度量空间的完备化空间的等价刻划

郝诚

北京师范大学数学科学学院，北京100875

Email: haocheng05@mail.bnu.edu.cn

摘要: 在本文中, 我们将给出不同于传统的用到稠密性质的对度量空间之完备化空间的定义, 并证明此定义与传统定义等价. 我们的定义将用范畴论的语言给出, 使其可以在任意的范畴中推广.
关键词: 度量空间，范畴，完备化

1 引言

在[1，定义1.2.4]中, 张与林给出了如下度量空间的完备化的定义：

定义1. 包含给定度量空间 (X, ρ) 的最小的完备度量空间称为 X 的*完备化空间*. 其中最小的含义是: 任何一个以 (X, ρ) 为子空间的完备度量空间都以此空间为子空间.

注. 如果度量空间 (X_1, ρ_1) 与另一个度量空间 (X_2, ρ_2) 的子空间 (X_0, ρ_2) 是等距同构的, 我们就说 $(X_1, \rho_1))$ 可以嵌入 (X_2, ρ_2) . 在上述意义下, 我们认为 (X_1, ρ_1) 就是 (X_2, ρ_2) 的一个子空间. 见 [1, P 10].

但是，在此定义下的完备化空间在同构意义下并不是唯一的，即存在两个度量空间，他们都是某一特定空间的完备化，但这两个空间并不等距同构. 如果我们在上述定义中将要求完备化空间是“最小”的改为要求 X 在其完备化空间中稠密, 则一个空间的完备化在同构意义下唯一. 所以, 我们有如下定义, 见 [2, P 74].

定义1*. 度量空间 Y 称为度量空间 X 的完备化空间, 如果 Y 是完备的并且 X 在 Y 中稠密.

在这篇文章中, 我们将对**定义1**进行修改, 使其成为良定的并且与**定义1***等价. 同时我们将指出, 修改后的定义可以在范畴论的语言中得到表达, 从而可在更普遍的范畴中推广.

2 范畴论中的基本概念

在数学中, 范畴论以抽象的方式统一处理数学结构及各种结构间的关系; 见 [3, Definition 1.1].

定义2. 一个**范畴**由两个部分组成:

(i) 一个“**对象**”的类, 及

(ii) 对于任意两个对象 A 和 B, 一族由 A 到 B 的**态射**

满足如下性质:

- 态射的复合: 如果 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ 分别是由 A 到 B 和由 B 到 C 的态射, 则它们的符合$g \circ f : A \longrightarrow C$ 是由 A 到 C 的态射;
- 结合律: 如果 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ 均为态射, 那么 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- 恒同映射: 对于任一对象 X, 存在 X 到 X的态射$1_{\mathrm{X}} : X \longrightarrow X$ 称为 X 的*恒同态射*, 使得对任意的态射 $f : A \longrightarrow B$, 有 $1_{\mathrm{B}} \circ f = f = f \circ 1_{\mathrm{A}}$.

范畴的例子有很多, 比如所有群(环, 域)的全体作为对象, 群(环, 域)同态作为态射, 构成群(环, 域)的范畴; 向量空间的全体作为对象, 线性映射作为态射, 构成向量空间的范畴; 拓扑空间全体作为对象, 连续函数作为态射, 构成拓扑空间的范畴.

容易验证, 所有度量空间全体及度量空间之间的等距映射构成一个范畴, 其中度量空间作为对象, 等距映射作为态射. 这个范畴称为**度量空间的范畴**. 这里等距映射是指 $\varphi : (X, \rho_{\mathrm{X}}) \longrightarrow (Y, \rho_{\mathrm{Y}})$, 使得对任意 $x, x' \in X$, $\rho_{\mathrm{X}}(x, x') = \rho_{\mathrm{Y}}(\varphi(x), \varphi(x'))$ 成立. 注意到一个度量空间 X 是一个度量空间 Y 的子空间, 当且仅当在度量空间的范畴中存在由 X 到 Y 的态射(等距映射).

3 空间的完备化及其推广

现在, 我们可以定义用度量空间这个范畴的代数结构–空间之间的态射–来定义一个度量空间的完备化空间了:

定义1.** 设度量空间 $(Y, \rho_{\mathrm{Y}}; \varphi_{\mathrm{Y}})$ 包含度量空间 (X, ρ_{X}), 其中 φ_{Y} 是 X 到 Y 的态射, 称其为 (X, ρ_{X}) 的完备化空间, 如果 (Y, ρ_{Y}) 是完备的, 且对于任意包含 (X, ρ_{X}) 的完备空间 $(Z, \rho_{\mathrm{Z}}; \varphi_{\mathrm{Z}})$, 其中 φ_{Z} 为 X 到 Z 的态射, 存在由 Y 到 Z 的态射 φ, 使得图表

$$\begin{tikzcd}
(Y, \rho_{\mathrm{Y}}) \arrow[r, "\varphi"] & (Z, \rho_{\mathrm{Z}}) \\
(X, \rho_{\mathrm{X}}) \arrow[u, "\varphi_{\mathrm{Y}}"] \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{Z}}"'] &
\end{tikzcd}$$

交换, 即对任意 $x \in X$ 有 $\varphi_{\mathrm{Z}}(x) = \varphi \circ \varphi_{\mathrm{Y}}(x)$.

为说明**定义1****是良定的且与**定义1***等价, 我们需要下面的定理, 这也是本文的主要结果.

定理1. *(X, ρ_X) 为一度量空间. 如果 $(Y, \rho_Y; \varphi_Y)$ 是包含 (X, ρ_X) 的一个完备度量空间, 其中 φ_Y 是 X 到 Y 的嵌入映射, 则以下命题等价:*

1. *(X,ρ_X) 等距同构于 (Y,ρ_Y) 的一个稠密子空间, 更精确地说, $\varphi_Y(X)$ 在 (Y,ρ_Y) 中稠密;*

2. *对于任意包含 (X,ρ_X) 的完备空间 $(Z,\rho_Z;\varphi_Z)$, 其中 φ_Z 为 X 到 Z 的态射, 存在由 Y 到 Z 的态射 φ, 使得下面图表交换:*

$$\begin{tikzcd} & (Y,\rho_Y) \arrow[dr, "\varphi"] & \\ (X,\rho_X) \arrow[ur, "\varphi_Y"] \arrow[rr, "\varphi_Z"] & & (Z,\rho_Z) \end{tikzcd}$$

定理的证明将在下一节给出.

由此定理, 我们得到定义1*中的度量空间的完备化空间满足定义1**中的要求, 而定义1**中的完备化空间也满足定义1*中的要求, 所以两个定义是等价的. 而定义1**的形式可以利用交换图表在任意范畴中推广: 设 C 为一范畴, P 为一性质, $\mathsf{S}=\{X\in C \mid X$ 具有性质 $P\}$ 为满足性质 P 的对象全体组成的子类. 如果对任意 P 中的对象 A, A 到其自身的 1-1 态射为恒同映射, 则我们可以定义任意对象的 P 化如下.

定义3. 设 X 为一对象, Y 为一包含 X 的对象, 即存在 X 到 Y 的 1-1 态射 f_{Y}, 称 Y 为 X 的 P 化, 如果 $Y\in\mathsf{S}$ 且对于任意的 $Z\in\mathsf{S}$, 若 Z 包含 X 且 f_{Z} 为 X 到 Z 的 1-1 态射, 则存在 Y 到 Z 的 1-1 态射 f, 使得图表

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] & Z \\ X \arrow[u, "f_{\mathrm{Y}}"] \arrow[ur, "f_{\mathrm{Z}}"'] & \end{tikzcd}$$

交换.

注. 在度量空间的范畴中, 由于态射为度量空间之间的等距映射, 故由等距映射的性质知此范畴中的态射均为 1-1 映射.

4 定理的证明

定理1的证明. (1) $\Rightarrow$ (2): 设 (Z,ρ_{Z}) 为一个包含 (X,ρ_{X}) 的完备度量空间, 其中 φ_{Z} 代表 (X,ρ_{X}) 到 (Z,ρ_{Z}) 的等距嵌入. 由于 $\varphi_{\mathrm{Y}}(X)$ 在 (Y,ρ_{Y}) 中稠密, 故对任意的 $y\in(Y,\rho_{\mathrm{Y}})$, 存在 X 中的序列

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(X,\rho_{\mathrm{X}})$$

使得在 (Y,ρ_{Y})中 $\varphi_{\mathrm{Y}}(x_n)\to y$ 当 $n\to\infty$ 时成立. 由于 φ_{Y} 和 φ_{Z} 均为等矩嵌入, 即映射保度量, 故 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 均为对应空间中的 Cauchy 序列. 由假设, (Z,ρ_{Z}) 完备, 所以存在 $z\in(Z,\rho_{\mathrm{Z}})$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n)=z.$$

定义

$$\varphi:(Y,\,\rho_{\mathrm{Y}})\longrightarrow(Z,\,\rho_{\mathrm{Z}}),\;\;\varphi(y)\equiv z,$$

其中 $z=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n)$ 由上确定. 现在我们验证 φ 是良定的(即不依赖 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的选取)并且符合我们的要求.

(i) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $(X,\,\rho_{\mathrm{X}})$ 中的两个序列, 满足 $\{\varphi_{\mathrm{Y}}(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{\varphi_{\mathrm{Z}}(x'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 均趋向于 $y\in Y$. 那么

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{\mathrm{X}}(x_n,x'_n)=\lim_{n\to\infty}\rho_{\mathrm{Y}}(\varphi_{\mathrm{Y}}(x_n),\varphi_{\mathrm{Y}}(x'_n))=\rho_{\mathrm{Y}}(y,y)=0,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\rho_{\mathrm{Z}}(\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n),\varphi_{\mathrm{Z}}(x'_n))=\lim_{n\to\infty}\rho_{\mathrm{X}}(x_n,x'_n)=0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x'_n).$$

故 φ 是良定的.

(ii) φ 为等距映射. 任意 $y,\;y'\in(Y,\,\rho_{\mathrm{Y}})$, 存在 $(X,\,\rho_{\mathrm{X}})$ 中的两个序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Y}}(x_n)$ 和 $y'=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Y}}(x'_n)$. 由定义, $\varphi(y)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n)$ 且 $\varphi(y')=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n)$, 又由于 φ_{Y} 与 φ_{Z} 均为等距映射, 且距离函数与极限号可交换, 故

$$\begin{aligned}
&\rho_{\mathrm{Z}}\left(\varphi(y),\varphi(y')\right)\\
=&\rho_{\mathrm{Z}}\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n),\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x'_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\rho_{\mathrm{Z}}(\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n),\varphi_{\mathrm{Z}}(x'_n))\\
=&\lim_{n\to\infty}\rho_{\mathrm{X}}(x_n,x'_n)=\lim_{n\to\infty}\rho_{\mathrm{Y}}(\varphi_{\mathrm{Y}}(x_n),\varphi_{\mathrm{Y}}(x'_n))\\
=&\rho_{\mathrm{Y}}\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Y}}(x_n),\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Y}}(x'_n)\right)\\
=&\rho_{\mathrm{Y}}(y,y').
\end{aligned}$$

所以φ是等距映射.

(iii) 对任意的 $y=\varphi_{\mathrm{Y}}(x)\in\varphi_{\mathrm{Y}}(X)$, 取 $x_n\equiv x$, $n=1,2,3,...$, 则

$$\varphi(y)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{\mathrm{Z}}(x)=\varphi_{\mathrm{Z}}(x).$$

所以, 任意 $x\in X$, $\varphi(\varphi_{\mathrm{Y}}(x))=\varphi_{\mathrm{Z}}(x)$ 成立, 故(2)中的图表交换.

(2) $\Rightarrow$ (1): 考虑 $Z\equiv\overline{\varphi_{\mathrm{Y}}(X)}$ 为 $\varphi_{\mathrm{Y}}(X)$ 在 $(Y,\,\rho_{\mathrm{Y}})$中的闭包. 由于 $(Y,\,\rho_{\mathrm{Y}})$ 完备, 且 Z 在$(Y,\,\rho_{\mathrm{Y}})$ 中闭, 故 $(Z,\,\rho_{\mathrm{Z}})$ 完备, 其中 ρ_{Z} 为从 ρ_{Y} 得到的诱导度量. 由假设, 存在 φ 为由 $(Y,\,\rho_{\mathrm{Y}})$ 到 $(Z=\overline{\varphi_{\mathrm{Y}}(X)},\,\rho_{\mathrm{Z}})$ 的等距嵌入, 使得图表

$$\begin{tikzcd}
(Y,\,\rho_{\mathrm{Y}}) \arrow[r, "\varphi"] & (Z=\overline{\varphi_{\mathrm{Y}}(X)},\,\rho_{\mathrm{Z}}) \\
(X,\,\rho_{\mathrm{X}}) \arrow[u, "\varphi_{\mathrm{Y}}"] \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{Y}}"'] &
\end{tikzcd}$$

交换, 即 $\varphi|_{\varphi_{\mathrm{Y}}(X)} = id$. 对任意的 $y \in Y$ 及 $\varepsilon > 0$, 由于 $\varphi(y)$ 属于 $\overline{\varphi_{\mathrm{Y}}(X)}$, 故存在 $x' \in X$ 使得

$$\rho_{\mathrm{Z}}(\varphi(y), \varphi_{\mathrm{Y}}(x')) < \varepsilon,$$

又由于φ 与φ_{Y} 均保持度量, 且 $\varphi|_{\varphi_{\mathrm{Y}}(X)} = id$, 故

$$\rho_{\mathrm{Y}}(y, \varphi_{\mathrm{Y}}(x')) = \rho_{\mathrm{Z}}(\varphi(y), \varphi(\varphi_{\mathrm{Y}}(x'))) = \rho_{\mathrm{Z}}(\varphi(y), \varphi_{\mathrm{Y}}(x')) < \varepsilon.$$

所以, $\varphi_{\mathrm{Y}}(X)$ 在 Y 中稠密. 定理1得证.

□

致谢. 本文是在杨大春教授的悉心指导与袁文博士的无私帮助下完成的. 作者对杨大春教授与袁文博士表示衷心的感谢.

参考文献

1. 张恭庆，林源渠等， *泛函分析讲义*, 北京大学出版社, 北京, 2006.
2. Walter Rudin, *Real and Complex Analysis, 3rd Edition*, McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 1987.
3. Steve Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, New York, 2006.

An alternative definition of the completion of metric spaces

Hao Cheng
Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing (100875)

Abstract

In this article, the author propose another way to define the completion of a metric space other than by using the dense property, and prove the equivalence between two definitions. The definition we give is based on considerations from category theory, and can be generalized to arbitrary category.

Keywords: metric space, category, completion