}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{1n}^2}}e^{-\frac{v^2-2\rho_{1n}vu+u^2}{2\left(1-\rho_{1n}^2\right)}}dvdu$$

$$= S_t e^{(-\lambda k)\tau}HN(a_n) \tag{2.6}$$

将(2.6)式代入(2.3)式，即得到 E_1.参数 a_n 的计算可根据变换得到，故省略。

（2）同上由全期望公式，可得

$$E_2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}E_Q\left[e^{-\int_t^T r(u)du}KI_{\{S_T>K\}}\mid q_\tau = n\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}E_2^{'}. \tag{2.7}$$

由于 $R=\int_t^T r_u du$ 服从正态分布 $N(\mu_R,\sigma_R^2)$，存在随机变量 $Z_3\sim N(0,1)$，使得 $R=\mu_R+\sigma_R^{'}\sqrt{\tau}Z_3$，其中 $\sigma_R^{'}=\frac{\sigma_R}{\sqrt{\tau}}$.由正态分布的性质,可得 (Z_3,Z_n) 服从二维正态分布,

相关系数 $$\rho_{2n}=\operatorname{cov}\left(Z_3,Z_n\right)=\frac{\operatorname{cov}(R,W+J+R)}{\sigma_R^{'}\sigma_n\tau}=\frac{\sigma_R^2+\gamma}{\sigma_R^{'}\sigma_n\tau}$$

所以 $$E_2^{'} = K\int_a^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\mu_R+\sigma_R^{'}\sqrt{\tau}Z_3)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{2n}^2}}e^{-\frac{Z_3^2-2\rho_{2n}Z_3Z_n+Z_n^2}{2\left(1-\rho_{2n}^2\right)}}dZ_3dZ_n \tag{2.8}$$

作积分变化，令 $u = Z_n-\rho_{2n}\sigma_R^{'}\sqrt{\tau}$，$v = Z_3-\sigma_R^{'}\sqrt{\tau}$

$$E_2^{'} = Ke^{-\mu_R+\frac{1}{2}\sigma_R^2}\int_{a^{'}}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{2n}^2}}e^{-\frac{v^2-2\rho_{2n}vu+u^2}{2\left(1-\rho_{2n}^2\right)}}dvdu$$

$$= Ke^{-\mu_R+\frac{1}{2}\sigma_R^2}N(b_n) \tag{2.9}$$

将 (2.9)式代入(2.7)式，即得 E_2.

证毕.

定理 2.2 标的股票价格 S_t 服从 Vasicek 随机利率下的跳扩散模型，执行价格为 K，到期日为 T 的欧式股票期权，在 t 时刻的平价公式

$$C_t-P_t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda(1+k)\tau}}{n!}S_tH-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}Ke^{-\mu_R+\frac{1}{2}\sigma_R^2}$$

其中参数同定理 1，证明过程和定理 1 类似，故省略。

由上述欧式看涨期权定价和平价公式，可以得到欧式看跌期权的价值公式。

定理 2.3 标的股票价格 S_t 服从 Vasicek 随机利率下的跳扩散模型，执行价格为 K，到期日为 T 的欧式股票看跌期权，在 t 时刻的价值为

$$C(t,T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda\tau}}{n!}Ke^{-\mu_R+\frac{1}{2}\sigma_R^2}N(-b_n)-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda\tau)^n e^{-\lambda(1+k)\tau}}{n!}S_tHN(-a_n)$$

参数同定理 1.

3 总结

本文根据鞅定价原理，利用 Itô 定理和随机分析的性质，在得出当标的股票价格服从

Vasicek 随机利率下的跳扩散模型时股票价格在到期日的概率分布以后，推导出了的欧式看涨看跌期权定价公式及其平价公式。本文采用的方法可尝试运用到随机利率下的其它期权定价研究。

[参考文献] (References)

[1] F.Black and M.Scholes.The Pricing of options and Corporate liabilities[J].Political Economy, 1973, 81(3), 637-659.

[2] RC.Merton.Option pricing when stock returns are discontinous[J].Journal of Financial Economics, 1976, 3(5), 125-144.

[3] 陈超.标的资产价格服从跳扩散过程的信用风险期权定价模型[J].浙江师范大学学报，2007,30(2),356-360.

[4] 孙玉洁，杜雪樵.Vasicek 利率模型下的欧式买权定价[J].合肥工业大学学报，2009,32（3）：442-444.

[5] 王亚伟，黎锁平，江波.函数 Vasicek 欧式买权定价的研究[J].甘肃科学学报，2008,20（1）：28-31.

[6] Vasicek,O.An equilibrium characterization of the term structure[J].Journal of Financial Economic,1977, 5(3),177-188.

[7] Duffie,D.and Singleton,k.MOdeling term structure of defaultable bonds [J].Review of Finanical Studies,1999, 12(3),687-720.