不含积分项的二阶微分方程边值问题

侯麟

（中国矿业大学数学系，江苏 徐州 221008）

摘要：本文对二阶微分方程边值问题，类似于对初值问题的讨论，讨论了不含积分项的二阶微分方程边值问题，即在边值问题 $-u''=f(t,u,u,Tu),u(0)=x_0,u(1)=x_1$ 中，将积分项Tu去掉后得到的式子$-u''=f(t,u,u),u(0)=x_0,u(1)=x_1$，除了得到隐式迭代解外，还得到了另外两种形式的显式迭代解。

关键词：二阶微分；初值问题； 边值问题

中图分类号：O

The boundary value problem which does not contain integral term

Hou Lin

(Department of mathematics, JiangSu XuZhou 221008)

Abstract: In this paper, boundary value problem of second order differential equation ，similar to initial value problem is studied, the boundary value problem which does not contain integral item is also studied,namely in the value problem problem $-u''=f(t,u,u,Tu),u(0)=x_0,u(1)=x_1$, the formula $-u''=f(t,u,u),u(0)=x_0,u(1)=x_1$,in which the integral item Tu does not exist,except for implicit iterative solutions,wo also obtain other two explicit iterative solutions.

Keywords:second order differential ; initial value problem; boundary value problem

0 引言

抽象空间微分方程理论则是近二三十年来发展起来的一个重要数学分支，它把微分方程理论和泛函分析理论结合起来，利用泛函分析方法研究抽象空间中的微分方程，它的理论在无穷常微分方程组、偏微分方程、不动点定理等多方面有广泛的应用。

由于在无穷维空间框架中，处理分析学的非线性问题的方式有这无穷的潜力。近年来，非线性泛函分析已经成为研究数学、物理、航空航天技术、生物技术中非线性问题的一个重要的工具．它的基本方法有拓扑度方法、变分方法、解析方法、半序方法、上下解方法、单调迭代方法等。

微分方程问题不但对数学的基础理论有着推动作用，而且应用于解决几何学与物理学中的一些实际问题，推动自然学科的发展．另外，自然科学和工程技术中大量非线性现象组成的各类非线性积分微分算子又为抽象空间方程的发展提供了基本素材。本文主要是对二阶微分方程边值问题[1-3]，类似于对初值问题的讨论，讨论了不含积分项的二阶微分方程边值问题，除了得到隐式迭代解外，还得到了另外两种形式的显式迭代解。

1 不含积分项的二阶微分方程

在边值问题$-u''=f(t,u,u,Tu),u(0)=x_0,u(1)=x_1$中若将积分项$Tu$去掉，边值问题变为

$$-u''=f(t,u,u),u(0)=x_0,u(1)=x_1 \qquad (1.1)$$

作者简介：侯麟，（1985-），女，硕士，主要研究方向：概率论与数理统计. E-mail: houlincumt@126.com

相应的条件变为：

(H_1) 存在 $M > N > 0$，使得 $u_2 \ge u_1, v_1 \ge v_2$ 时有

$f(t,u_2,v_2) - f(t,u_1,v_1) \ge -M(u_2-u_1) - N(v_2-v_1)$

(H_2) 存在 $\beta > 0$ 使得 $u \ge v$ 时有 $f(t,u,v) - f(t,v,u) \le \beta(u-v)$

(H_3) 存在 $u_0, v_0, u_0 \le v_0$ 满足

$$\begin{cases} -u_0'' \le f(t,u_0,v_0) + N(v_0-u_0) \\ u_0(0) \le x_0, u_0(1) \le x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -v_0'' \ge f(t,v_0,u_0) - N(v_0-u_0) \\ v_0(0) \ge x_0, v_0(1) \ge x_1 \end{cases}$$

(H_4) $\dfrac{(\beta+M+N)}{6} < 1, M+N<1$

则问题(1.1)存在唯一解 $u^*(t)$，分别以 $u_0(t), v_0(t)$ 为初始元作迭代序列

$$u_n(t) = x_0 + t(x_1-x_0) + \int_0^1 G(t,s)[f(s,u_{n-1},v_{n-1}) - M(u_n-u_{n-1}) - N(u_n-v_{n-1})]ds$$

$$v_n(t) = x_0 + t(x_1-x_0) + \int_0^1 G(t,s)[f(s,v_{n-1},u_{n-1}) - M(v_n-v_{n-1}) - N(v_n-u_{n-1})]ds$$

则 $\{u_n(t)\},\{v_n(t)\}$ 均在 I 上以 $C[I,E]$ 中范数一致收敛于 $u^*(t)$，且有误差估计式：

$$\|u_n - u^*\| \le [\frac{\beta+M+N}{6}]^n \|v_0-u_0\|$$

下面我们将讨论其显式解.

考虑二阶线性微分方程

$-u'' = f(t,\xi,\eta) - M(u-\xi) - N(u-\eta), u(0)=x_0, u(1)=x_1.$

移项得到 $-u'' + (M+N)u = f(t,\xi,\eta) + M\xi + N\eta, u(0)=x_0, u(1)=x_1$ (1.2)

先给出如下引理。

引理 1.1 设 $u \in C^2[I,R]$，则二阶齐次微分方程 $-u''+K^2u=0, u(0)=0, u(1)=0$ (其中 $K>0$)的 Green 函数为

$$G_K(t,s) = \begin{cases} \dfrac{sh(Ks)sh(K(t-1))}{-Ksh(K)} & s \le t \\ \dfrac{sh(Kt)sh(K(s-1))}{-Ksh(K)} & t \le s \end{cases}$$

引理 1.2[4] 设 $u \in C^2[I,R], h \in C[I,R]$，则二阶线性非齐次微分方程 $-u''+K^2u = h(t), u(0)=0, u(1)=0$ (其中 $K>0$)的解可如下表示：

$u(t) = \int_0^1 G_k(t,s)h(s)ds$，其中 $G_k(t,s)$ 由引理 1.1 所示.

由此引理可得到如下推论：

推论 1.1 设 $u \in C^2[I,E], h \in C[I,E]$，则二阶线性非齐次微分方程 $-u''+K^2u = h(t), u(0)=\theta, u(1)=\theta$ (其中 $K>0$)的解可如下表示：

$u(t)=\int_0^1 G_k(t,s)h(s)ds$,其中 $G_k(t,s)$ 由引理 1.1 所示.

证明: $\forall g\in E^*$,令 $p(t)=g(u(t))$,则 $p(t)$ 满足 $-p''+K^2p=g(h(t)),p(0)=0,p(1)=0$ 可知上式的解可表示为: $p(t)=\int_0^1 G_k(t,s)g(h(s))ds$,其中 $G_k(t,s)$ 由引理 1.1 所示.

即为: $g(u(t))=g(\int_0^1 G_k(t,s)h(s)ds)$

由 $g\in E^*$ 的任意性(或泛函延拓定理[5])可得

$u(t)=\int_0^1 G_k(t,s)h(s)ds$,其中 $G_k(t,s)$ 由引理 1.1 所示. 得证.

对问题(1.2),作变换 $v(t)=u(t)-x_0-t(x_1-x_0)$,令 $Q=\sqrt{M+N}$,则(1.2)变为:

$$-v''+Q^2v=f(t,\xi,\eta)+M\xi+N\eta-Q^2(x_0+t(x_1-x_0)) \tag{1.3}$$

由推论 1.1 可知(1.3)的解可表示为:

$$v(t)=\int_0^1 G_Q(t,s)(f(s,\xi,\eta)+M\xi+N\eta-Q^2(x_0+s(x_1-x_0)))ds$$

其中

$$G_Q(t,s)=\begin{cases}\dfrac{sh(Qs)sh(Q(t-1))}{-Qsh(Q)} & s\le t\\ \dfrac{sh(Qt)sh(Q(s-1))}{-Qsh(Q)} & t\le s\end{cases}$$

所以(1.2)的解可表示为: $u(t)=x_0+t(x_1-x_0)+v(t)$

所以问题(1.1)解的显式迭代序列为

$$u_n(t)=x_0+t(x_1-x_0)+\int_0^1 G_Q(t,s)(f(s,u_{n-1},v_{n-1})+Mu_{n-1}+Nv_{n-1}-Q^2(x_0+s(x_1-x_0)))ds$$

$$v_n(t)=x_0+t(x_1-x_0)+\int_0^1 G_Q(t,s)(f(s,v_{n-1},u_{n-1})+Mv_{n-1}+Nu_{n-1}-Q^2(x_0+s(x_1-x_0)))ds$$

类似于对初值问题的讨论，对问题(1.2)作如下讨论. $\forall g\in E^*$,令

$p(t)=g(u(t)),h(t)=f(t,\xi,\eta)+M\xi+N\eta$,同样令 $Q=\sqrt{M+N}$,则

$p(t)$ 满足: $-p''+Q^2p=g(h(t))\quad p(0)=g(x_0),p(1)=g(x_1)$

因齐次方程 $-p''+Q^2p=0$ 的基本解组为: $\varphi_1(t)=e^{Qt},\varphi_2(t)=e^{-Qt}$

Wronsky 行列式为: $\varphi_1(t)\varphi_2'(t)-\varphi_1'(t)\varphi_2(t)=-Qe^{Qt}e^{-Qt}-Qe^{Qt}e^{-Qt}=-2Q$

由常微分方程的理论[6]可知，二阶微分方程的通解为:

$$p(t)=c_1e^{Qt}+c_2e^{-Qt}-\frac{1}{2Q}\int_0^t(e^{Q(s-t)}-e^{Q(t-s)})g(h(s))ds$$

因为 $p(0)=g(x_0), p(1)=g(x_1)$,所以

$$c_1=g(x_0) \qquad c_1e^Q+c_2e^{-Q}-\frac{1}{2Q}\int_0^1(e^{Q(s-1)}-e^{Q(1-s)})g(h(s))ds=g(x_1)$$

$$c_1=g(x_0) \qquad c_2=e^Qg(x_1)-g(x_0)e^{2Q}+\frac{e^Q}{2Q}\int_0^1(e^{Q(s-1)}-e^{Q(1-s)})g(h(s))ds$$

所以 $$p(t)=g(x_0)e^{Qt}+g(x_1)e^{Q(1-t)}-g(x_0)e^{Q(2-t)}+\frac{e^{Q(1-t)}}{2Q}\int_0^1(e^{Q(s-1)}-e^{Q(1-s)})g(h(s))ds$$

$$-\frac{1}{2Q}\int_0^t(e^{Q(s-t)}-e^{Q(t-s)})g(h(s))ds$$

由 $g\in E^*$ 的任意性可得

$$u(t)=x_0e^{Qt}-x_0e^{Q(2-t)}+x_1e^{Q(1-t)}+\frac{e^{Q(1-t)}}{2Q}\int_0^1(e^{Q(s-1)}-e^{Q(1-s)})h(s)ds$$

$$-\frac{1}{2Q}\int_0^t(e^{Q(s-t)}-e^{Q(t-s)})h(s)ds$$

由此可得问题(1.1)解的另一种显式迭代序列为

$$u_n(t)=x_0e^{Qt}-x_0e^{Q(2-t)}+x_1e^{Q(1-t)}+\frac{e^{Q(1-t)}}{2Q}\int_0^1(e^{Q(s-1)}-e^{Q(1-s)})K_{n-1}(s)ds$$

$$-\frac{1}{2Q}\int_0^t(e^{Q(s-t)}-e^{Q(t-s)})K_{n-1}(s)ds$$

$$v_n(t)=x_0e^{Qt}-x_0e^{Q(2-t)}+x_1e^{Q(1-t)}+\frac{e^{Q(1-t)}}{2Q}\int_0^1(e^{Q(s-1)}-e^{Q(1-s)})T_{n-1}(s)ds$$

$$-\frac{1}{2Q}\int_0^t(e^{Q(s-t)}-e^{Q(t-s)})T_{n-1}(s)ds$$

其中

$$K_{n-1}(t)=f(t,u_{n-1},v_{n-1})+Mu_{n-1}+Nv_{n-1}$$

$$T_{n-1}(t)=f(t,v_{n-1},u_{n-1})+Mv_{n-1}+Nu_{n-1}$$

$$Q=\sqrt{M+N}$$

[参考文献] (References)

[1] 郭大钧.非线性泛函分析[M].济南:山东科技出版社,1985.
[2] 夏道行等.实变函数与泛函分析上、下册[M].人民教育出版社,北京,2001.
[3] 宋光兴.Banach 空间两点边值问题解的存在唯一性[J].数学物理学报,1999;19(2):159-164.
[4] 宋福民.Banach 空间中两点边值问题解解[J].数学年刊,1993,14A(6):692-697.
[5] 程其襄等.实变函数与泛函分析基础[M].高等教育出版社,北京,2005.
[6] 尤秉礼.常微分方程补充教程[M].人民教育出版社,北京,1981.