非线性临界 P-双调和抛物型方程解的存在性

王永达，韩军强，钮鹏程
（西北工业大学应用数学系，西安 710129）

摘要：文中研究了非线性临界 p-双调和抛物型方程的初边值问题。作者分别在次临界，临界和超临界情形讨论了解的整体存在性和爆破性。本文结果表明问题(P)的解的存在与否强烈依赖于参数λ和指数 p。

关键词：p-双调和抛物型方程；整体解；瞬间完全爆破；Rellich 不等式；最佳常数
中图分类号：O175.26

Existence of Solutions to the Nonlinear Critical P-Biharmonic Parabolic Equation

Wang Yongda, Han Junqiang, Niu Pengcheng
(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129)

Abstract: In this paper the existence of global solutions to the nonlinear critical p-biharmonic parabolic equation with initial boundary value problem is considered. We get the existence of solution and blow-up of the problem (P) for the cases of subcritical,critical and supcritical. The results show that the existences of solutions depend strongly on the parameter λ and the exponent p.

Keywords: p-Biharmonic Parabolic equation; Global solution; Instantaneous and complete blow up; Rellich inequality; Best constant

0 引言

自 Baras 和 Goldstein [1]研究了线性抛物型方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda u / |x|^2, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), 0 \in \Omega, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \Omega,\ \ f \in L^2(\Omega) \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty) \end{cases} \tag{0.1}$$

以来，线性或非线性临界抛物型方程解的存在性就引起了人们研究的兴趣。例如，在文[2]中 Azorero 和 Alonso 考虑了非线性临界 p-抛物型方程，后来 Dall'Aglio，Giachetti 和 Peral 将其推广到带权的非线性临界 p-抛物型方程[3]。最近，关于双调和抛物型方程$(p=2)$，也有了一些研究[4-5]；关于 p-双调和椭圆型方程也已有一些结果[6]，但是对临界 p-双调和抛物型方程的研究还未见到。

本文的目的即是研究 p-双调和抛物型方程解的存在性。考虑如下形式的 p-双调和抛物型方程的初边值问题：

基金项目：高等学校博士学科点专项科研基金（200806990032）；国家自然科学基金（10871157）；西北工业大学科技创新基金（2008KJ02033）
作者简介：王永达（1985-），男，硕士研究生，主要研究方向：偏微分方程理论及其应用
通信联系人：钮鹏程（1962-），男，博导，教授，主要研究方向：偏微分方程理论以及应用. E-mail: pengchengniu@nwpu.edu.cn

$$\begin{cases} u_t+\Delta_p^2 u=\dfrac{\lambda}{|x|^{2p}}|u|^{p-2}u, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ u(x,0)=f(x), & x\in\Omega, \\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \end{cases} \tag{P}$$

其中 $\Delta_p^2 u\equiv\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u),1<p<N/2,N\ge 5,\lambda\in R,f\ge 0$ 满足适当的正则性假设，Ω 是 R^N 中的一有界域且原点 $0\in\Omega$，$\partial\Omega$ 是一 C^2 子流形，ν 是 $\partial\Omega$ 的外法向量。

本文组织如下：第 1 节介绍函数空间 $W^{2,p}(\Omega)$，$L^p((0,T),W_0^{2,p}(\Omega))$，以及 Rellich 不等式及最佳常数 $\lambda_{N,p}$；在第 2 节，我们考虑 $\lambda<\lambda_{N,p},1<p<N/2$ 的情况，此时得到问题(P)的整体解的存在性，即定理 2.1。第 3 节，我们处理情况 $\lambda>\lambda_{N,p},1<p<2$，根据 p 的范围来研究整体解的存在性，具体地说，就是

1. 如果 $1<p<2N/(N+4)$，则问题(P)有一有限能量解(见定理 3.1)；
2. 如果 $2N/(N+4)\le p<2N/(N+2)$，则问题(P)在分布的意义下有解(见定理 3.2)；
3. 如果 $2N/(N+2)\le p<2$，则问题(P)存在远离原点的解，即在分布意义下在 $(\Omega\setminus\{0\})\times[0,T]$ 中有解(见定理 3.3)。

这些结果表明随着 p 值的增大，得到的解的正则性越差。

第 4 节，研究 $\lambda>\lambda_{N,p},2\le p<N/2$ 时解的瞬间完全爆破情况。为此，我们利用分离变量法以及通过使用源自于无穷远处的分歧结果来考虑相应的椭圆问题，此结果允许我们对抛物问题建立一个适当的下解，由下解的爆破性可以得到问题(P)的解的爆破性。在第 5 节中，我们考虑了 $\lambda=\lambda_{N,p},1<p<N/2$ 时问题(P)解的存在性。最后一节，我们研究了当 $\lambda\in(0,\lambda_{N,p}),1<p<2$ 时解的有限消失性，即 $\exists T^*>0$，当 $t>T^*$ 时，问题(P)的整体解 u 恒等于 0。

1 预备知识

本节给出一些预备知识。记空间

$W^{2,p}(\Omega)=\{u:u$ 在 Ω 上是 2 次弱可微的，且 $D^\alpha u\in L^p(\Omega)$，对满足 $|\alpha|\le 2$ 的任意 $\alpha\}$，

其范数定义为 $\|u\|^p=\int_\Omega|\Delta u|^p dx$。$W_0^{2,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{2,p}(\Omega)$ 中的闭包。

令 $L^p((0,T),W_0^{2,p}(\Omega)):=\{u(x,t):\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}$ 可测：

$u(\cdot,t)\in W_0^{2,p}(\Omega)\ \ a.e.\ t\in(0,T),\ \|u(\cdot,t)\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}\in L^p(0,T)\}$，

范数为

$$\|u\|_{L^p((0,T),W_0^{2,p}(\Omega))}=\left(\int_0^T\|u\|^p dt\right)^{1/p}=\left(\int_0^T\int_\Omega|\Delta u|^p dxdt\right)^{1/p},$$

其共轭空间为 $L^{p'}((0,T),W^{-2,p'}(\Omega))$。

现在介绍 Rellich 不等式。设 $N \ge 5$，则对所有的 $u \in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^4} dx \le \frac{16}{N^2(N-4)^2} \int_\Omega |\Delta u|^2 dx,$$

且不等式右端的常数是最佳常数[7]。后来，Davies 和 Hinz[8]等人给出对应一般 p 的二阶 Rellich 不等式, 更高阶的 Rellich 不等式也可见文献[9]。在此我们需要 p 的二阶 Rellich 不等式[8]：

引理 1.1. 设 $1 < p < N/2$，$(N \ge 5)$，则对所有的 $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$，成立不等式

$$\lambda_{N,p} \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{2p}} dx \le \int_\Omega |\Delta u|^p dx, \tag{1.1}$$

其中 $\lambda_{N,p} = ([(N-2p)(p-1)N]/p^2)^p$ 是最佳常数。

在下文，我们经常使用下面的比较引理：

引理 1.2 考虑问题

$$\begin{cases} u_{i,t} + \Delta_p^2 u_i = c(x)|u_i|^{p-2} u_i, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u_i(x,0) = f_i(x), & x \in \Omega, \\ u_i(x,t) = g_i(t), \ \dfrac{\partial u_i(x,t)}{\partial \nu} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

$i = 1,2$，其中 $c(x) > 0$ 有界。如果 $f_1(x) \le f_2(x)$，$g_1(t) \le g_2(t)$，并且它们均为有界函数，则 $u_1 \le u_2$。

证明： 由正则性，$|u_i| < M$，$i = 1,2$，以及根据 Lipschitz 条件，我们可以得到

$$\int_{\{u_1 \ge u_2\}} |u_1(x,T) - u_2(x,T)|^2 dx + \alpha(p) \int_0^T \int_{\{u_1 \ge u_2\}} |\Delta u_1(x,t) - \Delta u_2(x,t)|^p dxdt$$

$$\le C(M) \int_0^T \int_{\{u_1 \ge u_2\}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 dxdt,$$

其中 $\alpha(p)$ 是一个仅与 p 有关的常数，由于试验函数 $(u_1 - u_2)_+$ 在抛物边界上为 0，因此根据 Gronwall 引理，我们可以得到结论。证毕。

而对于 p-双调和算子 $\Delta_p^2 u$，我们有以下极大值原理：

引理 1.3 设 $u \in C_0^4(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 在有界域 Ω 中使得 $-\Delta_p^2 u \ge 0$，则 $\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u$。

证明与相应于 p-Laplacian 算子的极大值原理类似。

2 情况 $\lambda < \lambda_{N,p}, 1 < p < N/2$：整体解的存在性

在此情况下，我们有：

定理 2.1. 设 $\lambda < \lambda_{N,p}, 1 < p < N/2, f \in L^2(\Omega)$，则问题(P)存在一个整体解 u，而且对所有的 $T > 0$，有

$u \in L^p((0,T), W_0^{2,p}(\Omega)) \cap L^\infty((0,T), L^2(\Omega))$，

对任意的$\varepsilon > 0$，

$u_t \in L^2((\varepsilon,\infty)\times\Omega)$。

证明见文[10]。

3 情况$\lambda>\lambda_{N,p}, 1<p<2$：解的存在性

本节的存在性结果表明随着p值的增大，找到的解的正则性越差。当$\lambda > \lambda_{N,p}, 1< p < 2N/(N+4)$时，问题(P)有一有限能量解，即：

定理 3.1. 如果$\lambda > \lambda_{N,p}, 1< p < 2N/(N+4), f \in L^2(\Omega)$，则问题(P)存在一整体解$u$，并使得$u \in L^p((0,T), W_0^{2,p}(\Omega)) \cap L^\infty((0,T), L^2(\Omega))$。

证明见文[10]。

下面考虑情形$\lambda > \lambda_{N,p}, 2N/(N+4) \le p < 2$。我们通过研究(P)中方程在全空间$R^N$上Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + \Delta_p^2 u = \dfrac{\lambda}{|x|^{2p}}|u|^{p-2}u, & (x,t)\in R^N\times(0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), & x \in R^N, \end{cases}$$

的自相似解的存在性开始。

3.1 R^N上 Cauchy 问题的自相似解

寻找R^N上上述Cauchy问题自相似解，即求问题(P)中方程形式为$S(r,t)=t^\alpha f(r)$的解，其中$r=|x|$，选择指数$\alpha = 1/(2-p)$，将$S(r,t)$代入(P)中方程则可以消去变量t，得到一个关于$f(r)$的常微分方程：

$$\begin{aligned} &\alpha f + (p-1)(p-2)\left|f'' + f'\frac{N-1}{r}\right|^{p-4}\left(f''+f'\frac{N-1}{r}\right)\left(f''' + f''\frac{N-1}{r} - f'\frac{N-1}{r^2}\right)^2 \\ &\quad + (p-1)\left|f''+f'\frac{N-1}{r}\right|^{p-2}\left(f^{(4)} + 2f'''\frac{N-1}{r} - 2f''\frac{N-1}{r^2} + f''\left(\frac{N-1}{r}\right)^2\right. \\ &\quad \left. + 2f'\frac{N-1}{r^3} - f'\frac{(N-1)^2}{r^3}\right) = \lambda r^{-2p}|f|^{p-2}f, \end{aligned} \tag{3.1}$$

现在寻找$f(r)$有如下形式的解：

$$f(r) = Ar^{-\delta}, \quad A>0, \delta>0。 \tag{3.2}$$

为此将(4.2)中的$f(r)$代入(4.1)中，得到

$$\delta = \frac{2p}{2-p},$$

且A满足

$$A^{p-2} = \alpha\{\lambda - (p-1)\left|\delta^2 + 2\delta - N\delta\right|^{p-2}(\delta^2+2\delta-N\delta)(\delta+2)((p-1)\delta-(N-2p))\}^{-1}。$$

将上式右端记为$B(\lambda)$，即有$A^{p-2}=B(\lambda)$，由此知，如果$B(\lambda)$是正的，则(3.1)存在形如(3.2)的解。显然，当λ充分大时，$B(\lambda)>0$。更确切地，我们有下面的引理：

引理 3.1. 设$1<p<2$，$\lambda>\lambda_{N,p}$，则$B(\lambda)>0$。

证明： 对所有，记

$$B^{-1}(\lambda)=\frac{1}{\alpha}(g_p(N)+(\lambda-\lambda_{N,p}))，$$

其中 $g_p(N)=\lambda_{N,p}-\left|\frac{4}{2-p}-N\right|^{p-2}\left(\frac{4}{2-p}-N\right)\left(\frac{2p}{2-p}\right)^{p-1}\left(\frac{4p-4}{2-p}\right)\left(\frac{2p}{2-p}-N\right)$。

为此我们记$g_p(y)=\lambda_{y,p}-\left|\frac{4}{2-p}-y\right|^{p-2}\left(\frac{4}{2-p}-y\right)\left(\frac{2p}{2-p}\right)^{p-1}\left(\frac{4p-4}{2-p}\right)\left(\frac{2p}{2-p}-y\right)$，然后证明对任意的实数$y\geq 5$，有$g_p(y)\geq 0$成立。事实上，固定$p\in(1,2)$，通过计算可知当$y=$

$y_0=4p/(2-p)$时，$g_p(y_0)=0$，$g_p'(y_0)=0$，$g_p''(y_0)>0$，且y_0为最小点，所以对任意的实数$y\geq 5$，有$g_p(y)\geq 0$。从而知$g_p(N)\geq 0$，即对所有的$\lambda>\lambda_{N,p}$，有$B^{-1}(\lambda)>0$，因此$B(\lambda)>0$。引理得证。

由此引理知对所有$\lambda>\lambda_{N,p}$，都存在自相似解$S(r,t)=A\left(\frac{t}{r^{2p}}\right)^{1/(2-p)}$。

3.2 $\lambda>\lambda_{N,p},2N/(N+4)\leq p<2$：问题(P)解的存在性

当$2N/(N+4)\leq p<2N/(N+2)$时，将自相似解$S(r,t)=A\left(\frac{t}{r^{2p}}\right)^{1/(2-p)}$看做问题(P)的一个上解，则可在一个比$L^p((0,T),W_0^{2,p}(\Omega))\cap L^\infty((0,T),L^2(\Omega))$弱的函数空间中得到一个整体解(具体见下面定理 3.2)；但是当$2N/(N+2)\leq p<2$时，由于对固定$t>0$，$S(r,t)\notin W_0^{2,p}(\Omega)$，只能将其在$\{\Omega\setminus\{0\}\}\times(0,+\infty)$上看做问题(P)的上解，因此我们只能得到一个远离原点的解。下面我们分别检验这些断言。

首先我们将证明：对于问题(P)，当$\lambda>\lambda_{N,p},2N/(N+4)\leq p<2N/(N+2)$时，仍可得到一个整体解。事实上，考虑自相似解

$$S_\lambda(r,t)=A(\lambda)\left(\frac{t}{r^{2p}}\right)^{1/(2-p)}。$$

关于时间t作一适当变换$W(x,t)=S_\lambda(|x|,t+t_0)$（$t_0>0$）可知对$x\in\Omega$，有$W(x,0)\geq f(x)$，以及对$(x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty)$，$W(x,t)>0,\ \frac{\partial W(x,t)}{\partial\nu}=0$，则$W$是一个上解。考虑序列问题

$$\begin{cases} u_t^{(n)} + \Delta_p^2 u^{(n)} = \lambda W_n(x)(u^{(n-1)})^{p-1}, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u^{(n)} = f(x), & x \in \Omega, \\ u^{(n)} = \dfrac{\partial u^{(n)}}{\partial \nu} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

其中$W_n(x) = \min\left\{n, |x|^{-2p}\right\}$ $(n \ge 1)$，设u^0是问题

$$\begin{cases} u_t^{(0)} + \Delta_p^2 u^{(0)} = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u^{(0)}(x,0) = f(x), & x \in \Omega, \\ u^{(0)} = \dfrac{\partial u^{(0)}}{\partial \nu} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{cases}$$

的解。在抛物边界$\Gamma_p = (\Omega \times \{0\}) \bigcup (\partial\Omega \times [0,\infty))$上，我们有

$(u^{(0)} - W)_+ = 0, \quad (u^{(0)} - W)_t + (\Delta_p^2 u^{(0)} - \Delta_p^2 W) \le 0$。

对上述不等式用$(u^{(0)} - W)_+$作为试验函数可推得$u^{(0)} \le W$。用同样的方法，证得

$u^{(0)} \le u^{(1)} \le \cdots \le u^{(n)} \le \cdots \le W$。

设$1 \le q < N((2-p)/2p)$(由于p的假设，知这样的q是存在的)，则$W \in L_{loc}^q$。定义

$u = \lim\limits_{n\to\infty} u^{(n)} \le W$ (逐点)。

由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\|u\|_q^q = \lim_{n\to\infty} \|u^{(n)}\|_q^q \le \|W\|_q^q,$$

则在L^q中收敛性成立。为了证明u是在分布意义下的一个解，我们需要下面两个引理：

引理 3.2. 设$\{u^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$由上述定义所得，考虑$Q_T = \Omega \times [0,T]$，则有下面的估计：

$$\left|\left\{(x,t) \in Q_T \middle| \left|\Delta u^{(m)}(x,t)\right| > h\right\}\right| \le C(p,m,T) h^{-p_2}, \qquad h > 0,$$

其中$p_2 = pq/(q+1), 1 \le q < N((2-p)/2p)$。

证明: 固定n，使得有$u^{(n)} \le W$，于是有

$$\left|\left\{(x,t) \in Q_T : \left|u^{(n)}(x,t)\right| > k\right\}\right| \le \frac{1}{k^q} \int_0^T \int_\Omega W^q \, dxdt, \qquad k > 0,$$

与n无关。对$k, h > 0$考虑集合

$$A(k,h) = \left|\left\{(x,t) \in Q_T : \left|u^{(n)}\right| > k, \left|\Delta u^{(n)}\right|^p > h\right\}\right|。$$

显然$h \to A(k,h)$是非增的，而且因为

$$A(k,0) \le C(p,N,T) k^{-q},$$

则有

$$A(0,l)\le\frac{1}{l}\int_0^l A(0,s)ds\le A(k,0)+\frac{1}{l}\int_0^l (A(0,s)-A(k,s))ds\text{。}$$

但是

$$A(0,s)-A(k,s)=\left|\left\{(x,t)\in Q_T:\left|u^{(n)}\right|\le k,\left|\Delta u^{(n)}\right|^p>s\right\}\right|,$$

在问题(P)方程中乘以$u^{(n)}$的k阶截断，得到

$$\frac{1}{k}\int_0^T\int_{\{|u^{(n)}|\le k\}}\left|\Delta u^{(n)}\right|^p dxdt\le M\text{。}$$

因此

$$\int_0^l (A(0,s)-A(k,s))ds\le Mk,$$

从而有

$$A(0,l)\le Mkl^{-1}+C(p,n,T)k^{-q}\text{。}$$

关于k对上不等式右边取极小值，得$k=Dl^{1/(q+1)}$时取得最小值。取$l=h^p$，则得

$$\left|\left\{(x,t)\in Q_T\left|\left|\Delta u^{(n)}(x,t)\right|>h\right.\right\}\right|=A(0,h)\le C(p,N,T)h^{-(pq/(q+1))},$$

结论得证。

引理 3.3. 在引理 3.2 的假设下，有

1). $\Delta u^{(n)}$依测度收敛于Δu，且存在子列(仍记为$\{\Delta u^{(n)}\}$)几乎处处收敛于Δu；

2). $\left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2}\Delta u^{(n)}$在$L^1$中收敛于$\left|\Delta u\right|^{p-2}\Delta u$。

证明: 1). 由$\{u^{(n)}\}$在$L^q(Q_T)$中收敛，可设$u^{(n)}$依测度收敛于u。现在证明$\Delta u^{(n)}$是依测度收敛的。为此只须证明$\{\Delta u^{(n)}\}$依测度是一 Cauchy 列即可。对$h>0$，集合

$$\left\{(x,t)\in Q_T:\left|\Delta u^{(n)}-\Delta u^{(m)}\right|>h\right\}$$

是下列集合

$$\Gamma(m,M)=\left\{(x,t)\in Q_T:\left|\Delta u^{(m)}\right|>M\right\}$$

$$\Gamma(n,M)=\left\{(x,t)\in Q_T:\left|\Delta u^{(n)}\right|>M\right\}$$

$$\Lambda_k(n,m)=\left\{(x,t)\in Q_T:\left|u^{(n)}-u^{(m)}\right|>k\right\}$$

$$D_{M,k,h}(n,m)=\left\{(x,t):\left|\Delta u^{(n)}\right|<M,\left|\Delta u^{(m)}\right|<M,\left|\Delta u^{(n)}-\Delta u^{(m)}\right|>h,\left|u^{(n)}-u^{(m)}\right|<k\right\}$$

的并集的一个子集，其中$M,k>0$任意。从引理 3.2 我们可选择M使得对所有$n\in\mathbb{N}$有$\left|\Gamma(n,M)\right|\le\varepsilon$。而且如果$|\xi|<M,|\eta|<M$，$|\xi-\eta|>h$，由单调性，可知存在某一$\mu>0$有$\left\langle|\xi|^{p-2}\xi-|\eta|^{p-2}\eta,\xi-\eta\right\rangle\ge\mu>0$。因此得到

$$\int_0^T\int_{\{|u^{(n)}-u^{(m)}|<k\}}\left\langle\left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2}\Delta u^{(n)}-\left|\Delta u^{(m)}\right|^{p-2}\Delta u^{(m)},\Delta u^{(n)}-\Delta u^{(m)}\right\rangle dxdt$$

$$\le \int_0^T \int_\Omega \lambda \left(\frac{\left|u^{(n)}\right|^{p-1} - \left|u^{(m)}\right|^{p-1}}{|x|^{2p}} \right) T_k(u^{(n)} - u^{(m)}) dxdt$$

$$\le 2k\lambda \int_0^T \int_\Omega \frac{W^{p-1}}{|x|^{2p}} dxdt = C(p,N,T,\lambda)k,$$

其中$T_k(\gamma) = \begin{cases} \gamma, & |\gamma| < k, \\ k\gamma/|\gamma|, & |\gamma| \ge k, \end{cases} \quad (\gamma \in R)$。

取k充分小，则有

$$\left|D_{M,k,h}(n,m)\right| \le \Big|(x,t): \{\left|\Delta u^{(n)}\right| < M, \left|\Delta u^{(m)}\right| < M, \left|u^{(n)} - u^{(m)}\right| < k,$$

$$\left\langle \left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2} \Delta u^{(n)} - \left|\Delta u^{(m)}\right|^{p-2} \Delta u^{(m)}, \Delta u^{(n)} - \Delta u^{(m)} \right\rangle > \mu\}\Big|$$

$$\le \frac{1}{\mu} \int_0^T \int_{\{|u^{(n)} - u^{(m)}| < k\}} \left\langle \left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2} \Delta u^{(n)} - \left|\Delta u^{(m)}\right|^{p-2} \Delta u^{(m)}, \Delta u^{(n)} - \Delta u^{(m)} \right\rangle dxdt$$

$$\le C(p,N,T,\lambda) \frac{k}{\mu} \le \varepsilon,$$

现在对$n,m \ge n_0, \left|\Lambda_k(n,m)\right| \le \varepsilon$(由$u^{(n)}$依测度收敛于$u$得到)，所以$\Delta u^{(n)}$依测度收敛于某一可测函数$v$，易得这一可测函数就是$\Delta u$。由 Riesz 定理知，存在子列(仍记为$\{\Delta u^{(n)}\}$)是几乎处处收敛的。

2). 由引理 3.2，容易验证$\left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2} \Delta u^{(n)}$在$L^r$ $(r > 1)$中是有界的；定义$\Omega \times R$上的函数

$$\phi: \Delta u^{(n)} \to F(x, \Delta u^{(n)}) = \left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2} \Delta u^{(n)},$$

易知对几乎所有的$x \in \Omega$，F 是$\Delta u^{(n)}$的连续函数，且对所有取定的$\Delta u^{(n)} \in R$，F 对x是Ω上的可测函数，所以F 也Ω是上的可测函数，然后根据 1)，我们也有$\left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2} \Delta u^{(n)}$几乎处处收敛且依测度收敛于$\left|\Delta u\right|^{p-2} \Delta u$，而且$\{\left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2} \Delta u^{(n)}\}$有一致绝对连续积分，即如果对每个$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得$m(E) < \delta$，则$\left|\int_E \left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2} \Delta u^{(n)} dx\right| < \varepsilon$，因此由 Vitali 定理，知$\left|\Delta u^{(n)}\right|^{p-2} \Delta u^{(n)}$在$L^1$中收敛于$\left|\Delta u\right|^{p-2} \Delta u$。

于是有下面的结论：

定理 3.2. 设$\lambda > \lambda_{N,p}, 2N/(N+4) \le p < 2N/(N+2), 0 \le f \in L^\infty(\Omega)$，则问题(P)在分布意义下有一整体解$u$，而且$u \in L^\infty((0,T), L^q(\Omega))$以及对每个$t > 0$，有$\left|\Delta u(\cdot,t)\right|$属于弱$L^{p_2}(\Omega)$空间。

注 3.1. 一般来说$p_2 = pq/(q+1)$不一定大于 1，当$p_2 > 1$(依赖p,N)时，显然u具有更好的正则性。

其次，考虑$\lambda > \lambda_{N,p}, 2N/(N+2) \le p < 2$时问题(P)的解的存在性。由于对固定$t > 0$,

$S(r,t)\notin W_0^{2,p}(\Omega)$，我们就只能将$S(r,t)$在区域$\{\Omega\setminus\{0\}\}\times(0,+\infty)$上看做问题(P)的上解。因此类似于定理 3.2 的证明过程可得到一远离原点的解，即：

定理 3.3. 设$\lambda>\lambda_{N,p},2N/(N+2)\le p<2,0\le f\in L^\infty(\Omega)$，则问题(P)在分布意义下有一远离原点的解$u$，即此时$(x,t)\in\{\Omega\setminus\{0\}\}\times(0,+\infty)$。

4 情况$\lambda>\lambda_{N,p},p\ge 2$：爆破

Galaktionov[5]讨论了$p=2$时问题(P)的解的不存在性。本节将主要关注$p>2,\lambda>\lambda_{N,p}$的情况。对于问题(P)，我们作如下假设：

(H1). $N/2>p>2,\lambda>\lambda_{N,p}$；

(H2). $f\in L^\infty(\Omega), f(x)\ge 0$，而且存在$\rho,\delta>0$使得对每个$x\in B_\rho(0)$，有$f(x)>\delta$。

我们将证明问题(P)没有局部解。为此首先研究截断问题

$$\begin{cases}(u_n)_t+\Delta_p^2 u_n=\lambda W_n(x)|u_n|^{p-2}u_n, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ u_n(x,0)=f(x), & x\in\Omega,\\ u_n=\dfrac{\partial u_n}{\partial\nu}=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\end{cases}\qquad (P_n)$$

其中$W_n(x)=\min\{n,1/|x|^{2p}\}$，注意到对每一个固定的$n$，$(P_n)$中的方程是非奇异的，于是这时问题$(P_n)$至少在有限时间内有解(类似于文献[11])。

根据分离变量法，寻找问题(P_n)具有形式为$\Phi(x,t)=T(t)X(x)$的下解，其中$X(x)>0$。此时将$\Phi(x,t)$代入(P_n)可得

$$\begin{cases}\Delta_p^2 X-\lambda W_n(x)X^{p-1}=-\mu X, & x\in\Omega,\\ X=\dfrac{\partial X}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega,\\ T'(t)=\mu T^{p-1}(t),T(0)=T_0, & t>0,\end{cases}$$

其中T_0为初值函数，$\mu>0$待定。易得

$$T(t)=\frac{T_0}{[1-(p-2)\mu T_0^{p-2}t]^{1/(p-2)}}。$$

注意到对$\tau=\dfrac{1}{(p-2)\mu T_0^{p-2}}$，有$\lim\limits_{t\to\tau}T(t)=\infty$。

下面研究椭圆问题

$$\begin{cases}\Delta_p^2 X-\lambda W_n(x)X^{p-1}=-\mu X, & x\in\Omega,\\ X=\dfrac{\partial X}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\qquad(4.1)$$

定义$\eta X=Y$，其中$\eta>0$，令$\lambda=\mu\eta^{p-2}$，问题(4.1)变为

$$\begin{cases}\Delta_p^2 Y=\lambda(W_n(x)Y^{p-1}-Y), & x\in\Omega,\\ Y=\dfrac{\partial Y}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{4.2}$$

我们需要下面的引理：

引理 4.1. 问题

$$\begin{cases}\Delta_p^2\varphi=\lambda W_n(x)\varphi^{p-1}, & x\in\Omega,\\ \varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{4.3}$$

存在特征值序列，且第一特征值$\lambda_1(n)$是非负的，关于n是递减的，并且$\lambda_1(n)\to\lambda_{N,p}$。

证明： 特征值序列的存在性证明类似于文[12]。根据 Rayleigh 商的定义易知序列$\lambda_1(n)$是非负的，而且关于n是递减的。现在来证明$\lambda_1(n)\to\lambda_{N,p}$，用反证法：假设$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_1(n)=\lambda_{N,p}+\rho$，其中$\rho>0$。选择$\phi\in W_0^{2,p}(\Omega)$使得

$$\frac{\int_\Omega|\Delta\phi|^p\,dx}{\int_\Omega\phi^p|x|^{-2p}\,dx}<\lambda_{N,p}+\frac{\rho}{2}。$$

但n充分大时，有

$$\lambda_{N,p}+\frac{\rho}{2}\le\lambda_1(n)\le\frac{\int_\Omega|\Delta\phi|^p\,dx}{\int_\Omega\phi^p W_n(x)dx}=\frac{\int_\Omega|\Delta\phi|^p\,dx}{\int_\Omega\phi^p|x|^{-2p}\,dx}<\lambda_{N,p}+\frac{\rho}{2},$$

于是得出矛盾。

引理 4.2. 如果$\lambda>\lambda_{N,p}$，则存在n_0使得当$n>n_0$时，问题(4.2)有一个正解$Y(x)$，而且存在常数$R_n>0$，使得$Y(x)$满足$\|Y\|_\infty\ge R_n$。

证明： 因为$\lambda>\lambda_{N,p}$，所以由引理 4.1，存在n_0使得当$n>n_0$时，$\lambda>\lambda_1(n)>\lambda_{N,p}$。而$\lambda_1(n)$是问题(4.2)从无穷远处正解存在的唯一分歧点，所以(4.2)有一个正解$Y(x)$(类似于文献[11])。 对此$Y(x)$，存在常数R_n使得$\|Y\|_\infty\ge R_n>0$，这是因为因为如果$\|Y\|_\infty<\varepsilon$，ε充分小，则

$$\Delta_p^2 Y\le\lambda Y(n\varepsilon^{p-2}-1)<0,$$

则与极大值原理矛盾。

于是我们有下面的结论：

推论 4.1. 存在一个n_0使得$n>n_0$时，问题(4.1)有一个正解。

证明： 只需考虑问题(4.2)的解Y及令$X=\eta^{-1}Y,\mu=\lambda\eta^{2-p}$即可。

引理 4.3. 设u是问题(P_n)的解，其中$\lambda>\lambda_1(n), 0<f(x)\in L^\infty$，则存在一个与$f$有关的时间$T_1>0$和问题$(P_n)$的一个下解$\Phi(x,t)$使得$u(x,t)\ge\Phi(x,t)$，且对每个$x\in\Omega$有$\lim\limits_{t\to T}\Phi(x,t)=\infty$。

证明： 根据比较引理和分离变量法，我们可求得问题(P_n)的形式为$\Phi(x,t)=X(x)T(t)$

的下解(其中 $X(x)$ 为(5.1)的解)满足 $\Phi(x,0)=X(x)T(0)\le u(x,\tau)$，其中 $\tau>0$。对于问题(4.1)，存在一个常数 $\sigma=\sigma(T_0)>0$ 满足 $\sigma X(x)\le u(x,\tau)/2$。现在我们考虑

$$T(t)\equiv T(t,\sigma)=\sigma(1-(p-2)\mu\sigma^{p-2}t)^{-1/(p-2)},$$

因此根据比较引理知，问题 (P_n) 的解在时间 $T_1=\dfrac{1}{(p-2)\mu\sigma^{p-2}}$ 之前发生爆破。

下面我们将证明问题(P)的解的瞬间爆破性。即：

定理 4.1. 设(H1), (H2)成立，则问题(P)没有局部解，即对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $r(\varepsilon)>0$ 使得对任意满足 $|x|\le r(\varepsilon),t\ge\varepsilon$ 的 x,t 有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x,t)=+\infty$，其中 $u_n(x,t)$ 是问题 (P_n) 的解。

证明: 给定 $\varepsilon>0$，取 $\mu>\dfrac{1}{(p-2)(\sigma\varepsilon)^{p-2}}$，则函数

$$T(t)\equiv T(t,\sigma)=\sigma(1-(p-2)\mu\sigma^{p-2}t)^{-1/(p-2)}$$

在 $t=\varepsilon^{p-2}$ 之前爆破。设 $B=\{|x|<1\}\subset\Omega$，并取 n_0 使得问题

$$\begin{cases}\Delta_p^2X-\lambda W_{n_0}(x)X^{p-1}=-\mu X & x\in B,\\ X=\dfrac{\partial X}{\partial\nu}=0 & x\in\partial B,\end{cases}$$

有一正解 X_0。因此 $T(t)X_0(x)$ 是问题(P)中方程的解，它在 $t=\varepsilon^{p-2}$ 之前爆破。但不能将它看做问题(P)的下解，因为它对初值没有控制。下面我们使用适当地伸缩来得到问题(P)一个局部的下解。

事实上，考虑 $(n/n_0)W_{n_0}\left((n/n_0)^{1/2p}x\right)=W_n(x)$，定义

$$Z_n(x)=(n_0/n)^{1/(p-2)}X_0\left((n/n_0)^{1/2p}x\right)。$$

则 Z_n 为问题

$$\begin{cases}\Delta_p^2Z_n=\lambda W_n(x)Z_n^{p-1}-\mu Z_n & |x|<(n_0/n)^{1/2p},\\ Z_n=\dfrac{\partial Z_n}{\partial\nu}=0 & |x|=(n_0/n)^{1/2p},\end{cases}\tag{4.4}$$

的解。而且球的半径与 $\|Z_n\|_\infty$ 都随着 $n\to\infty$ 趋于 0，因此对给定的 $R,\eta>0$，我们可以选择 n 充分大使得在球 B_R 上

$$(n_0/n)^{1/2p}<R,\ \ Z_n(x)\le\eta\tag{4.5}$$

成立。于是函数 $\Phi_n(x,t)=T(t)Z_n(x)$ 就是所求的局部下解。

最后，在球 $|x|<(n_0/n)^{1/2p}$ 中利用比较引理，即有

$$u_n(x,t)\ge\Phi_n(x,t)=T(t)Z_n(x),$$

由引理 4.3 知，$T(t)Z_n(x)$ 在 $t=\varepsilon^{p-2}$ 之前爆破，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x,t)=+\infty$，即得结果。

5 情况 $\lambda=\lambda_{N,p},1<p<N/2$：解的存在性

当 $\lambda=\lambda_{N,p},1<p<2N/(N+4)$ 时，与定理 3.1 类似，我们可以得到问题(P)在分布意义下整体解的存在性。当 $\lambda=\lambda_{N,p},2N/(N+4)\le p<N/2$ 时，则与第 3 节的讨论类似，也能在分布意义下得到问题(P)的解，不过这时我们需用一个稳态函数(即与时间无关的函数) $\phi(x)=c|x|^{\theta}$ ($\theta=-\frac{N-2}{2}-\sqrt{\frac{(N-2p)N(p-1)}{p^2}+\frac{(N-2)^2}{4}}$)来取代自相似解 $S(x,t)$。事实上，对任意的实数 $c\in R$，这个函数 $\phi(x)$ (对 $x\neq 0$)是问题

$$\Delta_p^2\phi=\lambda_{N,p}\phi^{p-1}|x|^{-2p}$$

的解。然后取 c 充分大，使得 $\phi\ge f$。注意到对任意 $q<p$，有 $\phi\in W_{loc}^{2,q}$，但 $\phi\notin W_{loc}^{2,p}$。也就是说，我们不能对截断问题的一序列解 $\{u^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $W_0^{2,p}(\Omega)$ 中取极限；因此，我们使用与 3.1 节(见引理 3.2 和 3.3)中一样的收敛性结果，关于截断问题的一序列解 $\{u^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $W_0^{2,p-1}(\Omega)$ 中取极限，最后也能在分布意义下得到问题(P)的解。即有下面的定理：

定理 5.1. 设 $1<p<N/2,0\le f\in L^{\infty}(\Omega)$，则问题

$$\begin{cases} u_t+\Delta_p^2u=\dfrac{\lambda_{N,p}}{|x|^{2p}}|u|^{p-2}u, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ u(x,0)=f(x), & x\in\Omega,\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty),\end{cases}$$

在分布意义下有一整体解 u。

6 情况 $\lambda<\lambda_{N,p},1<p<2$：解的消失性质

在这一节我们将试图着解释问题(P)在 $\lambda<\lambda_{N,p},1<p<2$ 时的解在有限时间内消失的情况。

定理 6.1. 假设

$2N/(N+4)\le p<2,\lambda<\lambda_{N,p},f\in L^2(\Omega)$，

则存在一个常数

$T^*=T^*(N,p,\lambda,\Omega)\le c(N,p,\lambda,\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}^{2-p}$

使得定理 2.1 中得到问题(P)的解对 $t\ge T^*$ 满足

$$u(\cdot,t)\equiv 0。\qquad (6.1)$$

证明: 对问题(P)中的方程，取定理 2.1 中问题(P)的解 u 为试验函数，则有

$$\int_\Omega u\cdot u_t dx+\int_\Omega|\Delta u|^p dx=\lambda\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}dx,$$

根据 Rellich 不等式有

$$\int_\Omega u\cdot u_t dx+\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{N,p}}\right)\int_\Omega |\Delta u|^p dx\le 0,$$

再根据 Sobolev 嵌入定理，我们得到

$$\int_\Omega u\cdot u_t dx+\frac{1}{S_{N,p}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{N,p}}\right)\left[\int_\Omega |u|^{p^*} dx\right]^{p/p^*}\le 0,$$

其中 $S_{N,p}$ 和 p^* 分别是嵌入常数和 Sobolev 共轭指数。即

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(t)dx+\frac{1}{S_{N,p}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{N,p}}\right)\left[\int_\Omega |u|^{p^*} dx\right]^{p/p^*}\le 0。$$

由关于 p 的假设，根据 Hölder 不等式，得到

$$\int_\Omega u^2(t)dx\le c\left[\int_\Omega |u|^{p^*} dx\right]^{2/p^*},$$

其中 $c=c(N,p,\Omega)$ 是一正常数。于是

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^2(t)dx+c\left[\int_\Omega u^2(t)dx\right]^{p/2}\le 0,$$

因此设

$$\varphi(t)=\int_\Omega u^2(t)dx,$$

则可以得到

$$\varphi'(t)+c[\varphi(t)]^{p/2}\le 0,$$

其中 $c>0$。因为 $p<2$，这蕴含了

$$\varphi(t)\le\left([\varphi(0)]^{(2-p)/2}-ct\right)_+^{2/(2-p)},$$

因此证明了结论。

定理 6.1 考虑 $2N/(N+4)\le p<2$ 的情况，而当 $1<p<2N/(N+4)$ 时，有下列定理：

定理 6.2 假设

$$1<p<2N/(N+4),\ 0<\lambda<\min\left\{\lambda_{N,p},\frac{1}{p}\left(\frac{N(2-p)}{2p}-1\right)\left(\frac{2N(p-1)}{2-p}\right)^p\right\},$$

以及

$$\int_\Omega |f|^{\frac{N(2-p)}{2p}}dx<\infty。$$

如果在定理 2.1 中得到问题(P)的解 u 满足

$$(\beta-2)|\Delta u|^{p-2}\Delta u\ge\left(\frac{(\beta-2)}{p}\right)^p|\nabla u|^{2p-2}u^{1-p},$$

其中 $\beta\ge 2$，则存在一常数

$$T^{**}=T^{**}(N,p,\lambda,\Omega)\le c(N,p,\lambda,\Omega)\|f\|^{2-p}_{L^{\frac{N}{2p}(2-p)}(\Omega)}$$

使得这样的解，对$t \ge T^{**}$有

$u(\cdot,t) \equiv 0$。 (6.2)

证明： 由于$N(2-p)/2p > 2$，所以$f \in L^2(\Omega)$。从而定理 2.1 的结论成立。在问题(P)中以$|u|^{\beta-2}u$为试验函数。 我们得到

$$\frac{1}{\beta}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\beta(t)dx + (\beta-1)\int_\Omega |\Delta u|^p |u|^{\beta-2}dx$$
$$+(\beta-1)(\beta-2)\int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u|\nabla u|^2|u|^{\beta-4}udx = \lambda\int_\Omega \frac{|u|^{\beta-(2-p)}}{|x|^{2p}}dx.$$

由

$$\int_\Omega \left|\Delta\left(|u|^{\frac{\beta-(2-p)}{p}}\right)\right|^p dx$$
$$=\left(\frac{\beta-(2-p)}{p}\right)^p \int_\Omega \left||u|^{\frac{\beta-(2-p)}{p}-2}u\Delta u + \frac{\beta-2}{p}|u|^{\frac{\beta-(2-p)}{p}-2}|\nabla u|^2\right|^p dx$$
$$\le \left(\frac{\beta-(2-p)}{p}\right)^p \cdot p\left(\int_\Omega |\Delta u|^p|u|^{\beta-2}dx + \left(\frac{\beta-2}{p}\right)^p\int_\Omega |\nabla u|^{2p}|u|^{\beta-2-p}dx\right),$$

又因为$(\beta-2)|\Delta u|^{p-2}\Delta u \ge \left(\frac{(\beta-2)}{p}\right)^p|\nabla u|^{2p-2}u^{1-p}$，所以有

$$\int_\Omega \left|\Delta\left(|u|^{\frac{\beta-(2-p)}{p}}\right)\right|^p dx$$
$$\le \left(\frac{\beta-(2-p)}{p}\right)^p \cdot p\left(\int_\Omega |\Delta u|^p|u|^{\beta-2}dx + (\beta-2)\int_\Omega |\Delta u|^{p-2}\Delta u|\nabla u|^2|u|^{\beta-4}udx\right),$$

用$|u|^{\frac{\beta-(2-p)}{p}}$代替(1.1)中的$u$，就有

$$\int_\Omega \frac{|u|^{\beta-(2-p)}}{|x|^{2p}}dx \le \lambda_{N,p}^{-1}\int_\Omega \left|\Delta\left(|u|^{\frac{\beta-(2-p)}{p}}\right)\right|^p dx,$$

因此，我们得到

$$\frac{1}{\beta}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\beta(t)dx + c_1\int_\Omega \left|\Delta\left(|u|^{\frac{\beta-(2-p)}{p}}\right)\right|^p dx \le 0,$$

其中

$$c_1 = \frac{(\beta-1)}{p}\left(\frac{p}{(\beta-(2-p))}\right)^p - \lambda\left(\frac{p^2}{N(p-1)(N-2p)}\right)^p > 0。$$

由 Sobolev 嵌入定理，得到

$$\frac{1}{\beta}\frac{d}{dt}\int_\Omega u^\beta(t)dx + \frac{c_1}{S_{N,p}}\left[\int_\Omega |u|^{\frac{[\beta-(2-p)]p^*}{p}}dx\right]^{p/p^*} \le 0。 \quad (6.3)$$

选择

$$\beta = \frac{N(2-p)}{2p},$$

则(6.3)式就变为

$$\frac{1}{\beta}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u^{\beta}(t)dx + \frac{c_1}{S_{N,p}}\left[\int_{\Omega}|u|^{\beta}dx\right]^{p/p^*} \le 0。$$

如果定义

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} u^{\beta}(t)dx,$$

则得到

$$\varphi'(t) + c_2[\varphi(t)]^{p/p^*} \le 0,$$

其中$c_2 = c_2(N,p,\Omega) > 0$。因为$p < p^*$，这蕴含了

$$\varphi(t) \le \left([\varphi(0)]^{(2p)/N} - ct\right)_+^{N/(2p)}。$$

因此对于这样的解u，当对$t \ge T^{**}$时仍然有$u(\cdot,t) \equiv 0$。

[参考文献] (References)

[1] P. Baras and J. Goldstein．The heat equation with a singular potential[J]．Trans. Amer. Math. Soc., 294(1984) 121-139.

[2] J. P. Garcia Azorero and I. Peral Alonso．Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems[J]．J. Diff. Equations., 144(1998) 441-476.

[3] A. Dall'Aglio, D. Giachetti and I. Peral．Results on parabolic equations related to some Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities[J]．Siam J. Math. Anal., 36(2004) 691-716.

[4] F. GazzolaL and H.-C. Grunaub. Some new properties of biharmonic heat kernels[J]. Nonlinear Anal., 70(2009) 2965-2973.

[5] V. A. Galaktionov．On nonexistence of Baras-Goldstein type without positivity assumptions for singular linear and nonlinear parabolic equations[J]．Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 260(2008) 123-143.

[6] 杨舟, 耿堤, 严慧文. 具有临界增长的p-双调和方程非平凡解的存在性[J]. 数学年刊, 27A(2006) 129-142.

[7] Rellich, F. Halbbeschränkte Differentialoperatoren höherer Ordnung. Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954, Amsterdam, Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1956, III: 243-250.

[8] E. B. Davies and A. M. Hinz．Explicit constants for Rellich inequalities in $L_p(\Omega)$ [J]．Math. Z., 227(1998) 511-523.

[9] G. Barbatis．Best constants for higher-order Rellich inequalities in $L_p(\Omega)$ [J]．Math. Z., 255 (2007) 877-896.

[10] 王永达．非线性临界p-双调和抛物型方程解的存在性[J]．贵州大学学报(自然科学版), 27(1)(2010) 3-6.

[11] H. Fujita．On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations[J]．Proc. Sympos. Pure Math.18(1968) 138-161.

[12] A. Lê．Eigenvalue Problems for the p-Laplacian [J].Nonlinear.Anal., 64(2006)1057-1099.