具离散时滞的扩散 Musca domestica 苍蝇模型的波前解

邓习军

长江大学信息与数学学院，湖北荆州 (434023)

摘 要: 本文利用上、下解方法与技巧研究具离散时滞的扩散 Musca domestica 苍蝇模型的波前解，给出了波前解存在的条件.

关键词: 波前解；上下解； Musca domestica 苍蝇模型

中图分类号: O175.26

1 引言

为描述在实验室内成年 *Musca domestica* 苍蝇种群数目的振动变化规律， *1976* 年 *Taylor* 和 *Sokal[1]* 提出了下列含时滞的苍蝇种群增长模型

$$\frac{du}{dt} = -du(t) + bu(t-\tau)[k - bzu(t-\tau)], \tag{1}$$

其中 $u(t)$ 是成年苍蝇数目， $d > 0$ 表示成年苍蝇的死亡率，时滞 $\tau > 0$ 表示介于成年苍蝇羽化和产卵之间的发展期间的时间尺度。假定产卵数目与成年苍蝇数目成正比，那么在时间 $t-\tau$ 新产卵数目将是 $bu(t-\tau)$ ，这里 $b > 0$ 表示产卵数目与成年苍蝇数目处于同一水平。 $k - bzu(t-\tau)$ 代表卵存活率， $k > 0$ 表示最大存活率， z 表示由每个额外卵所产生的存活率的减少。关于方程 *(1)* 的解析分析到目前为止尚未得到，只是数值模拟显示它的动力学行为类似于 *Nicholson* 苍蝇方程，但没观察到象 *Nicholson* 苍蝇方程中所具有的非周期混沌行为（见 *[2]* ）。该模型是在假定苍蝇种群在成长过程中总是处于同一地方而不会到处移动的前提下建立的，可见它不能确切反映其增长规律。事实上，在现实环境中任何生物种群成长过程中都是在某个范围内到处移动的。尤其对苍蝇种群而言，不仅数目巨大，而且其活动空间更为广阔。因此，对苍蝇种群的研究应更加要考虑其扩散过程的影响 (参见文 *[6]*)。

本文考虑下列含离散时滞的扩散 *Musca domestica* 苍蝇增长模型

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - du(t,x) + bu(t-\tau,x)[k - bzu(t-\tau,x)], \tag{2}$$

其中 $D > 0$ 为扩散系数， $x \in R$, b, k, z, τ 意义同上。

当 $\tau = 0$ 时，方程 *(2)* 退化为下列经典的 *Fisher* 方程或扩散 *Logistic* 方程

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + (kb-d)u(t,x)[1 - \frac{b^2 z}{kb-d}u(t,x)]. \tag{3}$$

[1] 本课题得到长江大学科研发展基金资助

利用简单的相平面分析技巧可知，若 $kb > d$ ，则当 $c \geq 2\sqrt{D(kb-d)}$ 时，方程 *(3)* 存在波速为 c 的波前解（参见文 *[10]* ）。本文的主要目的是利用文 *[7]* 的思想方法来研究时滞和扩散对方程 *(2)* 的波前解的影响。值得指出的是，我们构造下解的方法与文 *[7]* 有所不同。本文将作如下安排：在下一节首先介绍有关预备知识，然后在余下两节分别给出有关方程 *(2)* 波前解存在性的两个主要结果。

2 预备知识

考虑下面的时滞反应扩散方程

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = f(u_t(x)) + D\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \tag{4}$$

其中 $t > 0, x \in R, D > 0$ 是扩散系数。令 $C([-\tau,0],R)$ 表示所有定义在 $[-\tau,0]$ 上的连续函数空间， f 是定义在 $C([-\tau,0],R)$ 上的连续函数。定义 $u_t(x) \in C([-\tau,0],R)$ 为

$$u_t(x)(s) = u(x,t+s), \quad s \in [-\tau,0],\ t \geq 0.$$

方程 *(4)* 的行波解是形如 $u(x,t) = \phi(x+ct)$ 的特解， $\phi \in C(R,R), c > 0$ 表示波速。将 $u(x,t) = \phi(x+ct)$ 代入方程 *(4)*, 用 t 代换 $x+ct$, 可得

$$D\phi^{''}(t) - c\phi^{'}(t) + f_c(\phi_t) = 0, \quad t \in R, \tag{5}$$

其中 $f_c : X_c = C([-c\tau,0],R) \to R$ 被定义为

$$f_c(\psi) = f(\psi^c), \quad \psi^c(s) = \psi(cs), \quad s \in [-\tau,0].$$

如果 $u_- \equiv 0$ 和 $u_+ \equiv W$ 是方程 *(4)* 的两个平衡点，则称方程 *(5)* 满足如下渐近边界条件

$$\lim_{t\to-\infty}\phi(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}\phi(t) = W. \tag{6}$$

的单调解为方程 *(4)* 的波前解。为了寻找方程 *(4)* 的波前解，我们假定：

(A_1) $f(\hat{0}) = f(\hat{W})$, 且对任意 $u \in (0,W), f(\hat{u}) \neq 0$, 其中 $\hat{u}$ 表示定义在 $[-\tau,0]$ 上，取值为 u 的常函数。

(A_2) *(拟单调性)* 存在常数 $\beta \geq 0$, 使得对于 $C([-c\tau,0],R)$ 中满足：$0 \leq \psi(s) \leq \phi(s) \leq W$, $s \in [-c\tau,0]$ 的任意函数 ϕ 和 ψ, 有 $f_c(\phi) - f_c(\psi) + \beta[\phi(0) - \psi(0)] \geq 0$ 。

(A_2^*) *(弱拟单调性)* 存在常数 $\beta \geq 0$, 使得对于 $C([-c\tau,0],R)$ 中满足：(i) $0 \leq \psi(s) \leq \phi(s) \leq W, s \in [-c\tau,0]$; (ii) $e^{\beta s}[\phi(s) - \psi(s)]$ 关于 $s \in [-c\tau,0]$ 非减的任意函数 ϕ 和 ψ, 都有 $f_c(\phi) - f_c(\psi) + \beta[\phi(0) - \psi(0)] \geq 0$.

定义轮廓集

$$\Gamma = \{\phi \in C(R,R) : (i)\phi(t)\text{在 } R \text{ 上非减；} (ii) \lim_{t\to-\infty}\phi(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}\phi(t) = W.\}$$

及轮廓集

$$\Gamma^* = \left\{ \phi \in C(R,R); \begin{array}{l} \text{(i) } \phi(t)\text{在 } R \text{ 上非减;} \\ \text{(ii) } \lim_{t\to-\infty}\phi(t)=0, \quad \lim_{t\to+\infty}\phi(t)=W; \\ \text{(iii) 对任何 } s>0, e^{\beta t}[\phi(t+s)-\phi(t)] \text{ 关于 } t\in R \text{ 非减。} \end{array} \right\}.$$

下面给出上、下解的定义．如果连续函数 $\phi \in C(R,R)$ 几乎处处可微，且

$$D\phi^{''}(t) - c\phi^{'}(t) + f_c(\phi_t) \le 0 (\ge 0).$$

在 R 上几乎处处成立，则称函数 $\phi \in C(R,R)$ 是 (5) 的上 (下) 解。

现在给出吴、邹关于时滞反应扩散方程波前解存在性定理 (见 [7, 定理 3.6 和定理 4.5]):

定理 *2.1* 如果 (A_1) 和 (A_2) 成立，且方程 (5) 有一个上解 $\overline{\phi}(t) \in \Gamma$ 和一个下解 $\underline{\phi}(t)$ 满足 $0 \le \underline{\phi}(t) \le \overline{\phi}(t) \le W$, 且 $\underline{\phi}(t) \not\equiv 0, t \in R$, 则方程 (5) 有满足渐近边界条件 (6) 的单调解，即方程 (4) 有连接两个平衡解 u_- 和 u_+ 的波前解。

定理 *2.2* 如果 (A_1) 和 (A_2^*) 成立，且方程 (5) 有一个上解 $\overline{\phi}(t) \in \Gamma^*$ 和一个下解 $\underline{\phi}(t)$ 满足

(i) $0 \le \underline{\phi}(t) \le \overline{\phi}(t) \le W, t \in R$;

(ii) $\underline{\phi}(t) \not\equiv 0$;

(iii) $e^{\beta t}[\overline{\phi}(t) - \underline{\phi}(t)]$ 关于 $t \in R$ 非减。

则方程 (5) 有满足渐近边界条件 (6) 的单调解，即方程 (4) 有连接两个平衡解 u_- 和 u_+ 的波前解。

3 拟单调情形下波前解的存在性

如果 $kb > d$, 那么方程 (2) 只有一个零平衡解和一个正平衡解 $W = \frac{kb-d}{b^2 z}$ 。把 $u(x,t) = \phi(s), s = x + ct$ 代入方程 (2), 仍记变量 s 为 t, 得到相应的行波方程为

$$D\phi^{''}(t) - c\phi^{'}(t) - d\phi(t) + b\phi(t-c\tau)[k - bz\phi(t-c\tau)] = 0, \quad t \in R. \tag{7}$$

方程 (2) 的波前解等价于方程 *(7)* 满足渐近边界条件

$$\lim_{t\to-\infty}\phi(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty}\phi(t) = W. \tag{8}$$

的单调解。将 *(7)* 与 *(5)* 作比较，我们知道函数 $f_c(\phi)$ 应定义为

$f_c(\phi) = -d\phi(0) + b\phi(-c\tau)[k - bz\phi(-c\tau)]$.

我们首先来说明 $f_c(\phi)$ 满足 (A_2) 。

引理 3.1 对任何 $c > 0$, 若 $2d \ge kb > d$, 则 $f_c(\phi)$ 满足拟单调性条件 (A_2) 。

证明 考虑函数 $f(x) = bx(k - bzx)$, 则

$$f'(x) = b(k - 2bzx) = \begin{cases} \ge 0, & x \le \frac{k}{2bz}, \\ < 0, & x > \frac{k}{2bz}. \end{cases}$$

因此 $f(x)$ 在 $x \in [0, \frac{k}{2bz}]$ 上是增函数。

然而，对任意 $s \in [-c\tau, 0]$, 有 $0 \le \psi(s) \le \phi(s) \le W = \frac{kb-d}{b^2 z} < \frac{k}{2bz}$.

因此有

$$f_c(\phi) - f_c(\psi) \ge -d[\phi(0) - \psi(0)].$$

即存在 $\beta = d > 0$, 使得 $f_c(\phi) - f_c(\psi) + \beta[\phi(0) - \psi(0)] \ge 0$.

为构造上解，定义 $\triangle_{c1}(\lambda) = bke^{-\lambda c\tau} - (c\lambda - D\lambda^2 + d)$ 。

引理 3.2 存在 $c^* > 0$, 使得对任意 $c > c^*$, $\triangle_{c1}(\lambda) = 0$ 有两个正根 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 。

证明 由于 $g(\lambda) = bke^{-\lambda c\tau}$ 关于 λ 是指数单调递减的向上凹函数, 而 $h(\lambda) = c\lambda - D\lambda^2 + d$ 关于 λ 是向下凹函数. 作出这两个函数的图象, 并利用对任意 $\lambda > 0$, 都有 $\triangle_{c1}(0) > 0, \frac{\partial^2 \triangle_{c1}(\lambda)}{\partial \lambda^2} > 0, \frac{\partial \triangle c1(\lambda)}{\partial c} < 0$. 即可证得结论。

注 显然我们可确定 $c^* < 2\sqrt{D(bk - d)}$ 。

事实上, c^* 满足方程 $\triangle'_{c1}(\lambda) = 0, \triangle_{c1}(\lambda) = 0$.

即可通过求解下列方程得到： $c\lambda - D\lambda^2 + d = bke^{-\lambda c\tau}$, $bkc\tau e^{-\lambda c\tau} = 2D\lambda - c$.

定义 $\overline{\phi}(t) = \min\{W, We^{\lambda_1 t}\}$ 。我们有

引理 3.3 若 $c > c^*$ ，则 $\overline{\phi}(t)$ 是方程 *(7)* 的上解。

证明 *(i)* 当 $t > 0$ 时，有 $\overline{\phi}(t) = W, \overline{\phi}(t - c\tau) \le W, \overline{\phi}'(t) = \overline{\phi}''(t) = 0$. 又注意到函数 $f(x) = bx(k - bzx)$ 在 *[0,W]* 上为增函数。于是有

$$\begin{aligned} & D\overline{\phi}''(t) - c\overline{\phi}'(t) - d\overline{\phi}(t) + b\overline{\phi}(t - c\tau)[k - bz\overline{\phi}(t - c\tau)] \\ \le \; & -dW + bW(k - bzW) \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

(ii) 当 $t \le 0$ 时，有 $\overline{\phi}(t) = We^{\lambda_1 t}$, $\overline{\phi}(t - c\tau) = We^{\lambda_1 (t - c\tau)}$. 于是有

$$\begin{aligned} & D\overline{\phi}''(t) - c\overline{\phi}'(t) - d\overline{\phi}(t) + b\overline{\phi}(t - c\tau)[k - bz\overline{\phi}(t - c\tau)] \\ = \; & We^{\lambda_1 t}[bke^{-\lambda_1 c\tau} - (c\lambda_1 - D\lambda_1^2 + d) - b^2 z e^{\lambda_1 (t - 2c\tau)}] \\ \le \; & 0. \end{aligned}$$

结合 *(i)*,*(ii)* 可知， $\overline{\phi}(t)$ 为方程 *(7)* 的上解。

下面来构造方程 *(7)* 的下解。令 $\triangle_{c2}(\lambda) = c\lambda - D\lambda^2 + d$, 易见方程 $\triangle_{c2}(\lambda) = 0$ 有一个正根 $\lambda_3 = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4Dd}}{2D}$, 且 $\lambda_3 > \lambda_1$.

令 $0 < \varepsilon < W$, 定义

$$\underline{\phi}(t) = \begin{cases} \varepsilon e^{\lambda_3 t}, & t \le 0, \\ \varepsilon e^{-\lambda_3 t}, & t > 0. \end{cases}$$

引理 *3.4* $\underline{\phi}(t)$ 为方程 *(7)* 的下解。

证明 *(i)* 当 $t>0$ 时，有 $\underline{\phi}(t)=\varepsilon e^{-\lambda_3 t}$，$0\le\underline{\phi}(t-c\tau)\le\varepsilon<W$. 于是有

$$\begin{aligned}
& D\underline{\phi}''(t)-c\underline{\phi}'(t)-d\underline{\phi}(t)+b\underline{\phi}(t-c\tau)[k-bz\underline{\phi}(t-c\tau)]\\
\ge\ & D\underline{\phi}''(t)-c\underline{\phi}'(t)-d\underline{\phi}(t)\\
=\ & \varepsilon e^{-\lambda_3 t}(D\lambda_3^2+c\lambda_3-d)\\
=\ & 2c\lambda_3\varepsilon e^{-\lambda_3 t}\\
>\ & 0.
\end{aligned}$$

(ii) 当 $t\le 0$ 时，有 $\underline{\phi}(t)=\varepsilon e^{\lambda_3 t}$ 。于是有

$$\begin{aligned}
& D\underline{\phi}''(t)-c\underline{\phi}'(t)-d\underline{\phi}(t)+b\underline{\phi}(t-c\tau)[k-bz\underline{\phi}(t-c\tau)]\\
\ge\ & \varepsilon e^{\lambda_3 t}(D\lambda_3^2-c\lambda_3-d)\\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

从而由 *(i)*,*(ii)* 可知， $\underline{\phi}(t)$ 为方程 *(7)* 的下解。

此外，由直接验证可知： $\overline{\phi}(t)\in\Gamma$, 且 $f_c(\phi)$ 明显满足条件 (A_1). 从而应用定理 *2.1* 及引理 $3.1\sim3.4$，我们可以得到以下结论：

定理 *3.5* 若 $2d\ge kb>d$, 则存在 $c^*>0$，使得对任意 $c>c^*$，方程 *(2)* 存在连结两平衡解 $u_-=0$ 与 $u_+=W$ 的波速为 c 的波前解。

4 弱拟单调情形下波前解的存在性

首先我们说明：当 $kb>2d$ 时， $f_c(\phi)$ 满足 (A_2^*) 。

引理 *4.1* 若 $kb>2d$, 则对 $\tau>0$ 充分小， $f_c(\phi)$ 满足弱拟单调性条件 (A_2^*) 。

证明 事实上，对满足条件： *(i)* $0\le\psi(s)\le\phi(s)\le W, s\in[-c\tau,0]$; *(ii)* $e^{\beta s}[\phi(s)-\psi(s)]$ 关于 $s\in[-c\tau,0]$ 非减的任意 $\phi(s),\psi(s)$, 我们有

$$\begin{aligned}
& \phi(-c\tau)-\psi(-c\tau)\le e^{\beta c\tau}[\phi(0)-\psi(0)],\\
& f_c(\phi)-f_c(\psi)\\
=\ & -d[\phi(0)-\psi(0)]+[\phi(-c\tau)-\psi(-c\tau)]\{bk-b^2z[\phi(-c\tau)+\psi(-c\tau)]\}\\
\ge\ & -d[\phi(0)-\psi(0)]-(bk-2d)[\phi(-c\tau)-\psi(-c\tau)]\\
\ge\ & [-d-(bk-2d)e^{\beta c\tau}][\phi(0)-\psi(0)].
\end{aligned}$$

因此， $f_c(\phi)-f_c(\psi)+\beta(\phi(0)-\psi(0))\ge[\beta-d-(bk-2d)e^{\beta c\tau}][\phi(0)-\psi(0)]$.

取

$$\beta>bk-d,$$

则由函数的连续依赖性易知，当 τ 充分小时， $\beta-d-(bk-2d)e^{\beta c\tau}>0$.

于是就有

$$f_c(\phi)-f_c(\psi)+\beta(\phi(0)-\psi(0))\ge 0.$$

为了构造上解, 定义 $\Delta_{c1}(\lambda)=D\lambda^2-c\lambda+kb-d$, 当 $c>2\sqrt{D(kb-d)}$ 时, 方程 $\Delta_{c1}(\lambda)=0$ 有两个正实根

$$\lambda_1=\frac{c-\sqrt{c^2-4D(kb-d)}}{2D},\quad \lambda_2=\frac{c+\sqrt{c^2-4D(kb-d)}}{2D}$$

。

定义 $\overline{\phi}(t)=\frac{W}{1+e^{-\lambda_2 t}}$, $t\in R$.

引理 4.2 令 $\beta\geq\lambda_2$, 我们有 $\overline{\phi}(t)\in\Gamma^*$ 。

证明 *(i)* 由 $\overline{\phi}'(t)=\frac{W\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{(1+e^{-\lambda_2 t})^2}>0$ 可知, $\overline{\phi}(t)$ 在 $t\in R$ 单调非减;

(ii) 明显有 $\lim\limits_{t\to-\infty}\overline{\phi}(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\overline{\phi}(t)=W$;

(iii)

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\{e^{\beta t}[\overline{\phi}(t+s)-\overline{\phi}(t)]\}\\ =\ &\tfrac{d}{dt}\{e^{\beta t}[\tfrac{W}{1+e^{-\lambda_2(t+s)}}-\tfrac{W}{1+e^{-\lambda_2 t}}]\}\\ =\ &\tfrac{d}{dt}\{\tfrac{We^{(\beta-\lambda_2)t}[1-e^{-\lambda_2 s}]}{(1+e^{-\lambda_2 t})[1+e^{-\lambda_2(t+s)}]}\}\\ =\ &\tfrac{(1-e^{-\lambda_2 s})e^{(\beta-\lambda_2)t}[(\beta-\lambda_2)+\beta e^{-\lambda_2 t}+\beta e^{-\lambda_2(t+s)}+(\beta+\lambda_2)e^{-\lambda_2(s+2t)}]}{[(1+e^{-\lambda_2 t})(1+e^{-\lambda_2(t+s)})]^2}.\end{aligned}$$

将 $\beta\geq\lambda_2$ 代入上式, 可得

$$\frac{d}{dt}\{e^{\beta t}[\overline{\phi}(t+s)-\overline{\phi}(t)]\geq 0.$$

由此可知, $e^{\beta t}[\overline{\phi}(t+s)-\overline{\phi}(t)]$ 关于 $t\in R$ 非减。从而由 Γ^* 的定义可知, $\overline{\phi}(t)\in\Gamma^*$ 。

引理 4.3 如果 τ 足够小, 则 $\bar{\phi}(t)=\frac{W}{1+e^{-\lambda_2 t}}$ 是方程 (7) 的上解。

证明 注意到 $D\lambda_2^2=c\lambda_2+d-kb$, 通过直接计算可得

$$\begin{aligned}&D\bar{\phi}''(t)-c\bar{\phi}'(t)-d\bar{\phi}(t)+b\bar{\phi}(t-c\tau)[k-bz\bar{\phi}(t-c\tau)]\\ \leq\ &D\bar{\phi}''(t)-c\bar{\phi}'(t)-d\bar{\phi}(t)+b\bar{\phi}(t)[k-bz\bar{\phi}(t-c\tau)]\\ =\ &\tfrac{We^{-\lambda_2 t}}{(1+e^{-\lambda_2 t})^3(1+e^{-\lambda_2(t-c\tau)})}\{e^{-\lambda_2 t}[D\lambda^2-c\lambda_2+e^{\lambda_2 c\tau}(2kb-2d-D\lambda_2^2-c\lambda_2)]\\ &+[-D\lambda_2^2-c\lambda_2+(kb-d)e^{\lambda_2 c\tau}]\}\\ =\ &\tfrac{We^{-\lambda_2 t}}{(1+e^{-\lambda_2 t})^3(1+e^{-\lambda_2(t-c\tau)})}\{-e^{\lambda_2 t}[kb-d+e^{\lambda_2 c\tau}(2c\lambda_2-3kb+3d)]\\ &-[2c\lambda_2-(kb-d)-(kb-d)e^{\lambda_2 c\tau}]\}.\end{aligned}$$

由于 λ_2 依赖 c 于而且对任何 $c>2\sqrt{D(kb-d)}$,

$$\frac{d}{dc}(c\lambda_2)=\lambda_2+\frac{c[c+\sqrt{c^2-4D(kb-d)}]}{2D\sqrt{c^2-4D(kb-d)}}>0.$$

也就是说 $c\lambda_2$ 关于 c 是单调递增的。因此, 当 $c>2\sqrt{D(kb-d)}$ 时, 有 $c\lambda_2\in(2kb-2d,+\infty)$. 于是,

$$\begin{aligned}&[kb-d+e^{\lambda_2 c\tau}(2c\lambda_2-3kb+3d)]|_{\tau=0}=2c\lambda_2-2(kb-d)>0,\\ &[2c\lambda_2-(kb-d)-(kb-d)e^{\lambda_2 c\tau}]|_{\tau=0}=2c\lambda_2-2(kb-d)>0.\end{aligned}$$

因此，对任何 $c > 2\sqrt{D(kb-d)}$, 由连续性可知存在 $\tau^*(c) > 0$, 使得当 $0 \le \tau \le \tau^*(c)$ 时，都有

$$kb - d + e^{\lambda_2 c\tau}(2c\lambda_2 - 3kb + 3d) > 0,$$
$$2c\lambda_2 - (kb-d) - (kb-d)e^{\lambda_2 c\tau} > 0.$$

这便意味着

$$D\bar{\phi}''(t) - c\bar{\phi}'(t) - d\bar{\phi}(t) + b\bar{\phi}(t-c\tau)[k - bz\bar{\phi}(t-c\tau)] \le 0, t \in R.$$

为了构造方程 (7) 的下解，定义 $\Delta_{c2}(\lambda) = D\lambda^2 - c\lambda - d$ ，易见 $\Delta_{c2}(\lambda) = 0$ 有一正根 $\lambda_4 = \frac{c+\sqrt{c^2+4Dd}}{2D}$, 显然有 $\lambda_4 > \lambda_2$ 。

对满足

$$0 < \varepsilon < \frac{W\beta}{3(\beta+\lambda_4)}. \tag{9}$$

的充分小正数 ε, 定义

$$\underline{\phi}(t) = \begin{cases} \varepsilon e^{\lambda_4 t}, & t \le 0, \\ \varepsilon e^{-\lambda_4 t}, & t > 0. \end{cases}$$

明显由 *(9)* 可知

$$0 < \varepsilon < \frac{W(\beta+\lambda_2)}{\beta+\lambda_4}, 0 < \varepsilon < \frac{W}{2}. \tag{10}$$

引理 4.4 $\underline{\phi}(t)$ 是方程 (7) 的下解。

证明 验证方法完全同于引理 *3.4*，故从略。

引理 *4.5* $0 \le \underline{\phi}(t) \le \bar{\phi}(t) \le W$ 。

证明 当 $t \le 0$ 时，由于 $\lambda_4 > \lambda_2$, 因此

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(t) - \underline{\phi}(t) &= \frac{W}{1+e^{-\lambda_2 t}} - \varepsilon e^{\lambda_4 t} \\ &= \frac{W - \varepsilon e^{\lambda_4 t} - \varepsilon e^{(\lambda_4-\lambda_2)t}}{1+e^{-\lambda_2 t}} \\ &\ge \frac{W - 2\varepsilon}{1+e^{-\lambda_2 t}}. \end{aligned}$$

利用 (10), 可知 $\bar{\phi}(t) \ge \underline{\phi}(t)$ 。

当 $t > 0$ 时， $\bar{\phi}(t) = \frac{W}{1+e^{-\lambda_2 t}} > \frac{W}{2}$, $\underline{\phi}(t) = \varepsilon e^{-\lambda_4 t} < \varepsilon$. 利用 (10), 可知 $\bar{\phi}(t) \ge \underline{\phi}(t)$ 。

引理 4.6 $e^{\beta t}[\bar{\phi}(t) - \underline{\phi}(t)]$ 关于 $t \in R$ 是单调非减的。

证明 若 $t > 0$, 则 $\underline{\phi}(t) = \varepsilon e^{-\lambda_4 t}$ 。显然有 $\underline{\phi}'(t) < 0, \bar{\phi}'(t) > 0$. 从而 $\bar{\phi}(t) - \underline{\phi}(t)$ 关于 t 单调递增。注意到函数 $h(t) = e^{\beta t}$ 也关于 t 单调递增，且总有 $e^{\beta t} > 0, \bar{\phi}(t) - \underline{\phi}(t) > 0$. 这样我们便可知，函数 $e^{\beta t}[\bar{\phi}(t) - \underline{\phi}(t)]$ 也关于 t 单调递增。即

$$\frac{d}{dt}\{e^{\beta t}[\bar{\phi}(t) - \underline{\phi}(t)]\} \ge 0.$$

若 $t \le 0$, 则 $\underline{\phi}(t) = \varepsilon e^{\lambda_4 t}$. 由 $\lambda_2 < \lambda_4$ 可得 $e^{\lambda_2 t} \ge e^{\lambda_4 t}$ 。于是

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\{e^{\beta t}[\overline{\phi}(t) - \underline{\phi}(t)]\} \\
= & \frac{d}{dt}\{e^{\beta t}[\frac{W}{1+e^{-\lambda_2 t}} - \varepsilon e^{\lambda_4 t}]\} \\
= & \frac{e^{\beta t}}{(1+e^{-\lambda_2 t})^2}\{W\beta + W(\beta+\lambda_2)e^{-\lambda_2 t} - \varepsilon(\beta+\lambda_4)e^{\lambda_4 t} - 2\varepsilon(\beta+\lambda_4)e^{(\lambda_4-\lambda_2)t} \\
& -\varepsilon(\beta+\lambda_4)e^{(\lambda_4-2\lambda_2)t}\} \\
\ge & \frac{e^{\beta t}}{(1+e^{-\lambda_2 t})^2}\{W\beta - 3\varepsilon(\beta+\lambda_4) + [W(\beta+\lambda_2) - \varepsilon(\beta+\lambda_4)]e^{-\lambda_2 t}\}.
\end{aligned}
$$

把 (9) – (10) 代入上面的不等式，可得

$$\frac{d}{dt}\{e^{\beta t}[\overline{\phi}(t) - \underline{\phi}(t)]\} \ge 0.$$

注意到 $e^{\beta t}[\overline{\phi}(t) - \underline{\phi}(t)]$ 在 $t=0$ 处连续，从而引理 *4.6* 得证。

显然， $\underline{\phi}(t) \not\equiv 0$ ，且 $f_c(\phi)$ 满足条件 (A_1) 。于是由引理 4.1 – 4.6 和定理 2.2 容易得到下面的结果。

定理 *4.7* 若 $kb > 2d$, 则存在 $\tau^* > 0$, 使得当 $0 \le \tau < \tau^*$ 时，对 $\forall\, c > 2\sqrt{D(kb-d)}$, 方程 (2) 存在连接零平衡解 $u_- \equiv 0$ 和正平衡解 $u_+ \equiv W$ 的波速为 c 的波前解。

References

[1] Taylor C E, Sokal R R. Oscillations in housefly population sizes due to time lags [J]. Ecology, 1976,57:1060-1067

[2] Ruan S. Delay Differential Equations in Single Species Dynamics, in "Delay Differential Equations with Applications"[C]. NATO Advanced Study Institute, 2004

[3] So J W H, Zou X. Traveling waves for diffusive Nicholson's blowflies equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2001,122: 385-392.

[4] Gourley S A. Wave fronts solutions of a diffsive delay model for populations of Daphnia Magna [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2001,42: 1421-1430

[5] Ma S. Traveling wave fronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem [J]. Journal of Differential Equations, 2001,171: 293-314

[6] Wu J. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations [M]. Springer-Verlag, New York, 1996

[7] Wu J, Zou X. Traveling wave fronts of reaction diffusion systems with delay [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2001,13: 651-687

[8] Zou X, Wu J. Existence of traveling fronts in delayed reaction-diffusion systems via monotone iteration method [J]. Proceedings of American Mathematical Society, 1997,125: 2589-2598

[9] Huang J, Zou X. Traveling wavefronts in diffusive and cooperative Lotka-Volterra system with delays [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002,271: 455-466

[10] Fife P C. Mathematical Aspects of Reaction and Diffusion Systems [C]. Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 28, Springer-Verlag, Berlin, 1979

[11] Murray J D. Mathematical Biology [M].Springer-Verlag, New York, 1989

Travelling Waves Fronts for the Diffusive Musca Domestica Houseflies Model with Discrete Delay

Deng Xijun

School of information science and mathematics, Yangtze University,Jingzhou,Hubei (434023)

Abstract

This paper deals with the existence of traveling wave fronts for the diffusive Musca domestica houseflies model. The existence of such solutions is proved by using the upper-lower solution technique.

Keywords: Traveling wave front; Upper-lower solution; Musca domestica houseflies model