积分法求解无穷级数的敛散性的推广分析

邱烨，高战，高亚茹
中国矿业大学计算机科学与技术学院，徐州(221008)
E-mail：qy_basketball_88@126.com

摘　要：本文介绍了无穷级数与广义积分及其敛散性的判别方法,讨论了级数与广义积分的内在联系，给出了由此产生的一种无穷级数敛散性的判别法即柯西积分判别法，从而建立起了无穷积分与无穷级数敛散性之间的联系,为无穷级数敛散性的判别，提供了一个简便的方法.并在此基础上给出了通项为复合函数的级数敛散性的积分判别法.最后，给出了现行的数学分析、微积分与高等数学的教材中柯西积分判别法的一个新证明，获得了这个判别法的一个推广，由此得到一批渐进公式与命题.

关键词：广义积分；柯西积分判别法；无穷级数；收敛；发散。

1. 引 言

级数是研究函数的一个重要工具，在理论上和实际应用中都处于重要地位，这是因为：一方面能借助级数表示许多常用的非初等函数， 微分方程的解就常用级数表示；另一方面又可将函数表为级数，从而借助级数去研究函数.级数的收敛问题是级数理论的基本问题.判断级数的敛散性具有重要意义. 判断一个级数收敛可以为它值的逼近提供一个理论支持.在很多情况下，所求方程往往得不到精确解，只能利用迭代的方法求出级数解（例如一阶常微分方程的皮卡逼近法），那么这个解是否收敛就十分重要了.

“转化”是数学中最基本的思想方法之一，它贯穿于整个微积分学中. 有意识地将所学知识系统归纳总结，有利于把握知识结构的整体性、联系性、相关性，利于融会贯通. 数学分析中，级数、广义积分通过极限这个桥梁联系在一起. 在一定条件下把级数的敛散性问题转化为广义积分的敛散性问题，从而为某些级数的敛散性的判别提供了一种有效的解决途径.

柯西积分判别法及其推论与推广建立起了无穷积分与无穷级数之间的联系,为无穷级数敛散性的判别, 提供了一个简便的方法. 本文在此基础上对积分法求解无穷级数的敛散性作了一下总结.

2. 无穷级数及其敛散性

2.1 无穷级数及其敛散性的定义

定义 1.1[1]　给定一个数列 $\{u_n\}$，对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1.1)$$

称为数项级数或无穷级数（也常简称级数），其中 u_n 称为数项级数 (1.1) 的通项.

数项级数 (1.1) 也常写作 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 或简单写作 $\sum u_n$.

数项级数 (1.1) 的前 n 项之和，记为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

称它为数项级数 (1.1) 的第 n 个部分和，也简称部分和.

定义 1.2[1]　若数项级数 (1.1) 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S (即 $\lim\limits_{n\to\infty}=S$)，则称数项级数

(1.1) 收敛，称 S 为数项级数 (1.1) 的和，记作

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \text{或} S = \sum u_n \ .$$

若 $\{S_n\}$ 是发散数列，则称数项级数 (1.1) 发散.

2.2 正项级数敛散性的一般判别法

各项都是由正数组成的无穷级数，称为正项级数. 如果级数的各项都是负数，则它乘以 -1 后就得到一个正项级数，它们具有相同的敛散性.

判断正项级数 $\sum a_n$ 的敛散性，通常有如下方法[2]：

⑴ 若通项 a_n 不趋于 0（当 $n \to \infty$ 时），则 $\sum a_n$ 发散.

⑵ 如果 $a_n \to 0$（当 $n \to \infty$ 时），并且相对 $1/n$ 来讲，它是 p 阶的无穷小量，那么当 $p > 1$ 时，级数 $\sum a_n$ 收敛；若 $p \le 1$ 时，级数 $\sum a_n$ 发散.

⑶ 部分和数列有界，则正项级数 $\sum a_n$ 收敛.

⑷ 寻找比较级数 $\sum b_n$. 若要证明 $\sum a_n$ 收敛，应设法将 a_n 放大为 b_n ，使得 $0 \le a_n \le b_n$ ，且 $\sum b_n$ 收敛，从而证得 $\sum a_n$ 收敛. 若要证明 $\sum a_n$ 发散，应将 a_n 缩小为 c_n ，使得 $0 \le c_n \le a_n$ ，且 $\sum c_n$ 发散，从而证得 $\sum a_n$ 发散.

⑸ 达朗贝尔判别法（或称比式判别法）

设 $\sum a_n$ 为正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 则:

① 当 $q < 1$ 时，级数 $\sum a_n$ 收敛；

② 当 $q > 1$ 或 $q = +\infty$ 时，级数 $\sum a_n$ 发散.

⑹ 根式判别法

设 $\sum a_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, 则:

① 当 $l < 1$ 时，级数 $\sum a_n$ 收敛；

② 当 $l > 1$ 时，级数 $\sum a_n$ 发散.

3. 柯西积分判别法

判断某些正项级数的敛散性，有时用以上几种判别法比较繁琐，而用下面的柯西积分判别法(简称积分法)求解却比较简单.

定理 2.1 （柯西积分判别法）[1] 若递减函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上非负，则级数 $\sum f(n)$ 与广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散.

此定理具有重要意义，它告诉我们：建立起广义积分与无穷级数之间的联系以后，判别无穷级数的敛散性，可以通过一个广义积分来进行，从而把一个较为困难的无穷级数判别敛散问题，转化成一个较容易的广义积分判别敛散问题.

3.1 广义积分及其敛散性判别

广义积分是变上限(或下限) 定积分所确定的函数的极限，它包括无穷限广义积分（简称无穷积分）和无界函数的广义积分，而任何无界函数的广义积分都可化为无穷积分．

判定无穷积分的敛散性要点如下[2]：

⑴ 如 $f(x)\ge 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可考察 $x\to+\infty$ 时无穷小量 $f(x)$ 的阶，若阶数 $\lambda>1$，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；$\lambda\le 1$ 时发散．

⑵ 若 $f(x)\ge 0$，可用比较判别法进行判断．

⑶ 若 $f(x)\ge 0$，可考察是否有界．

⑷ 以上 $f(x)\ge 0$ 的条件，只要对于充分大的 $x(x\ge a)$ 能保持成立即可．

⑸ 因 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} -f(x)dx$ 同时敛散，故对 $f(x)\le 0$ 有类似的方法．

⑹ 以上方法无效，还可考虑用 Cauchy 准则来判断．

⑺ 用定义，看极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 是否存在．

⑻ 用分部积分法或变量替换法变成别的形式，看是否能判定它的敛散性．

⑼ 用运算性质判断敛散性，例如：

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}\left(f(x)\pm g(x)\right)dx$ 亦收敛．

若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}\left(f(x)\pm g(x)\right)dx$ 亦发散．

3.2 柯西积分判别法的理论根据

无穷级数与无穷积分在收敛性概念、判别其敛散性的方法上是类似的，这是因为无穷级数与无穷积分都是用极限方法进行研究的．讨论无穷级数与无穷积分的敛散性问题，实际上就转化为讨论数列与函数极限问题，而数列又可视为自变量取自然数的函数，因此这两个问题最后都归结到讨论函数的极限是否存在的问题．

设 $I(A)=\int_a^A f(x)dx$，由函数极限和数列极限的关系知道：$\lim\limits_{A\to\infty} I(A)$ 存在的充分必要条件是对任何数列 $\{A_n\},A_n\to+\infty$，数列 $\{I(A_n)\}$ 收敛，并且有相同的极限值．

现在，我们任取一数列 $\{A_n\},A_n\to+\infty$，并设 $A_0=a$，那么

$$\int_{A_0}^{A_n} f(x)dx=\int_{A_0}^{A_1} f(x)dx+\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx+\ldots+\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)dx,$$

记 $u_k=\int_{A_{k-1}}^{A_k} f(x)dx$，于是

$$\int_{A_0}^{A_n} f(x)dx=u_1+u_2+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

因此，如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛于 L,那么每一个这样的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 也收敛于 L．由此得到

以下推论:如果找到一个数列$\{A_n\}$，使所作出的级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$不收敛，或是找到两个数列，使所作出的两个级数收敛于不同的值，就能断定$\int_a^{+\infty}f(x)dx$不收敛.

另一方面，每一无穷级数$\sum_{k=1}^{\infty}u_k$，可以看作是一个阶梯函数的无穷积分．这只要置$f(x)=u_k, k\le x\le k+1$. 因而$\sum_{k=1}^{\infty}u_k=\int_1^{+\infty}f(x)dx$.

由于它们的这种联系，所以在一定条件下可把判别无穷级数的敛散性转化为相应的无穷积分的敛散性的判别，这即是柯西积分判别法的理论根据[3].

3.3 柯西积分判别法的证明

定理 2.1 已介绍了柯西积分判别法，下面来证明这个定理[4].

证明　由假设$f(x)$为[1,+∞）上非负减函数，对任何正数 A，$f(x)$在[1,A]上可积，从而有

$$f(n)\le\int_{n-1}^{n}f(x)dx\le f(n-1), n=2,3,\ldots$$

依次相加可得

$$\sum_{n=2}^{m}f(n)\le\int_1^m f(x)dx\le\sum_{n=2}^{m}f(n-1)=\sum_{n=1}^{m-1}f(n). \tag{2.1}$$

若反常积分收敛，则由（2.1）式左边，对任何正整数m，有

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}f(n)\le f(1)+\int_1^m f(x)dx\le f(1)+\int_1^{+\infty}f(x)dx.$$

故级数$\sum f(n)$收敛.

反之，若$\sum f(n)$为收敛级数，则由（2.1）式右边，对任一正整数$m(>1)$有

$$\int_1^m f(x)dx\le S_{m-1}\le\sum f(n)=S,$$

因为$f(x)$为非负减函数，故对任何正数 A，都有

$$0\le\int_1^A f(x)dx\le S_n<S, n\le A\le n+1,$$

联系上式得反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)dx$收敛.

用同样方法，可以证明$\sum f(n)$与$\int_1^{+\infty}f(x)dx$是同时发散的.

4. 柯西积分判别法的推广

4.1 级数的通项为复合函数的积分判别法

当无穷级数的通项$f(x)$为复合函数时，上述的柯西积分判别法将无法应用．下面的两个定理在柯西积分法的基础上给出无穷级数的通项具有复合函数情形下的敛散性的一个新的判别法.

定理 3.1[8] 设 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 为一正项发散级数，$s_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$，又设 $f(x)$ 为一正值单调下降函数，则：

(1) $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty} f(s_k)a_k$ 收敛

(2) $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 发散，则 $\sum_{k=1}^{\infty} f(s_k)a_k$ 发散

(3) $\{a_n\}$ 有界，则 $\sum_{k=1}^{\infty} f(s_k)a_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} f(s_{k-1})a_k$ 同时收敛或同时发散.

证明 (1)显然有假设可知

$$a_k f(s_k)=\int_{s_{k-1}}^{s_k} f(s_k)dx \le \int_{s_{k-1}}^{s_k} f(x)dx,$$

两边求和得

$$\sum_{k=2}^{n} a_k f(s_k) \le \int_1^{s} f(x)dx < M,$$

令 $n \to +\infty$，即得结论(1).

对于结论(2),由条件可知

$$f(s_{k-1})a_k=\int_{s_{k-1}}^{s_k} f(s_{k-1})dx \ge \int_{s_{k-1}}^{s_k} f(x)dx,$$

两边求和得

$$\sum_{k=2}^{n} f(s_{k-1})a_k \ge \int_1^{s} f(x)dx,$$

令 $n \to +\infty$，即得结论(2).

至于结论(3)，由条件知 $a_n \le k$，故易见

$$\begin{aligned}0 &\le \sum_{k=2}^{n} a_k f(s_{k-1})-\sum_{k=2}^{n} a_k f(s_k) \le k\sum_{k=2}^{n}\{f(s_{k-1})-f(s_k)\}\\ &= k\{f(s_1)-f(s_n)\} \le kf(s_1) < M.\end{aligned}$$

亦即两级数部分和之差不超过一有限常数，故必同时收敛或同时发散.

定理 3.2 设 $g(n)$ 单调上升，$g(n)\to+\infty,(n\to+\infty)$，$\lim_{n\to+\infty} g(n+1)/g(n)=a>1$. 则对于正值单调下降函数 $f(x)(x\ge 0)$，级数 $\sum f(n)$ 与 $\sum g(n)f(g(n))$ 必同时收敛或同时发散[8].

证明 由条件知，对任给定的 $0<\varepsilon<a-1$ 存在正整数 N_0，当 $n\ge N_0$ 时有

$$a-\varepsilon < g(n+1)/g(n) < a+\varepsilon,$$

即有当 $n \ge N_0$ 时有

$$\frac{a-1-\varepsilon}{a+\varepsilon}g(n+1) < g(n+1)-g(n) < (a-1+\varepsilon)g(n),$$

故当 $n \ge N_0$ 时有

$$\left(g(n+1)-g(n)\right)f\left(g(n)\right)\geq\int_{g(n)}^{g(n+1)}f(x)dx\geq\left(g(n+1)-g(n)\right)f\left(g(n+1)\right),$$

从而

$$(a-1+\varepsilon)g(n)f\left(g(n)\right)\geq\int_{g(n)}^{g(n+1)}f(x)dx\geq\frac{a-1-\varepsilon}{a+\varepsilon}g(n+1)f\left(g(n+1)\right),$$

两边对 n 求和得

$$(a-1+\varepsilon)\sum_{k=N_0}^{n}g(k)f\left(g(k)\right)\geq\int_{g(N_0)}^{g(n+1)}f(x)dx\geq\frac{a-1-\varepsilon}{a+\varepsilon}\sum_{k=N_0}^{n}g(k+1)f\left(g(k+1)\right),$$

故级数 $\sum f(n)$ 与 $\sum g(n)f(g(n))$ 必同时收敛或同时发散.

例 3.1[4] 考察级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1/n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)^p\right)$, 当 $p\leq 1$ 时的敛散性.

分析 利用一般级数敛散性判别法将很难判断该级数的敛散性，现利用定理 3.1 可简便求出.

解 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, f(x)=\frac{1}{x^p}$，则 $a_k=\frac{1}{k}$. 显然正项级数 $\sum a_k$ 发散，$p\leq 1$ 时 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散. 由定理 2.2 知，当 $p\leq 1$ 时，该级数发散. 同理可得，当 $p>1$ 时，该级数收敛.

4.2 柯西积分判别法的新证明及其推广

前面用无穷级数证明了柯西积分判别法. 下面将给出这个判别法的一个新证明，同时给出这个判别法的一个推广. 为此，我们需要下面两条引理.

引理 3.1[9] 设 $\{X_n=A_n-B_n\}$ 且数列 $\{X_n\}$ 收敛，若数列 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$ 其中有一个收敛，则另一个必收敛. 若数列 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$ 中有一个发散则另一个必发散.

引理 3.2 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递减，则 $f(k)\geq\int_k^{k+1}f(x)dx\geq f(k+1)\ (k=1,2,3\ldots)$.

至于引理 3.1 的证明，用反证法即可获得. 引理 3.2 极易证明成立. 下面证明柯西积分判别法.

证明 (1) 作数列

$$\{a_n\}=\left|\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\right|, n=1,2,3,\ldots$$

若能证明 $\left\{a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\right\}$ 收敛(在 $n\to+\infty$)时，则由引理那么积分判别法获证. 为此，首先证明 $a_n\geq a_{n+1}$(递减).

由 $f(x)$ 递减和引理 3.2 知

$$a_n-a_{n+1}=\left|\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\right|-\left|\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)dx\right|$$
$$=\int_1^{n+1}f(x)dx-f(n+1)\geq 0,$$

故 $a_n\geq a_{n+1}$ 成立.

(2) 再证 $a_n \geq 0$，（有下界）.

由于 $f(x) \geq 0$，知 $\int_1^n f(x)dx \leq \int_1^{n+1} f(x)dx$, 从而 $-\int_1^n f(x)dx \geq -\int_1^{n+1} f(x)dx$. 又 $\int_1^{n+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx$，于是

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \left| f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right| \geq 0,$$

故 $a_n \geq 0$ 成立.

综合(1)与(2)可知 $\{a_n\}$ 单调递减有下界，所以 $\{a_n\}$ 收敛.

今令 $X_n = a_n$， $A_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$， $B_n = \int_1^n f(x)dx$, 则由引理 3.1 知判别法成立[10].

仔细观察上述证明的过程，我们得到了下述定理 3.3，它是一个比积分判别法应用更广泛的判别法.

定理 3.3 （推广的积分判别法） 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上递减，且 $f(x) \geq 0$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$, 则数列 $\{a_n\}$ 收敛[10].

证明 重复上述证明过程可得此定理成立.

在定理 3.3 的条件下，我们有下列推论：

推论 3.1 $0 \leq a_n \leq f(1) (n = 1,2,3...)$ 且 $0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq f(1)$ [10].

证明 由证明积分判别法第一步知 $\{a_n\}$ 递减，从而 $a_n \leq a_1 = f(1) (n = 1,2...)$. 由前面证明积分判别法的第二步有 $a_n \geq 0$，故 $0 \leq a_n \leq f(1)$. 由极限不等式性质，有

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq f(1).$$

推论 3.2[10] 若记 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，则 $0 \leq \alpha \leq f(1)$, 于是有：

① $\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx = \alpha + \varepsilon_n$ (其中 $n \to +\infty$， $\varepsilon_n \to 0$)；

② $\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \alpha + \varepsilon_n$ (其中 $n \to +\infty$， $\varepsilon_n \to 0$)；

③ $\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx = O(1)$ $(n \to \infty)$.

推论 3.3 (级数的积分判别法) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛 $\Leftrightarrow \left| \int_1^n f(x)dx \right|$ 收敛[10].

推论 3.4 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_1^{+\infty} f(x)dx + \alpha$，其中 $0 \leq \alpha \leq f(1)$[10].

推论 3.5 (级数的积分判别法) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛[11].

附注：

⑴ 由上面的结论知积分判别法是定理 3.3 的特殊情况.

⑵ 这个定理也有明显的几何意义：假设在其面积存在的前提下，那么可以认为分别以高 $f(1), f(2),..., f(n)$, 宽为 1 的诸矩形面积之和 $\sum_{k=1}^{n} f(k)\cdot 1$ 在 $n\to\infty$ 与曲边梯形面积 $\int_1^n f(x)dx$ 在 $n\to\infty$ 时二之差位于区间 $[0, f(1)]$ 之中，当 $a_n \to 0(n\to\infty)$ 时，曲边梯形面积与矩形面积之和二者趋于相等[11].

⑶ 积分判别法按上述方法的处理并没有用广义积分与级数收敛的有关理论，而仅仅用到了数列极限与定积分的有关理论. 这样处理积分判别法不仅仅在证明上有点新意，而且更重要的是得到了比级数的积分判别法的用途要广泛得多的一个定理.

⑷ 不难发现将定理 3.3 中的条件改为：$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 严格递减，$f(x)>0$，$a_n = \sum_{k=m}^{n} f(x) - \int_m^n f(x)dx$, n 充分大时，则：

① $f(m) - \int_m^{m+1} f(x)dx < a_n < f(m) - \left|\int_m^{m+1} f(x)dx - f(m+1)\right| < f(m)$；

② $f(m) - \int_m^{m+1} f(x)dx < \lim\limits_{n\to\infty} a_n < f(m)$；

③ $\int_m^{n+1} f(x)dx < \sum_{k=m}^{n} f(k) < \int_m^n f(x)dx + f(m)$；

④ $\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)dx = O(1)\ (n\to\infty)$；

⑤ $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ 与 $\int_m^{+\infty} f(x)dx$ 同时敛散[12].

4.3 对推广的积分判别法的应用

例 3.2[10] 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} \ln k - \ln n\right|$ 存在.

证明 取 $f(x)=\frac{1}{x}, x\in[1,+\infty)$，不难验证 $f(x)$ 满足定理 3.3 的条件，且

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n,\ f(k) = \frac{1}{k},$$

故由定理 3.3 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right|$ 存在.

注 一般文献中常将例 3.2 中的极限记作欧拉常数 $C, C = 0.577216...$,至今不知道 C 是有理数还是无理数，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} \ln k - \ln n\right| = C$ [11].

例 3.3 试证$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$，其中当$n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to 0, C$为欧拉常数.

证明 取上例中的$f(x)$，则$f(1)=1$，$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$. 故由推论 3.2 和附注(4)知$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, α的范围为$0<1-\ln 2<\alpha<1$, 且$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$，于是由例 3.2 得知$\alpha=C$，由此例 3.3 得证.

例 3.4 试证$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right|=\ln 2$.

证明 由上例知$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$，则

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n}=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n},$$

两式相减得

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right|=\left|\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n\right|,$$

而$\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)=0$, 故$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right|=\ln 2$.

例 3.5 试证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在$0<p\le 1$时发散，在$p>1$时收敛.

证明 设$f(x)=\frac{1}{x^p}$，$x\in[1,+\infty)$，则

$$\int_1^n\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\ln n, & \text{当}p=1\text{时},\\ \frac{1}{p-1}\left(1-n^{1-p}\right), & \text{当}p\ne 1\text{时}.\end{cases}$$

当$0<p\le 1$时，$\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^p}=+\infty$；当$p>1$时，$\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$.

故由定理 3.3 的附注（4）知本例成立.

例 3.6[13] 试证$p>0, p\ne 1$, 且

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}=\frac{1}{1-p}\frac{1}{n^{p-1}}+\frac{1}{p-1}+\alpha+o(1),$$

其中$\frac{1}{p-1}\left(1-2^{1-p}\right)<\alpha<1, o(1)\to 0(n\to\infty)$.

证明 取$f(x)=\frac{1}{x^p}$，则$\int_1^n\frac{1}{x^p}dx=\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^n=\frac{1}{1-p}\frac{1}{n^{p-1}}+\frac{1}{p-1}$，根据推论 3.2 知本例成立.

例 3.7 证明$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$在$p>1$时收敛，在$0<p\le 1$时发散.

证明 设$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p}(x\ge 2)$, 则

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\begin{cases}\left.\frac{1}{(1-p)(\ln x)^{p-1}}\right|_2^{+\infty}, & p\ne 1,\\ \ln(\ln x)\big|_2^{+\infty}, & p=1.\end{cases}$$

当$0<p\le 1$时，$\lim_{u\to\infty}\int_2^u\frac{dx}{x(\ln x)^p}=+\infty$；当$p>1$时，$\lim_{u\to\infty}\int_2^u\frac{dx}{x(\ln x)^p}=0$. 故由定理3.3 的附注⑷知本例成立.

综上，例 3.5 和例 3.7 在第二章中已经用柯西积分判别法证明了，但不能直接利用其证明例 3.2、例 3.3、例 3.4 和例 3.6．由此可见，凡是利用级数的积分判别法证明的命题，都可以用本章中的定理 3.3 来证明．反之，可由定理 3.3 证明的命题，则不一定能用级数的积分判别法来证明．同时定理 3.3 对近似计算也有一定的价值．因为它能帮助我们估计收敛级数的和或某些收敛的广义积分之值，有时纵然找不到极限的准确值，知道它所在的范围也是很好的，这对数值逼近有一定的意义[14].

5. 结束语

通过以上问题的讨论，我们清楚地看到在一定条件下，某些级数的敛散性问题可以转化为无穷积分的敛散性问题，柯西积分法判别法建立起了级数与无穷积分的联系，为无穷级数的敛散性判别提供了一个简便的方法．积分判别法的推广与推论比柯西积分判别法的用途更为广泛，并且适用于近似计算.

判断一个级数收敛可以为它和的逼近提供一个理论支持，在很多情况下，所求方程往往得不到精确解，只能利用迭代的方法求出级数解，所以这个解是否收敛十分重要．在高等数学中就是通过级数与广义积分在一定条件下的相互联系，使问题得到了转化，从而让我们更好地研究函数的性质.

参考文献

[1] 华东师范大学数学系编．数学分析(下册)[M]．北京:高等教育出版社, 2001．
[2] 裴礼文．数学分析中的典型问题与方法[M]．北京:高等教育出版社,1993．
[3] 宋忠生．建立无穷积分与无穷级数之间的联系[J]．山东建筑工程学院学报, 1996;11 (2) : 87～ 89．
[4] 张巍．极限、无穷极数和广义积分[J]．山东农业机械化学院学报, 1990, (3) : 68．
[5] P.M.菲赫金哥尔茨著 叶彦谦等译．微积分学教程(第二版)[M]．北京:人民教育出版社,1959．
[6] 孙本旺等．数学分析中的典型例题和解题方法[M]．长沙:湖南科技出版社,1981．
[7] 赵树嫄．微积分（第二版）[M]．北京:中国人民大学出版社,1993．
[8] 樊映川．高等数学讲义[M]．北京:高等教育出版社,1958．
[9] 天根宝等．高等数学（第二版）[M]．上海:上海科学技术出版社,1993．
[10] 姚云飞．关于级数敛散性的积分判别法的一个新证明及其推广[J]．大学数学第 19 卷第二期，2003.4．
[11] 吉林大学数学系．数学分析（第一版）（中、下）[M]．北京:人民教育出版社,1978.9．
[12] Richard Courant. Introduction to Calculus and analysis Ⅱ/1,2.世界图书出版公司.1976.9．
[13] L Salas Saturnino.Einar Hille Calculus 2[M]．USA: Xerox College Publishing,1971,476．
[14] Tom M.apistol Mathematical Analysis [M]．China Machine Press,Beijing,2003．

Integral Test for Resolving the Convergence and Divergence of Infinite Series

Qiu Ye, Gao Zhan, Gao Yaru
School of Computer Science and Technology, China University of Mining and Technology, Xu Zhou (221008)

Abstract

This paper introduces the infinite series and the method for its convergence and divergence. In this paper new criterion of convergence and divergence for infinite series is given by means of the convergence and divergence of infinite integral. It establishes the link between infinite integral and infinite series. It provides an easy way for discriminating the convergence or divergence of infinite series. And on this basis, this article educes a new identification method for the convergence and divergence of infinite series, whose general term is a composite function. Finally, this paper gives the new proof and generalization of the integral test in Convergence Criterion of series of nonnegative terms on its basis, a batch of approximation formula is obtained.

Keywords: *generalized integrals; Cauchy integral test; infinite series; convergence；divergence.*