多变量的具有 BMO 符号的 Toeplitz 算子

何忠华* 曹广福

广州大学数学与信息科学学院, 广州, 510006

摘要: 紧算子的性质与有限维空间中的矩阵很类似，在积分方程和许多数学物理问题的研究中起着核心作用. 函数空间上的算子紧性一直是人们关注的问题. 本文研究多变量的 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上的具有 BMO^1 符号的 Toeplitz 算子, 并得出其紧性是由它符号的 Berezin 变换在边界上的行为来刻画.

关键词: Toeplitz 算子; Bergman 空间; Berezin 变换

中图分类号: O171.1 **文献标示码**: A

1 引言

Toeplitz 算子是具体算子中最常研究之一。在算子理论和函数空间理论中，它们在 Hardy 和 Bergman 空间的情形已经有一系列的结果。最近，在此领域中研究的方法之一是利用 Berezin 变换来刻画 Toeplitz 算子的情形[1]-[5].

首先，我们先引入些基本概念。更多的可参考文献[6][7].

设 $\mathbb{B}_n$ 为复空间 $\mathbb{C}^n$ 中的单位球，记 dA 为其正规化 Lebesgue 测度。对 $1 \le p < \infty$， 记 $L^p(\mathbb{B}_n) = L^p(\mathbb{B}_n, dA)$ 且 $\|u\|_p$ 为 $L^p(\mathbb{B}_n)$ 中关于 u 的 $L^p(\mathbb{B}_n)$ 范数。Bergman 空间是由 $\mathbb{B}_n$ 上所有全纯函数组成的 Banach 空间，它是 $L^p(\mathbb{B}_n)$ 的闭子空间。

令 P 为从 $L^2(\mathbb{B}_n)$ 到 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 的正交投影， P 的积分表示为

$$P(h)(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{h(w)}{(1 - z\bar{w})^{n+1}} dA(w),$$

对 $z \in \mathbb{B}_n$ 和 $h \in L^2(\mathbb{B}_n)$ 。对 $f \in L^1(\mathbb{B}_n)$ ，以 f 为符号的 Toeplitz 算子定义为

$$T_f u(z) = P(fu)(z) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{f(w)u(w)}{(1 - z\bar{w})^{n+1}} dA(w),$$

对任意 $\mathbb{B}_n$ 上的有界解析函数 u 。显然，T_f 在 $L_a^p(\mathbb{B}_n)$ 上稠定。

对 $z \in \mathbb{B}_n$ ，记 $K_z \in L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 为 Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上的再生核函数，那么

$$K_z(w) = \frac{1}{(1 - < w, z >)^{n+1}},$$

基金项目：国家自然科学基金资助项目 (10971040), 国家教育部博士点基金.

*作者简介：何忠华 (1984-)，男，汉族, 硕士研究生，主要从事泛函分析, 算子理论和算子代数研究，电子邮箱761345481@qq.com

令 k_z 为正规化再生核，则对 $p\geq 1$ ， $k_z=(1-|z|^2)^{\frac{n+1}{2}}K_z$ 也是中的函数。对 $L_a^p(\mathbb{B}_n)$ 上的有界算子 S 和 $1\leq p<\infty$ ， S 的 Berezin 变换 是 $\mathbb{B}_n$ 上的函数 $\tilde{S}$ 记为 $\tilde{S}(z)=<Sk_z,k_z>$，其 中 $<u,v>=\int_{\mathbb{B}_n}u\bar{v}dA$ 。

对 $z,w\in\mathbb{B}_n$，单位球 $\mathbb{B}_n$ 中的解析自同态 φ_z 定义为

$$\varphi_z(w)=\frac{z-P_zw-sQ_zw}{1-<w,z>},$$

其中 P_z 是 $\mathbb{C}^n$ 到由 z 诱导的子空间 $[z]$ 上的正交投影，这就是说， $P_0=0$ 且如果 $z\neq 0$，那么 $P_zw=\frac{<w,z>}{<z,z>}z$ 且 $Q_z=I-P_z$ 是到 $[z]$ 正交补上的投影， $s=\sqrt{1-|z|^2}$ 。

对 $z\in\mathbb{B}_n$,定义算子 U_z 为 $U_zf=(f\circ\varphi_z)k_z$，显然 U_z 是 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上的一个酉算子且是 $L_a^p(\mathbb{B}_n)(p>1)$ 上的有界算子。 对 $L_a^p(\mathbb{B}_n)$ 上的有界算子 S，定义 $S_z=U_zSU_z$，且记 $\|S\|_p$ 为 $L_a^p(\mathbb{B}_n)$ 上的算子范数。

对 $p\geq 1$，我们说 f 是 $BMO^p(\mathbb{B}_n)$ 中的函数，如果

$$\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\|f\circ\varphi_z-\tilde{f}(z)\|_p<\infty,$$

其中 $\|\cdot\|_p$ 是 $L^p(\mathbb{B}_n)$ 范数，且 $\tilde{f}$ 是 f 的 Berezin 变换。定义

$$\|f\|_{BMO^p}=\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\|f\circ\varphi_z-\tilde{f}(z)\|_p,$$

$$|||f|||_p=\|f\|_{BMO^p}+|\tilde{f}(0)|.$$

对 $z,w\in\mathbb{B}_n$，设 $\beta(z,w)=(1/2)\log((1+|\varphi_z(w)|)/(1-|\varphi_z(w)|))$ 是 $\mathbb{B}_n$ 上的 Bergman 距离。令 $D(z)=\{w\in\mathbb{B}_n:\beta(z,w)<1/2\}$ 是 以 z 为中心半径为1/2的 Bergman 距离球体。$D(z)$ 的正规化体积为 $|D(z)|$ 。

对 $f\in L^1(\mathbb{B}_n)$， f 在 $D(z)$ 上的均值定义为

$$\hat{f}(z)=\frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)}f(w)dA(w).$$

则 $\|f\|_{BMO^p}$ 有限当且仅当

$$\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)}|f(w)-\hat{f}(z)|^pdA(w)<\infty.$$

于是，在 $BMO^p(\mathbb{B}_n)$ 中的函数是 Bergman 距离中的有界均值震荡，且容易得到如下包含关系

$$L^\infty(\mathbb{B}_n)\subset BMO^p(\mathbb{B}_n)\subset L^p(\mathbb{B}_n),\qquad \text{for } p\geq 1,$$

$$BMO^q(\mathbb{B}_n)\subset BMO^p(\mathbb{B}_n)\subset BMO^1(\mathbb{B}_n),\qquad \text{for } 1\leq p\leq q.$$

对于 $p\geq 1$， $BMO^1(\mathbb{B}_n)$ 是 $BMO^p(\mathbb{B}_n)$ 空间中最大的空间。因此，我们主要研究函数在 中的情形 $BMO^1(\mathbb{B}_n)$ 。

最近， Zorboska[8] 证明了在 Bergman 空间上以 BMO^1 中函数为符号的 Toeplitz 算子有界性和紧性 是由其 Berezin 变换在边界上的变化来决定的。即

定理 1 设 $f\in BMO^1$，则当 $\tilde{f}(z)\to 0(z\to\partial D)$ 时， T_f 是 $L_a^2(D)$ 上的紧算子。

在此，我们把这个结果推广到单位球的情形：

定理 2 设 $f\in BMO^1$，则 T_f 是 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上的紧算子当且仅当 $\tilde{f}(z)\to 0(z\to\partial\mathbb{B}_n)$ 。

2 引理

接下来我们看看关于 BMO^1 函数的 Berezin 变换性质。

性质 1 设 $f \in BMO^1$，则

(a) $\sup_{z\in\mathbb{B}_n}(\widetilde{|f|}(z)-|\tilde{f}(z)|)<\infty$,

(b) $\tilde{f}$ 关于 Bergman 距离是 *Lipschitz* 函数,

(c) $\sup_{z\in\mathbb{B}_n}(1-|z|^2)|\nabla\tilde{f}(z)|<\infty$,

(d) $\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\widetilde{|f-\tilde{f}|}(z)<\infty$.

证明 (a) 对 $z\in\mathbb{B}_n$，我们有

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{|f|}(z)-|\tilde{f}(z)|)&=\int_{\mathbb{B}_n}(|f(w)|-|\tilde{f}(z)|)|k_z(w)|^2dA(w)\\
&\leq\int_{\mathbb{B}_n}|f(w)-\tilde{f}(z)||k_z(w)|^2dA(w).
\end{aligned}
$$

用变量代换 $w=\varphi_z(v)$，则

$$k_z(\varphi_z(v))=\frac{1}{k_z(w)},\qquad (J_R\varphi_z(v))=|k_z(w)|^2.$$

于是

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{|f|}(z)-|\tilde{f}(z)|)&\leq\int_{\mathbb{B}_n}|f(w)-\tilde{f}(z)||k_z(w)|^2dA(w)\\
&=\int_{\mathbb{B}_n}|f\circ\varphi_z(v)-\tilde{f}(z)|dA(v)\\
&=\|f\circ\varphi_z(v)-\tilde{f}(z)\|_1.
\end{aligned}
$$

又因为 $f\in BMO^1$，$\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\|f\circ\varphi_z(v)-\tilde{f}(z)\|_1<\infty$, 所以 $\sup_{z\in\mathbb{B}_n}(\widetilde{|f|}(z)-|\tilde{f}(z)|)<\infty$。

(b) 我们只需证明存在常数 $c>0$，使得对任意 $z,w\in\mathbb{B}_n$，都有

$$|\tilde{f}(z)-\tilde{f}(w)|<c\beta(z,w).$$

对 $z,w\in\mathbb{B}_n$，记 $\alpha(t)$ 为 Bergman 距离中从 $z=\alpha(0)$ 到 $z=\alpha(1)$ 的弧线，且令 $s=s(t)$ 是 $\alpha(t)$ 在 Bergman 距离中的弧长。因为

$$|\tilde{f}(z)-\tilde{f}(w)|\leq\int_0^1|\frac{d}{dt}(\tilde{f}(\alpha(t)))|dt,$$

所以只需估计$(d/dt)(\tilde{f}(\alpha(t)))$。

由[2]我们有

$$
\begin{aligned}
|\frac{d}{dt}(\tilde{f}(\alpha(t)))|&\leq 2\int_{\mathbb{B}_n}|f(w)-\tilde{f}(\alpha(t))||k_{\alpha(t)}(w)||(I-P_{\alpha(t)})(\frac{d}{dt}k_{\alpha(t)})(w)|dA(w)\\
&\leq 2(n+1)\frac{ds}{dt}\int_{\mathbb{B}_n}|f(w)-\tilde{f}(\alpha(t))||k_{\alpha(t)}(w)|^2dA(w)\\
&=2(n+1)\frac{ds}{dt}\|f\circ\varphi_{\alpha(t)}-\tilde{f}(\alpha(t))\|_1\\
&\leq 2(n+1)\frac{ds}{dt}\|f\|_{BMO^1}.
\end{aligned}
$$

于是

$$|\tilde{f}(z)-\tilde{f}(w)|\leq 2(n+1)\|f\|_{BMO^1}\int_{\mathbb{B}_n}\frac{ds}{dt}dt=2(n+1)\|f\|_{BMO^1}\beta(z,w),$$

从而取 $c=2(n+1)\|f\|_{BMO^1}$ 即可。

(c) 我们将证明 $|\nabla\tilde{f}(z)|\leq c/(1-|z|^2)$ ，其中

$$|\nabla\tilde{f}(z)|^2=\sum_{j=1}^{n}(|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_j}|^2+|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial y_j}|^2).$$

由于 $\lim_{h\to 0}\frac{\beta(z+h,w)}{|h|}=\frac{1}{(1-|z|^2)}$ ，从而由 (b) ，我们得到

$$\begin{aligned}|\frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{f}(z)|&\leq\lim_{h\to 0}\frac{|\tilde{f}(x_j+h+iy_j)-\tilde{f}(x_j+iy_j)|}{|h|}\\&\leq c\lim_{h\to 0}\frac{\beta(x_j+h+iy_j,x_j+iy_j)}{|h|}\\&=\frac{c}{(1-|z|^2)}.\end{aligned}$$

类似的，有

$$|\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{f}(z)|\leq\frac{c}{(1-|z|^2)},$$

从而$|\nabla\tilde{f}(z)|^2\leq\frac{2nc^2}{(1-|z|^2)^{(n+1)}}$。

(d) 因为 $|f-\tilde{f}|\geq 0$ ，从而由[4]知 $\widetilde{|f-\tilde{f}|}$ 有界 当且仅当 $\widehat{|f-\tilde{f}|}$ 有界。由 (b) 和 $\frac{1}{|D(z)|}\sim|k_z(w)|^2$ ，我们有

$$\begin{aligned}\widehat{|f-\tilde{f}|}(z)&=\frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)}|f(w)-\tilde{f}(w)|dA(w)\\&\leq\frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)}|f(w)-\tilde{f}(z)|dA(w)+\frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)}|f(z)-\tilde{f}(w)|dA(w)\\&\leq c\int_{D(z)}|f(w)-\tilde{f}(z)||k_z(w)|^2dA(w)+\frac{c}{|D(z)|}\int_{D(z)}\beta(z,w)dA(w)\\&\leq c\|f\circ\varphi_z-\tilde{f}(z)\|_1+\frac{1}{2}c<\infty.\end{aligned}$$

性质 2 设 $f\in L^1(\mathbb{B}_n)$ ，则

(a) 设 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{B}_n$ 中有界，则 $\sup_{z\in\mathbb{B}_n}(\widetilde{|f|}(z)-|\tilde{f}(z)|)<\infty$ 可推出 $f\in BMO^1$ 。

(b) 存在 $c\geq 0$ 使得对 $z\in\mathbb{B}_n$ ， 有 $\hat{f}(z)-\tilde{f}(z)\leq c\|f\circ\varphi_z-\tilde{f}(z)\|_1$。

证明 (a) 由条件可知，$\widetilde{|f|}$ 有界。因为

$$\|f\circ\varphi_z-\tilde{f}(z)\|_1\leq\|f\circ\varphi_z\|_1+|\tilde{f}(z)|=\widetilde{|f|}(z)+|\tilde{f}(z)|,$$

所以 $\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\|f\circ\varphi_z-\tilde{f}(z)\|_1<\infty$ 从而 $f\in BMO^1$ 。

(b) 由于对 $w \in D(z)$ 有 $\frac{1}{|D(z)|} \leq c|k_z(w)|^2$ ，故而

$$\begin{aligned}|\hat{f}(z) - \tilde{f}(z)| &\leq \frac{1}{|D(z)|}\int_{D(z)} |f(w) - \tilde{f}(z)|dA(w)\\ &\leq c\int_{D(z)} |f(w) - \tilde{f}(z)||k_z(w)|^2 dA(w)\\ &\leq c\|f \circ \varphi_z - \tilde{f}(z)\|_1.\end{aligned}$$

由性质 1和性质 2，我们得到如下推论：

推论 1 设 $f \in L^1(\mathbb{B}_n)$ ，则

(a) 对 $f \in BMO^1$ ，$\tilde{f}$ 有界推出 T_f 在 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上有界。

(b) 对任意 $f \in BMO^1$ 都可写成 $f = f_1 + f_2$ ，其中 f_1 是实 Bloch 中的函数，f_2 满足 $\sup_{z\in\mathbb{B}_n} \widetilde{|f_2|}(z) < \infty$。

(c) 如果在 $\mathbb{B}_n$ 上 $f \geq 0$ 且 $\tilde{f}$ 有界，则 $f \in BMO^1$ 。

(d) 对 $f \in BMO^1$ ， $\tilde{f}$ 有界当且仅当 $\hat{f}$ 有界。

证明 (a) 由于对任意 $f \in L^1(\mathbb{B}_n)$ ，

$$\begin{aligned}|\tilde{f}(z)| &= |\int_{\mathbb{B}_n} f(w)|k_z(w)|^2 dA(w)|\\ &\leq \int_{\mathbb{B}_n} f(w)|k_z(w)|^2 dA(w) = \widetilde{|f|}(z).\end{aligned}$$

从而由性质 1(a) 可知 $\tilde{f}$ 有界。又因为 $|f| \geq 0$ ，所以由 [] ，$\widetilde{|f|}$ 有界推出 $T_{|f|}$ 有界，从而不难得到 T_f 也有界。

(b) 令 $f_1 = \tilde{f}$ 和 $f_2 = f - \tilde{f}$，则由性质 1(c) 和 1(d) 即得结论。

(c) 对 $f \geq 0$ ，有 $\widetilde{|f|}(z) = |\tilde{f}|(z) = \tilde{f}(z)$。 若 $\tilde{f}$ 有界，则由性质 2(a) 得到 $f \in BMO^1$。

(d) 由性质 2(b) 可直接得到结论。

3 主要结果的证明

为了证明我们的主要结果，首先我们给出一些引理。

引理 1 设 $f \in L^1(\mathbb{B}_n)$，T_f 在 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上有界。 则对任意 $z \in \mathbb{B}_n$，有如下结论：

(a) $(T_f K_z)(u) = K_z(u)P(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(u))$,

(b) $\|T_f k_z\|_2 = \|T_{f\circ\varphi_z} 1\|_2$,

(c) 对 $f \in BMO^1$，每个 $T_{f\circ\varphi_z}$ 在 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上都有界。

证明 (a) 我们有如下等式：

$$\begin{aligned}(T_f K_z)(u) &= < P(fK_z), K_u >\\ &= \int_{\mathbb{B}_n} f(w)K_z(w)\overline{K_u(w)}dA(w)\\ &= \int_{\mathbb{B}_n} f(\varphi_z(v))K_z(\varphi_z(v))\overline{K_u(\varphi_z(v))}|k_z(v)|^2 dA(v),\end{aligned}$$

其中我们用到变量代换 $w = \varphi_z(v)$ 和 $(J_R\varphi_z) = |k_z(v)|^2$。

由等式

$$K_z(\varphi_z(v))k_z(v)=\frac{1}{(1-|z|^2)^{(n+1)/2}},$$
$$\overline{K_u(\varphi_z(v))k_z(v)}=k_z(u)\overline{K_{\varphi_z(u)}(v)},$$

即得

$$\begin{aligned}(T_fK_z)(u)&=\int_{\mathbb{B}_n}(f\circ\varphi_z)(v)\frac{1}{(1-|z|^2)^{(n+1)/2}}k_z(u)\overline{K_{\varphi_z(u)}(v)}dA(v)\\&=K_z(u)\int_{\mathbb{B}_n}(f\circ\varphi_z)(v)\overline{K_{\varphi_z(u)}(v)dA(v)}\\&=K_z(u)P(f\circ\varphi_z)(\varphi_z(u)).\end{aligned}$$

(b) 我们有

$$\begin{aligned}\|T_fk_z\|_2^2&=\|P(fk_z)\|_2^2\\&=\int_{\mathbb{B}_n}|P(fk_z)(w)|^2dA(w)\\&=\int_{\mathbb{B}_n}|P(fk_z)(\varphi_z(u))|^2|k_z(u)|^2dA(u),\end{aligned}$$

由变量代换 $w=\varphi_z(u)$，则可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_n}|P(fk_z)(\varphi_z(u))|^2|k_z(u)|^2dA(u)\\=&\int_{\mathbb{B}_n}|\int_{\mathbb{B}_n}f(w)k_z(w)\overline{K_{\varphi_z(u)}(w)}k_z(u)dA(w)|^2dA(u)\\=&\int_{\mathbb{B}_n}|\int_{\mathbb{B}_n}f(w)k_z(w)\overline{k_z(w)K_u(\varphi_z(w))}dA(w)|^2dA(u)\\=&\int_{\mathbb{B}_n}|\int_{\mathbb{B}_n}f(w)|k_z(w)|^2\overline{K_u(\varphi_z(w))}dA(w)|^2dA(u)\\=&\int_{\mathbb{B}_n}|\int_{\mathbb{B}_n}f(\varphi_z(v))\overline{K_u(v)}dA(v)|^2dA(u)\\=&\int_{\mathbb{B}_n}|P(f\circ\varphi_z)(u)|^2dA(u)=\|P(f\circ\varphi_z)\|_2^2=\|T_{f\circ\varphi_z}1\|_2^2,\end{aligned}$$

其中第四个等式用到变量代换 $v=\varphi_z(w)$，于是 $\|T_fk_z\|_2^2=\|T_{f\circ\varphi_z}1\|_2^2$。

(c) 由 BMO^1 的定义可知，当 $f\in BMO^1$ 时，对任意 $z\in\mathbb{B}_n$，有 $f\circ\varphi_z\in BMO^1$。

进一步地，有

$$\begin{aligned}\widetilde{f\circ\varphi_z}(w)&=\int_{\mathbb{B}_n}f\circ\varphi_z(u)|k_z(u)|^2dA(u)\\&=\int_{\mathbb{B}_n}f(v)|k_z(\varphi_z(v))|^2|k_z(v)|^2dA(v)\\&=\int_{\mathbb{B}_n}f(v)|k_{\varphi_z(w)}(v)|^2dA(v)\\&=\tilde{f}(\varphi_z(w)).\end{aligned}$$

于是，$\tilde{f}$ 有界推出 $\widetilde{f\circ\varphi_z}$ 有界。由推论 1(a)可知，对任意 $f\in BMO^1$ 和有界的 $\tilde{f}$，$T_{f\circ\varphi_z}$ 在 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上有界。

引理 2 设 p 和 ε 是正数且满足 $p>(3n+3)/2$和 $1/p<\varepsilon<(1/(n+1))(1-1/p)$。则

$$\int_{\mathbb{B}_n}\frac{(1-|v|^2)^{-(n+1)p\varepsilon/(p-1)}}{|1-\bar{z}v|^{(n+1)p(1-2\varepsilon)/(p-1)}}dA(v)$$

有界。

证明 设 $t=-(n+1)p\varepsilon/(p-1)$，$c=-t-(n+1)+(n+1)p(1-2\varepsilon)/(p-1)$。则 $(n+1)p\varepsilon/(p-1)<1$。因为

$$\frac{(n+1)p\varepsilon}{p-1}-(n+1)+\frac{(n+1)p(1-2\varepsilon)}{p-1}=\frac{(n+1)-(n+1)p\varepsilon}{p-1}<0.$$

所以由[7]和 $t>-1$ 且 $c<0$，即可得结论。

引理 3 设 $f\in BMO^1$ 且 $\tilde{f}$ 有界，则

$$\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\|T_{f\circ\varphi_z}1\|_p<\infty.$$

证明 对解析函数 g，它的 L^p 范数 $\|g\|_p=|g(0)|+\|(1-|z|^2)g'(z)\|_p$。Bloch 空间 B 定义为

$$B=\{g\in H(\mathbb{B}_n):\sup_{z\in\mathbb{B}_n}(1-|z|^2)|g'(z)|<\infty\}.$$

对 $g\in B$，令 $\|g\|_B=|g(0)+\|(1-|z|^2)g'(z)\|_\infty$。则

$$\begin{aligned}\|g\|_p&\le c(|g(0)|+\|(1-|z|^2)g^{'}(z)\|_p)\\&\le c(|g(0)|+\|(1-|z|^2)g'(z)\|_\infty)\\&\le c\|g\|_B.\end{aligned}$$

对 $f\in BMO^1$，因为 $f\circ\varphi_z\in BMO^1$，所以 $P(f\circ\varphi_z)\in B$。从而

$$\begin{aligned}\|P(f\circ\varphi_z)\|_p&\le c\|P(f\circ\varphi_z)\|_B\le c\|f\circ\varphi_z\|_1\\&=c(|\widetilde{f\circ\varphi_z}(0)|+\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\|f\circ\varphi_z\circ\varphi_w-\widetilde{f\circ\varphi_z}(w)\|_1)\\&=c(|\tilde{f}(z)|+\sup_{\varphi_z(w)\in\mathbb{B}_n}\|f\circ\varphi_{\varphi_z(w)}-\tilde{f}(\varphi_z(w))\|_1)\\&=c(|\tilde{f}(z)|+\sup_{u\in\mathbb{B}_n}\|f\circ\varphi_u-\tilde{f}(u)\|_1).\end{aligned}$$

所以对 $f\in BMO^1$ 和有界 $\tilde{f}$，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\|T_{f\circ\varphi_z}1\|_p=\sup_{z\in\mathbb{B}_n}\|P(f\circ\varphi_z)\|_p<\infty,\ \forall p\ge 1.$$

引理 4 设 T_f 在 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上有界且 $\tilde{f}(z)\to 0(z\to\partial\mathbb{B}_n)$，则当 $z\to\partial\mathbb{B}_n$ 时 $T_{f\circ\varphi_z}1\xrightarrow{w}0$。

证明 设 A 是 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上的有界算子，$L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上的酉算子 U_z 定义为

$$U_z g = (g \circ \varphi_z)k_z.$$

则当 $z \to \partial\mathbb{B}_n$ 时, $\tilde{A}(z) \xrightarrow{w} 0$ 推出当 $z \to \partial\mathbb{B}_n$ 时 $U_z A U_z \xrightarrow{w} 0$。

引理 5 设 $f \in BMO^1$，则当 $z \to \partial\mathbb{B}_n$ 时，$\tilde{f}(z) \to 0$ 推出当 $z \to \partial\mathbb{B}_n$ 时，$\|T_{f\circ\varphi_z}1\|_2 \to 0$。

证明 由引理 4可知，$T_{f\circ\varphi_z}1 \xrightarrow{w} 0$ 所以它在 $\mathbb{B}_n$ 的任一紧子集上都一致收敛于0。比如对 $r\mathbb{B}_n$，其中$0 \le r < 1$。因为

$$\begin{aligned}\|T_{f\circ\varphi_z}1\|_2^2 &= \int_{\mathbb{B}_n} |T_{f\circ\varphi_z}1(w)|^2 dA(w)\\ &= \int_{\mathbb{B}_n\backslash r\mathbb{B}_n} |T_{f\circ\varphi_z}1(w)|^2 dA(w) + \int_{r\mathbb{B}_n} |T_{f\circ\varphi_z}1(w)|^2 dA(w),\end{aligned}$$

所以我们只需估计上式最后一行第一个积分。我们利用 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 3的结论：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_n\backslash r\mathbb{B}_n} |T_{f\circ\varphi_z}1(w)|^2 dA(w) &\le (\int_{\mathbb{B}_n\backslash r\mathbb{B}_n} |T_{f\circ\varphi_z}1(w)|^4 dA(w))^{1/2}(\int_{\mathbb{B}_n\backslash r\mathbb{B}_n} dA(w))^{1/2}\\ &\le \|T_{f\circ\varphi_z}1\|_4^2(1-r^2)^{(n+1)/4}\\ &\le c(1-r^2)^{(n+1)/4}.\end{aligned}$$

我们取 r 充分接近1和不依赖于 z 的 $\mathbb{B}_n\backslash r\mathbb{B}_n$ 上的积分充分小。 则对相同的 r，取 z 充分接近 $\partial\mathbb{B}_n$ 使得在 $r\mathbb{B}_n$ 上的积分充分小。

引理 6 设 $f \in BMO^1$，则当 $z \to \partial\mathbb{B}_n$ 时，$\tilde{f}(z) \to 0$ 推出 当 $z \to \partial\mathbb{B}_n$ 时，对 $p \ge 1$，$\|T_{f\circ\varphi_z}1\|_p \to 0$。

证明 对 $p < 2$ 的情形，由 $\|T_{f\circ\varphi_z}1\|_p \le \|T_{f\circ\varphi_z}1\|_2$ 和引理 5可得。

对 $p > 2$，由 $H\ddot{o}lder$ 不等式有

$$\|T_{f\circ\varphi_z}1\|_p^p \le \|T_{f\circ\varphi_z}1\|_2 \|T_{f\circ\varphi_z}1\|_{2p-2}^{p-1}$$

则由于 $2p-2 > 2 \ge 1$，依引理 5和引理 3即可得。

引理 7 设 $f \in BMO^1$ 和当 $z \to \partial\mathbb{B}_n$ 时 $\tilde{f}(z) \to 0$。 对 $0 < r < 1$，从 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 到 $L^2(\mathbb{B}_n)$ 上的算子 T_r^f 定义为

$$T_r^f = M_{\mathcal{X}_{r\mathbb{B}_n}} T_f,$$

其中 $M_{\mathcal{X}_{r\mathbb{B}_n}}$ 是 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上的乘法算子 且 $\mathcal{X}_{r\mathbb{B}_n}$ 是 $r\mathbb{B}_n$ 的特征函数。记从 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 到 $L^2(\mathbb{B}_n)$ 的算子 T_f 为 T^f ，则 T_r^f 是紧算子 且 $\lim_{r\to 1}\|T^f - T_r^f\| = 0$。

证明 对 $|z| \ge r$，由于 $\mathcal{X}_{r\mathbb{B}_n}(z) = 0$ 故而易知 $M_{\mathcal{X}_{r\mathbb{B}_n}}$ 是 $L^2(\mathbb{B}_n)$ 上的紧算子。 于是，T_r^f 作为紧算子和有界算子的乘积也是紧算子。

对 $g \in L_a^2(\mathbb{B}_n)$，我们有

$$\begin{aligned}(T^f - T_r^f)g(z) &= ((1-\mathcal{X}_{r\mathbb{B}_n})T_f g)(z)\\ &= \mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\backslash r\mathbb{B}_n}(z) < T_f g, K_z >\\ &= \mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\backslash r\mathbb{B}_n}(z) < g, T_{\bar{f}} K_z >\\ &= \int_{\mathbb{B}_n} g(u)\mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\backslash r\mathbb{B}_n}(z)\overline{T_{\bar{f}}K_z}(u) dA(u).\end{aligned}$$

所以，$T^f - T_r^f$ 是以 $K_r^f(z,u) = \mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\setminus r\mathbb{B}_n}(z)\overline{T_{\bar{f}}K_z}(u)$ 为核的积分算子。由 Schur 估计，存在 $\mathbb{B}_n$ 上的正可测函数 h 和常数 c_1、c_2， 使得

$$\int_{\mathbb{B}_n} |K_r^f(z,u)|h(z)dA(z) \le c_1 h(u), \qquad \forall u \in \mathbb{B}_n,$$

$$\int_{\mathbb{B}_n} |K_r^f(z,u)|h(u)dA(u) \le c_2 h(z), \qquad \forall z \in \mathbb{B}_n,$$

从而我们有 $\|T^f - T_r^f\|^2 \le c_1c_2$。

设 $p > (3n+3)/2$，$1/p < \varepsilon < (1/(n+1))(1-1/p)$ 且令 $h(z) = (K_z(z))^\varepsilon = \frac{1}{(1-|z|^2)^{(n+1)\varepsilon}}$。则我们只需证明 Schur 估计成立，且常数为

$$c_1 = c \sup_{z\in\mathbb{B}_n} \|T_{f\circ\varphi_z}1\|_p, \qquad c_2 = c\sup_{|z|\ge r}\|T_{\bar{f}\circ\varphi_z}1\|_p.$$

我们有

$$\int_{\mathbb{B}_n} |K_r^f(z,u)|h(u)dA(u) = \mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\setminus r\mathbb{B}_n}(z)\int_{\mathbb{B}_n} |T_{\bar{f}}K_z(u)|(K_u(u))^\varepsilon dA(u),$$

由引理 1(a)等于

$$\mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\setminus r\mathbb{B}_n}(z)\int_{\mathbb{B}_n} |K_z(u)||P(\bar{f}\circ\varphi_z)(\varphi_z(u))|(K_u(u))^\varepsilon dA(u).$$

利用变量代换 $v = \varphi_z(u)$ 和如下等式：

$$K_z(\varphi_z(v)) = \frac{1}{(1- <\varphi_z(v), z>)^{n+1}} = \frac{(1- <v,z>)^{n+1}}{(1-|z|^2)^{n+1}},$$

$$K_{\varphi_z(v)}(\varphi_z(v)) = \frac{1}{(1-|\varphi_z(v)|^2)^{n+1}} = \frac{|1- <v,z>|^{2(n+1)}}{(1-|z|^2)^{n+1}(1-|v|^2)^{n+1}},$$

$$|k_z(v)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1- <v,z>|^{2(n+1)}}.$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}_n}|K_r^f(z,u)|h(u)dA(u)\\
&=\mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\setminus r\mathbb{B}_n}(z)\int_{\mathbb{B}_n}|K_z(\varphi_z(v))||P(\bar f\circ\varphi_z)(v)|(K_{\varphi_z(v)}(\varphi_z(v)))^{\varepsilon}|k_z(v)|^2dA(u)\\
&=\mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\setminus r\mathbb{B}_n}(z)\int_{\mathbb{B}_n}|P(\bar f\circ\varphi_z)(v)|\frac{|1-<v,z>|^{n+1}}{(1-|z|^2)^{n+1}}\\
&\quad\times\frac{|1-<v,z>|^{2(n+1)\varepsilon}}{(1-|z|^2)^{(n+1)\varepsilon}(1-|v|^2)^{(n+1)\varepsilon}}\frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-<v,z>|^{2(n+1)}}dA(v)\\
&=\mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\setminus r\mathbb{B}_n}(z)\int_{\mathbb{B}_n}|P(\bar f\circ\varphi_z)(v)|\frac{|1-<v,z>|^{(n+1)(2\varepsilon-1)}}{(1-|z|^2)^{(n+1)\varepsilon}(1-|v|^2)^{(n+1)\varepsilon}}dA(v)\\
&\le\mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\setminus r\mathbb{B}_n}(z)\frac{1}{(1-|z|^2)^{(n+1)\varepsilon}}(\int_{\mathbb{B}_n}|P(\bar f\circ\varphi_z)(v)|^pdA(v))^{1/p}\\
&\quad\times(\int_{\mathbb{B}_n}\frac{dA(v)}{|1-\bar zv|^{\frac{(n+1)p(1-2\varepsilon)}{(p-1)}}(1-|v|^2)^{\frac{(n+1)p\varepsilon}{(p-1)}}})^{(p-1)/p}\\
&=\mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\setminus r\mathbb{B}_n}(z)\|T_{\bar f\circ\varphi_z}\|_p\frac{1}{(1-|z|^2)^{(n+1)\varepsilon}}\\
&\quad\times(\int_{\mathbb{B}_n}\frac{dA(v)}{|1-\bar zv|^{(n+1)p(1-2\varepsilon)/(p-1)}(1-|v|^2)^{(n+1)p\varepsilon/(p-1)}})^{(p-1)/p}\\
&\le c\sup_{|z|\ge r}\|T_{\bar f\circ\varphi_z}\|_ph(z)=c_2h(z).
\end{aligned}
$$

从而用类似的方法可得到 Schur 估计的第一个不等式，记为

$$\int_{\mathbb{B}_n}|K_r^f(z,u)|h(u)dA(u)=\mathcal{X}_{\mathbb{B}_n\setminus r\mathbb{B}_n}(z)\int_{\mathbb{B}_n}|T_fK_u(z)|(K_z(z))^{\varepsilon}dA(z).$$

通过如上相同的讨论，右边小于等于

$$c\sup_{|u|\ge r}\|T_{f\circ\varphi_u}1\|_ph(u)\le c\sup_{u\in\mathbb{B}_n}\|T_{f\circ\varphi_u}1\|_ph(u)=c_1h(u).$$

于是由 Schur 估计可得 $\|T^f-T_r^f\|^2\le c_1c_2$，其中 c_1 不依赖于 r， 且由引理 6，当 $r\to1$ 时，$c_2\to0$。因此， 当 $z\to\partial\mathbb{B}_n$ 时 $\tilde f(z)\to0$ 可推出 T_f 是 $L_a^2(\mathbb{B}_n)$ 上的紧算子。

同时，如果 T_f 是紧的，则当 $z\to\partial\mathbb{B}_n$ 时，$<T_fk_z,k_z>\to0$。 由于当 $z\to\partial\mathbb{B}_n$ 时，$k_z\xrightarrow{w}0$。从而即得我们的结论。

参考文献

[1] S. Axler and D. Zheng, Compact operator via the Berezin transform, *Indiana Vniv. Math. J.* 47(1998), no. 2, 387-400.

[2] D. Bekoue, C. A. Berger, L. A. Cobarn, and K. H. Zhu, BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains, *J. Funct. Anal.* 93(1990), no. 2, 310-350.

[3] K. Stroethoff and D. C. Zheng, Toeplitz and Hankel operators on Bergman Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 329(1992),no. 2, 773-794.

[4] K. H. Zhu, Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains, *J. Operator Theory* 20(1998), no. 2, 329-357.

[5] N. Zorboska, The Berezin transform and radial operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 131(2003), no. 3, 793-800.

[6] H. Hedenmalm, B. Korenblum, and K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Graduate Texts in Mathematics,vot. 199, Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] K. H. Zhu, Operator theory in function spaces, in: A Series of Monographs and Textbooks, in: Pure Appl. Math, vot. 139, Marcal Dekker, Inc, New York,1990.

[8] N. Zorboska, Toeplitz operator with BMO symbols and the Berezin transform, *Int. J. Math. Sci.* 46(2003)2929-2945.

[9] D. H. Luecking, Trace ideal oriteria for Toeplitz operators, *J. Funct. Anal.* 73(1987), no. 2, 345-368.

Toeplitz operators with BMO symbols of several complex variables

HE Zhonghua, CAO Guangfu

Guangzhou university college of mathmatics and information science, Guangzhou 510006

Abstract

The properties of compact operators are analogous to that of matrixes in finite spaces, which play a critical role in the study of integral equations and mathematical physics. And the compactness of operator on function spaces has been concerned In this note we prove that the boundedness and compactness of the Toeplitz operator on the Bergman space L^2_a for several complex variables with a BMO^1 symbol is completely determined by the boundary behavior of its Berezin transform.

Keywords: Toeplitz operator; Bergman space; Berezin transform