推广的 Tanh 函数方法与形式分离变量法

杨宗杭
复旦大学数学科学学院(200433)
yangzonghang@163.com

摘　要：本文分别运用推广的 Tanh 函数方法与形式分离变量方法求解（2+1）维 KdV 方程，深入地分析了这两种方法主要思想和优点，并且尝试将推广的 Tanh 函数方法与形式分离变量法相结合，用来求解偏微分方程，获得了比较令人满意的解。

关键词：推广的 Tanh 函数方法；形式分离变量法；（2+1）维 KdV 方程

1. 引 言

大多数非线性现象都可以用非线性偏微分方程描述。非线性偏微分方程的求解是古老而重要的研究课题。显式解，特别是行波解，可以很好得描述各种物理现象，如振动，传播波等。但由于非线性的复杂性，已有的大量的重要方程无法求出精确解，即使能够求得，也需要很多的技巧，尚无统一的方法。况且，具有物理意义的新解还有待于进一步的构造和发现.

正如 Klein 所说，微分方程是技巧的汇编。值得庆幸的是，经过数学家和物理学家们的不断努力，发现了孤立子理论中蕴藏着一系列构造精确解的有效方法，如反散射方法，Darboux 变换，Backlund 变换，Hirota 双线性法，分离变量法，齐次平衡法，Lie 群方法，Tanh 方法等等. 随着各种求解方法的出现，不但过去难于求解的方程得到解决，而且新的、具有重要物理意义的解不断被发现和应用，出现了一个层出不穷的势头。

本文我们就要比较两种方法，第一种是由楼森岳教授创立的形式分离变量法[1]，主要是通过引入一组形式变量多项式，得到方程的多种形式的解，由于在这种方法中，约化场的独立变量没有被分离出来，导致过程比较复杂，技巧性较强，但此法在解不可积的非线性模型方面有较普遍的实用性。

另一种是由范恩贵教授推广 Tanh 函数方法所得[2]，我们知道绝大多数有物理意义的非线性偏微分方程的孤波解都可以表示成“Tanh 函数”的多项式形式，这一现象启发人们用较少的技巧和更直接的方法构造非线性方程孤波解，这种方法首先被楼森岳教授等用于求解复杂的方程[3]，之后被 Malfliet 系统化为构造非线性方程孤波解的 Tanh 函数法[4]，范恩贵教授对 Tanh 函数方法进行推广，使其能得到更多类型的解。

通过比较我们可以发现这两种方法各有各的优点，于是我们尝试将推广的 Tanh 函数方法的思想应用到形式分离变量方法中。

本文我们主要是针对（2＋1）维 KdV 方程进行求解，我们先用形式分离变量进行求解，可以得到两个孤子解。再用形式分离变量法结合推广的 Tanh 函数方法进行求解，不仅可以得到原来那些解，还可以得到一些新的解。

2. 一般理论

2.1 形式分离变量法

对于一个给定的（n+1）维 N 阶非线性物理方程

$$F(x_0=t,x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{x_i},x_{x_ix_j},\cdots,x_{x_{i_1}\cdots x_{i_N}})\equiv F(u)=0 \qquad (1)$$

式中 $u\equiv(u_1,u_2,\cdots,u_M)^T$，$F\equiv(F_1,F_2,\cdots,F_M)^T$ 是列矩阵。$F(u)$ 为 u 及关于 x_i 的各阶导数的多项式。我们可以引入一组形式变量方程

$$\psi_{x_i}=k_i,i=0,1,2,\cdots,n \qquad (2)$$

式中 $\psi=(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_p)^T,k_i=(k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_p})^T$ 是列矩阵函数，且 $k_i=k_i(\psi)$ 是 ψ 的函数，$\psi=\psi(x_i)$ 是 x_i 的函数，（2）式的相容性条件为 $\psi_{x_ix_j}=\psi_{x_jx_i}$ 要求矩阵函数 k_i 是相互可交换的。

$$[k_i,k_j]=k_i'k_j-k_j'k_i=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[k_i(\psi+\varepsilon k_j)-k_j(\psi+\varepsilon K_i)]\Big|_{\varepsilon=0}=0 \qquad (3)$$

虽然 ψ 仍然可以是 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，但（2）式中的每一个方程都只明显依赖于一个独立变量。当 k_i 被取定后，剩下的问题就是确定 u 和 ψ 之间的关系。

于是，我们假设（1）式的解为

$$u=U(\psi) \qquad (4)$$

使 u 与 ψ 联系起来，将（2），（4）代入（1）式，令 ψ_i 的各幂次系数为零，确定 U 的具体形式。

对于一般不可积模型，为了给出一些特殊的精确解，寻找一些合适的 k_i 和 U 是比较困难的，对不同的模型需要作不同的处理。

2.2 推广的 Tanh 函数方法

首先找方程（1）的行波解，作变换 u(x,t)=U(ξ)，ξ=x+ct，将偏微分方程化为常微分方程；然后引入一个新的变量 ψ，它满足下面的方程

$$\psi'=\varepsilon\sqrt{c_0+c_1\psi+c_2\psi^2+c_3\psi^3+c_4\psi^4} \qquad (5)$$

方程（5）在不同情况下，具有如下各类行波解[5]：

（i）当$c_3=c_0=c_1=0$时，方程（5）具有钟状孤子解，三角函数和有理函数解

$$\psi=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\sec h(\sqrt{c_2}\xi),\qquad c_2>0,c_4<0;\qquad (5.1)$$

$$\psi=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\sec(\sqrt{-c_2}\xi),\qquad c_2<0,c_4>0;\qquad (5.2)$$

$$\psi=-\frac{1}{\sqrt{c_4}\xi},\qquad c_2=0,c_4>0.\qquad (5.3)$$

（ii）当$c_3=c_1=0,c_0=\dfrac{c_2{}^2}{4c_4}$时，方程（5）具有扭状孤子解，三角函数和有理函数解

$$\psi=\sqrt{-\frac{c_2}{2c_4}}\tanh(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi),\qquad c_2<0,c_4>0;\qquad (5.4)$$

$$\psi=\sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}\tan(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi),\qquad c_2>0,c_4>0;\qquad (5.5)$$

$$\psi=-\frac{1}{\sqrt{c_4}\xi},\qquad c_2=0,c_4>0.\qquad (5.6)$$

（iii）当$c_3=c_1=0$时，方程（5）具有三种 Jacobi 椭圆函数解

$$\psi=\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4(2m^2-1)}}cn(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi),\qquad c_0=\frac{c_2{}^2m^2(m^2-1)}{c_4(2m^2-1)^2},c_2>0;\qquad (5.7)$$

$$\psi=\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4(m^2+1)}}sn(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi),\qquad c_0=\frac{c_2{}^2m^2}{c_4(m^2+1)^2},c_2<0;\qquad (5.8)$$

以及$$\psi=\sqrt{\frac{-c_2}{c_4(2-m^2)}}dn(\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\xi),\qquad c_0=\frac{c_2{}^2(1-m^2)}{c_4(2-m^2)^2},c_2>0;\qquad (5.9)$$

当$m\to 1$时，周期解（5.7）退化为钟状孤子解(5.1)，周期解(5.8)退化为扭状孤子解(5.4)。

（iv）当$c_4=c_0=c_1=0$时，方程(5)有如下钟状孤子解，三角函数周期解和有理解

$$\psi=-\frac{c_2}{c_3}\sec h^2(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi),\qquad c_2>0;\qquad (5.9)$$

$$\psi = -\frac{c_2}{c_3}\sec^2(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi), \qquad c_2 < 0; \qquad (5.10)$$

$$\psi = \frac{1}{c_3\xi^2}, \qquad c_2 = 0. \qquad (5.11)$$

（v）当 $c_4 = 0, c_3 > 0$ 时，方程（5）具有 Weierstrass 椭圆函数解

$$\psi = \wp(\frac{\sqrt{c_3}}{2}\xi, g_2, g_3), \qquad (5.12)$$

其中 $g_2 = -4c_1 / c_3, g_3 = -4c_0 / c_{3.}$

我们假设方程（1）的解具有级数展开的形式，$u(x,t) = U(\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i\psi^i$，将其代入经行波变换后的方程，平衡非线性项和最高导数项，确定导数 n 的大小，然后把 U 与 ψ' 代入方程，设 ψ 及 $\psi\sqrt{c_0 + c_1\psi + c_2\psi^2 + c_3\psi^3 + c_4\psi^4}$ 的各次项系数为 0，确定待定系数。最后将其代入 $U(\xi)$，得到方程（1）的解。

2.3 结 论

（1）与 Tanh 函数法或一般的推广 Tanh 函数法相比，范教授提出的方法的关键是用方程(5)的解代替 Tanh 函数。当 $c_1 = c_3 = 0, c_0 = 1, c_2 = -2, c_4 = 1$，方程(5)具有解 $tanh\xi$，此时这种方法退化为 Tanh 方法，即 Tanh 方法仅为上述方法的一个特殊情况(5.4)。当 $c_1 = c_3 = 0, c_0 = b^2, c_2 = 2b, c_4 = 1$，方程(5)退化为 Riccati 方程 $\psi' = b + \psi^2$。此时这种方法就退化为一般的推广 Tanh 函数法。

（2）从上两种方法我们可以看到，若在形式分离变量中取 p=1，那么其中的 ω 与 c 是等价的。若取 $k_1 = \psi'$，我们就可以在形式分离变量法中用 Riccati 方程的性质来讨论方程的解。

3. 用形式分离变量法解（2+1）维 KdV 方程

一般的（2+1）维不可积的 KdV 型模型

$$u_t + u_{xxx} - av_x u - bvu_x = 0, \qquad (6)$$

$$u_x = v_y \qquad (7)$$

是（1＋1）维浅水波方程[6,7]

$$v_{xxxt}+av_xv_{xt}+bv_tv_{xx}-v_{xt}-v_{xx}=0 \qquad (8)$$

的一个（2＋1）维的推广。虽然（8）式中的常数 a 和 b 在实际的物理问题中是任意的，然而仅当 a=2b 或 a=b 时模型才是完全可积的。而对于（6）和（7）式，仅当 a=b 时才是完全可积的[8]。

我们求方程（6），(7)的二孤波解，设形式变量分离方程为

$$\psi_x=\begin{pmatrix}\psi_{1x}\\ \psi_{2x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11}\\ k_{12}\end{pmatrix},\psi_y=\begin{pmatrix}\psi_{1y}\\ \psi_{2y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{21}\\ k_{22}\end{pmatrix},\psi_t=\begin{pmatrix}\psi_{1t}\\ \psi_{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{31}\\ k_{32}\end{pmatrix}, \qquad (9)$$

其中$\psi_1=\psi_1(x,y,t),\psi_2=\psi_2(x,y,t)$是 x, y, t 的函数，$k_{ip}=k_{ip}(\psi),i=1,2,3,\ p=1,2$是$\psi$的函数。

相容性条件$[k_{ip},k_{jp}]=0$的一种简单形式的解为

$$k_{21}=R_1k_{11},k_{22}=R_2k_{12},k_{31}=\omega_1k_{11},k_{32}=\omega_2k_{12}, \qquad (10)$$

其中$R_1,R_2,\omega_1,\omega_2$为常数。我们先选定合适的$k_{11},k_{12}$，我们选择最简单的情况

$$k_{11}=A_1\psi_1,k_{12}=B_1\psi_2 \qquad (11)$$

并取$U=A[In(1+\psi_1+\psi_2+C\psi_1\psi_2)]_{xx}+E[In(1+\psi_1+\psi_2+C\psi_1\psi_2)]_x+F,$ （12）

$$V=B[In(1+\psi_1+\psi_2+C\psi_1\psi_2)]_{xx}+G[In(1+\psi_1+\psi_2+C\psi_1\psi_2)]_x+Q, \qquad (13)$$

由（9），（10），（11）式可得ψ的一般解为

$$\psi_1=\exp[A_1(x+R_1y+\omega_1t+x_{01})], \qquad (14)$$

$$\psi_2=\exp[B_1(x+R_2y+\omega_2t+x_{02})], \qquad (15)$$

将（12）～（15）式代入（6），(7)式，并令ψ_1，ψ_2的各幂次系数为零，从而确定（12）～（15）式中各项的系数，可得到（2＋1）维 KdV 方程的二孤波解。

$$u=\frac{-12R_1}{a+b}\{-\left[\frac{A_1\exp(A_1\xi_1)+B_1\exp(B_1\xi_2)+C(A_1+B_1)\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)}{1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2)+C\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)}\right]^2+$$

$$\frac{A_1^2\exp(A_1\xi_1)+B_1^2\exp(B_1\xi_2)+C(A_1+B_1)^2\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)}{1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2)+C\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)}\}+F \qquad (16)$$

$$v=\frac{-12}{a+b}\{-\left[\frac{A_1\exp(A_1\xi_1)+B_1\exp(B_1\xi_2)+C(A_1+B_1)\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)}{1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2)+C\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)}\right]^2+$$

$$\frac{A_1^2\exp(A_1\xi_1)+B_1^2\exp(B_1\xi_2)+C(A_1+B_1)^2\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)}{1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2)+C\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)}\}+Q \quad (17)$$

其中

$$\xi_1=x+R_1y+\omega_1t+x_{01},$$
$$\xi_2=x+R_2y+\omega_2t+x_{02},$$
$$\omega_1=-A_1^2+bQ+\frac{aF}{R_1},\omega_2=-B_1^2+bQ+\frac{aF}{R_1},$$
$$C=\frac{(A_1-B_1)^2}{(A_1+B_1)^2},$$

A_1,B_1,R_1,F,Q 为任意常数。

4. 将推广的 Tanh 函数方法应用到形式分离变量法中

4.1 将推广的 Tanh 函数方法应用到形式分离变量法中解（2+1）维 KdV 方程

我们还是研究（2+1）维 KdV 方程（6），（7）。在（2）式中我们取 p=1，则形式分离变量方程为：

$$\psi_x=k_1,\psi_y=k_2,\psi_t=k_{3,} \quad (18)$$

（18）式满足相容性条件的最简单的解为：

$$k_2=\omega_1k_1,k_3=\omega_2k_{1,} \quad (19)$$

式中 ω_1，ω_2 是常数。将(4),(18),(19)式及 $V=V(\psi)$ 代入方程(6),(7),如果函数 k_1,U,V 满足下列常微分方程组：

$$\omega_2k_1U'+k_1^3U'''+3k_1^2k_1'U''+k_1k_1'^2U'-ak_1UV'-bk_1VU'=0, \quad (20)$$

$$k_1U'=\omega_1k_1V', \quad (21)$$

则 $u=U(\psi),v=V(\psi)$ 是方程组的解，在实际应用中，只要 k_1 确定，通过解方程（20），（21）就可以得到方程（6），（7）的解。

在这儿我们取 $k_1=\varepsilon\sqrt{\sum_{i=0}^{R}c_i\psi^i},U=\sum_{j=0}^{n}a_j\psi^j,V=\sum_{l=0}^{m}b_l\psi^l,$ （22）

式中$\varepsilon=\pm 1$，将上式代入(20)，(21)式，平衡非线性项和最高导数项，得到$R=n+2, n=m$。

我们取 n=2,R=4,将（22）式代入（20），（21）式，用 Mathematica 得到下列代数方程组：

$$-2ab_2a_2-2bb_2a_2+24a_2c_4=0, \qquad (23)$$

$$15a_2c_3-ab_1a_2-2ab_2a_1-2bb_1a_2+6a_1c_4-bb_2a_1=0, \qquad (24)$$

$$-bb_1a_1+3a_1c_3+8a_2c_2-2ab_2a_0+2\omega_2a_2-ab_1a_1-2bb_0a_2=0, \qquad (25)$$

$$-ab_1a_0+a_1c_2+\omega_2a_1-bb_0a_1+3a_2c_1=0, \qquad (26)$$

$$2a_2-2\omega_1b_2=0, \qquad (27)$$

$$a_1-\omega_1b_1=0. \qquad (28)$$

利用 Mathematica，我们得到上面的方程有两组解：$(\omega_1\neq 0, \omega_2\neq 0)$

$$a_1=b_1=c_1=c_3=0, \omega_2=-4c_2+\frac{aa_0}{\omega_1}+bb_0, a_2=\frac{12\omega_1c_4}{a+b}, b_2=\frac{12c_4}{a+b}, \qquad (29)$$

其中$a_0, b_0, c_0, c_2, c_4, \omega_1$是任意常数。

$$a_2=b_2=c_4=0, a_0=\frac{\omega_1(c_2+\omega_2-bb_0)}{a}, a_1=\frac{3\omega_1c_3}{a+b}, b_1=\frac{3c_3}{a+b}, \qquad (30)$$

其中$b_0, c_0, c_1, c_2, c_3, \omega_1, \omega_2$是任意常数。

根据推广的 Tanh 函数方法与式（29），（30），我们可以得到下面的解：

第一种情况：（利用（29）式）

（1）Jacobi 椭圆函数表示的双周期解：$(c_4<0, c_2>0)$

$$u_1=a_0-\frac{12\omega_1c_2m^2}{(a+b)(2m^2-1)}cn^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right),$$

$$v_1=b_0-\frac{12c_2m^2}{(a+b)(2m^2-1)}cn^2\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right),$$

$$c_0=\frac{(m^2-1){c_2}^2m^2}{c_4(2m^2-1)^2}. \qquad (31)$$

（2）$(c_4<0,c_2>0)$

$$u_2=a_0-\frac{12\omega_1 c_2 m^2}{(a+b)(2-m^2)}dn^2(\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\xi),$$

$$v_2=b_0-\frac{12c_2 m^2}{(a+b)(2-m^2)}dn^2(\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\xi),$$

$$c_0=\frac{(1-m^2)c_2{}^2}{c_4(m^2-2)^2}. \qquad (32)$$

（3）$(c_4<0,c_2<0)$

$$u_3=a_0-\frac{12\omega_1 c_2 m^2}{(a+b)(m^2+1)}sn^2(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi),$$

$$v_3=b_0-\frac{12c_2 m^2}{(a+b)(m^2+1)}sn^2(\sqrt{-\frac{c_2}{1+m^2}}\xi),$$

$$c_0=\frac{c_2{}^2 m^2}{c_4(m^2+1)^2}. \qquad (33)$$

(4)扭结型孤波解：$(c_0=\frac{c_2{}^2}{4c_4},c_2<0,c_4>0)$

$$u_4=a_0-\frac{6\omega_1 c_2}{a+b}\tanh^2(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi),$$

$$v_4=b_0-\frac{6c_2}{a+b}\tanh^2(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi). \qquad (34)$$

(5)三角函数解：$(c_0=\frac{c_2{}^2}{4c_4},c_2>0,c_4>0)$

$$u_5=a_0+\frac{6\omega_1 c_2}{a+b}\tan^2(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi),$$

$$v_5=b_0+\frac{6c_2}{a+b}\tan^2(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi). \qquad (35)$$

(6) 钟型孤波解：$(c_0=0, c_2>0, c_4<0)$

$$u_6=a_0-\frac{12\omega_1 c_2}{a+b}\operatorname{sec}h^2(\sqrt{c_2}\xi),$$
$$v_6=b_0-\frac{12c_2}{a+b}\operatorname{sec}h^2(\sqrt{c_2}\xi). \qquad (36)$$

(7) 三角函数解：$(c_0=0, c_2<0, c_4>0)$

$$u_7=a_0-\frac{12\omega_1 c_2}{a+b}\sec^2(\sqrt{-c_2}\xi),$$
$$v_7=b_0-\frac{12c_2}{a+b}\sec^2(\sqrt{-c_2}\xi). \qquad (37)$$

(8) 普通解： $(c_0=0, c_2=0, c_4>0)$

$$u_8=a_0+\frac{12\omega_1}{a+b}\frac{1}{\xi^2}, v_8=b_0+\frac{12}{a+b}\frac{1}{\xi^2}. \qquad (38)$$

第二种情况：（利用（30）式）

(9) 钟型孤波解：$(c_0=c_1=0, c_2>0)$

$$u_9=\frac{\omega_1(c_2+\omega_2-bb_0)}{a}-\frac{3\omega_1 c_2}{a+b}\operatorname{sec}h^2(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi),$$

$$v_9=b_0-\frac{3c_2}{a+b}\operatorname{sec}h^2(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi). \qquad (39)$$

(10) 三角函数解：$(c_0=c_1=0, c_2<0)$

$$u_{10}=\frac{\omega_1(c_2+\omega_2-bb_0)}{a}-\frac{3\omega_1 c_2}{a+b}\sec^2(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi),$$

$$v_{10}=b_0-\frac{3c_2}{a+b}\sec^2(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi). \qquad (40)$$

(11) 普通解：$(c_0=c_1=c_2=0)$

$$u_{11}=\frac{\omega_1(\omega_2-bb_0)}{a}+\frac{12\omega_1}{a+b}\frac{1}{\xi^2},$$

$$v_{11}=b_0+\frac{12}{a+b}\frac{1}{\xi^2}. \qquad (41)$$

(12)Weierstrass 椭圆函数解：$(c_0=c_1=c_2=0,c_3>0)$

$$u_{12}=\frac{\omega_1(\omega_2-bb_0)}{a}+\frac{3\omega_1c_3}{a+b}\gamma(\frac{\sqrt{c_3}}{2}\xi,g_2,g_3),$$

$$v_{12}=b_0+\frac{3c_3}{a+b}\gamma(\frac{\sqrt{c_3}}{2}\xi,g_2,g_3). \qquad (42)$$

在上面的解中，$\xi=x+\omega_1y+\omega_2t$，且解的具体形式由方程（6），（7）中的系数确定。这样，就得到了方程（6），（7）的丰富的解。

4.2 应用于一般的 Hirota—Satsuma 方程

Hirota—Satsuma 方程[9]为

$$u_t+6auu_x-6vv_x+au_{xxx}=0,$$

$$v_t+3auv_x+av_{xxx}=0.$$

对上面的方程组作 $t\to at,v\to\sqrt{a}v,$ 我们得到一个更简洁的形式：

$$u_t+6uu_x-6vv_x+u_{xxx}=0, \qquad (43)$$

$$v_t+3uv_x+v_{xxx}=0. \qquad (44)$$

类似于上面的讨论我们可以得到代数方程组（43），（44）的两组解：$(\omega\neq0)$

$$a_2=b_1=b_2=c_4=0,a_1=-\frac{c_3}{2},a_0=-\frac{c_2+\omega}{6}, \qquad (45)$$

式中 $b_0,b_2,c_0,c_1,c_2,c_3,\omega$ 是任意的常数。

$$a_2=b_2=c_4=0,a_0=-\frac{\omega+c_2}{3},a_1=-c_3,b_0=-\frac{c_2+\omega}{3z},b_1=-\frac{c_3}{z}, \qquad (46)$$

式中 $b_2,c_0,c_1,c_2,c_3,\omega$ 是任意常数，z 是方程 $z^2-2=0$ 的根。

对于（45），（46）应用上面的方法，我们可以得到方程组（43），（44）的解为：

第一种情况：（利用（45）式）

(1)钟型孤波解：$(c_0=c_1=0,c_2>0)$

$$u_1=-\frac{c_2+\omega}{6}+\frac{c_2}{2}\sec h^2(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi),$$

$$v_1=b_0. \qquad (47)$$

(2)三角函数解： $(c_0=c_1=0,c_2<0)$

$$u_2=-\frac{c_2+\omega}{6}+\frac{c_2}{2}\sec^2(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi),$$

$$v_2=b_0. \qquad (48)$$

(3)普通解：$(c_0=c_1=c_2=0)$

$$u_3=-\frac{\omega}{6}-\frac{2}{\xi^2},$$

$$v_3=b_0. \qquad (49)$$

(4)Weierstrass 椭圆函数解：$(c_2=0,c_3>0)$

$$u_4=-\frac{\omega}{6}-\frac{c_3}{2}\gamma(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi,g_2,g_3),$$

$$v_4=b_0, \qquad (50)$$

式中 $g_2=-\frac{4c_1}{c_3},g_3=-\frac{4c_0}{c_3}.$

第二种情况：（利用（46）式）

(5)钟型孤波解：$(c_0=c_1=0,c_2>0)$

$$u_5=-\frac{\omega+c_2}{3}+c_2\sec h^2(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi),$$

$$v_5=-\frac{(\omega+c_2)z}{6}+\frac{c_2}{z}\sec h^2(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi). \qquad (51)$$

(6)三角函数解：$(c_0=c_1=0,c_2<0)$

$$u_6=-\frac{\omega+c_2}{3}+c_2\sec^2(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi),$$

$$v_6=-\frac{(\omega+c_2)z}{6}+\frac{c_2}{z}\sec^2(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi). \qquad (52)$$

(7)普通解：$(c_0=c_1=c_2=0)$

$$u_7=-\frac{\omega}{3}-\frac{4}{\xi^2},$$

$$v_7=-\frac{\omega z}{6}-\frac{4}{z\xi^2}. \qquad (53)$$

(8)Weierstrass 椭圆函数解：$(c_2=0,c_3>0)$

$$u_8=-\frac{\omega}{3}-c_3\gamma(\frac{\sqrt{c_3}}{2}\xi,g_2,g_3),$$

$$v_8=-\frac{\omega z}{6}-\frac{c_3}{z}\gamma(\frac{\sqrt{c_3}}{2}\xi,g_2,g_3), \qquad (54)$$

上式中，$g_2=-\frac{4c_1}{c_3},g_3=-\frac{4c_0}{c_3}.$

其中$\xi=x+\omega t$。我们得到了三种类型的解：椭圆型函数解，三角型函数解，钟型孤波解。比用形式分离变量法可以得到一些新的解。

比较：与形式分离变量法得到的二孤子解相比，我们不仅得到了更加丰富的孤波解，而且这种方法应用起来比较方便。

5. 结论

虽然推广的 Tanh 函数方法可以看作是形式分离变量法的特例，但是，将推广的 Tanh 函数方法的思想应用到形式分离变量法中，能得到比原来的形式分离变量法更丰富的解，而且在 Mathematica 的帮助下，几乎不需要经过手算就可以得到各种孤波解，所以，将推广的 Tanh 函数方法与形式分离变量法相结合后实用性更加广泛。

参考文献

[1]. Lou SY, Formal variable separation approach for nonintegrabel models [J]. J Math Phys, 1999, 40: 6491~6500

[2]. Fan EG, A new algebraic method for finding the line soliton solutions and doubly periodic wave solution to a two-dimensional perturbed KdV equation [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 15: 567~574

[3]. Lou SY, Huang G and Ruan YH.J Phys A,1991(24): L584

[4]. W Malfliet. Am J Phys, 1992(60):650

[5]. 范恩贵,《可积系统与计算机代数》,P31~32

[6]. Espinosa A and Fujioka J 1994 J. Phys, Soc. Jpn. 63 1289

[7]. Clarkson P A and Mansfield E L 1995 Acta Appl. Math. 39 245

[8]. Boiti M, Leon J J P, Manna M and Pempinelli E 1986 Inverse Problems 2 271

[9]. E G Fan and H Q Zhang. Phys Letter A, 1998(246): 403