

结合加权全变分与小波的图像修补模型

王艳, 郭定辉

(北京航空航天大学数学与系统科学学院, 北京 100191)

摘要: 提出一种基于加权全变分和小波的联合修补图像的新偏微分方程模型, 用于有噪图像的修补。该方法综合利用了全变分与小波的优点, 同时应用加权全变分的方法, 使之更具有适应性。实验表明, 对有噪图像进行修补效果较好, 可以很好的保持纹理及边缘, 减少 Gibbs 现象。

关键词: 图像信号处理; 加权全变分; 小波; 图像修补

中图分类号: TP911.73

A model combining weighted total variation and wavelet for image-inpainting

Wang Yan, Guo Dinghui

(School of Mathematics and Systems Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191)

Abstract: A partial differential equation model which combines weighted total variation approach and wavelet approach to solve the image inpainting problem is given. This method combines advantages of total variation and wavelet transform. Moreover, using the method of weighted total variation makes it more adaptive. The experiment shows that the effect of inpainting is better which preserves the texture and reduces the Gibbs phenomenon.

Keywords: image processing; total variation; wavelet; image inpainting

0 引言

图像修补是对图像上信息缺损区域进行填充的过程, 其目的就是为了对信息损失的图像进行恢复, 使修补后的图像接近或达到原始图像的视觉效果。图像修补技术在数字图像处理, 视觉分析及电影制作中有许多重要的应用, 如修补被刮擦、污损的旧照片及去除文字遮挡等。

目前实现图像修补的偏微分模型有许多种。Chan 等^[1]借鉴著名的 Rudin-Osher-Fatemi 全变分图像修复模型, 提出了基于全变分的偏微分方程修补模型

$$\min_{u|_{\Omega, M} = u_0} \int_{\Omega} |\nabla u| dx \quad (1)$$

这里 Ω 为整幅图像域, M 为待修补区域, u_0 为观察图像, 如图 1 所示。

然而, 该修补模型不能同时去噪。改进模型 (1) 为下式

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \lambda \int_{M^c} (u - u_0)^2 dx \right\} \quad (2)$$

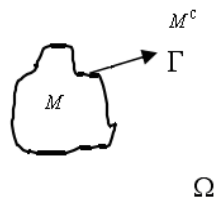


图 1 待修补区域示意图
Fig. 1 Inpainting region

式中特征函数

$$X_{M^c}(x) = \begin{cases} 1, & x \in M^c \\ 0, & x \in M \end{cases}$$

从(2)可以看出, TV 范数可以将水平集扩展入 M , 因此不损失 M 边界切线方向的不连续性, 而且 TV 范数除了适合于在 M 区域上修补图像, 还适合于在 M^c 上去噪。

利用该模型, Chan 等取得了良好的实际修补效果。该全变分模型自从提出以后, 由于能够在去除噪声的同时保持图像细节, 而广泛应用于图像恢复, 图像修补, 图像融合等。小波分析作为当前数学中一个迅速发展的领域, 由于在时域和频域具有联合局部分析功能、多分辨率分析功能、小波函数多样性等优点, 在信号及图像处理方面得到了空前的发展。但是小波对有噪图像进行处理时, 容易出现 Gibbs 现象。

由于小波分析与全变分模型在图像修补领域应用都比较广泛, 而且效果很好, 因此已经有人将两者结合用于图像处理。例如, François Malgouyres^{[2][3]}探讨了全变分与软阈值小波去噪方法的共同点及各自的优缺点, 提出了一个混合模型, 其综合利用了两种方法的优点, 与传统的小波去噪方法相比, 减少了 Gibbs 现象, 而与全变分方法相比, 限制了纹理方向的变化, 因此更好的保持纹理, 对图像进行去噪效果良好。

本文在 François Malgouyres 去噪模型的启示下, 将小波分析与全变分结合起来对有噪图像进行修补。改进后的方法中的能量函数是加权全变分函数, 与传统的全变分相比更为灵活, 采取合适的加权函数可以减少运算时间, 缩减迭代步骤, 更好的保持图像边缘, 对图像进行修补效果较好。由于结合了全变分和小波模型, 拥有文献[2]中处理图像的优点, 减少 Gibbs 现象, 很好的保持纹理。以下首先提出结合小波分析与全变分用于有噪图像修补的偏微分方程模型, 证明了模型的适定性, 并用实验说明修补效果。

1 加权全变分与小波模型在图像修补中的应用

为了综合应用小波及全变分的优点, 本文考虑将两者结合应用在图像修补领域。

在以下假设 Ω 为 R^N 中的开区域, 区域 Ω 分为待修补区域 M 及其补集 $M^c = \Omega \setminus M$ 两部分。图像修补就是利用一幅图像在集合 M^c 上的图像信息, 校正该幅图像在 M 集合上的图像数据。

假设区域 Ω 上的待修补图像数据为 $v \in L^2(\Omega)$, w 表示区域 Ω 上的修补后图像。根据 François Malgouyres 提出的框架, 我们将传统的全变分修补模型修改为

$$\min_{X_{M^c}(x)(w-v) \in N_{D,\tau}} E(w) = \int_{\Omega} g(x) |\nabla w(x)| dx \quad (3)$$

其中 $X_{M^c}(x)$ 为区域 M^c 的特征函数, $N_{D,\tau} = \{\varphi \in L^2(T) : \forall \psi \in D, |\langle \varphi, \psi \rangle| \leq \tau\}$,

$D = \{\psi_l\}_{l \in I}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的小波或小波包基函数 $\{\psi_l\}_{l \in I}$ 的张成空间, 而 $g(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ 大于正

常数 C_0 。注意到在传统的 TV 方法中, $g(x)=1, D=\{\psi \in L^2(\Omega), \|\psi\|=1\}$, 在软阈值方法中, $E(w)=f_l(|\langle w, \psi_l \rangle|)$, 其中 f_l 为任意增函数。在我们的算法中, 能量函数 $E(w)$ 是加权全变分函数, 与全变分方法相比, 采取合适的加权函数可以减少运算时间, 缩减迭代步骤, 更好的保持图像边缘, 对图像进行修补效果较好, 同时将 D 的范围缩小, 可以更好的保持纹理。与小波软阈值方法相比, 能量函数用了全变分形式, 保留了全变分的优点, 减少了 Gibbs 现象, 同时基函数 D 可以扩充, 比如使用小波包函数, 效果更好。

加权函数 g 的选取, 观察图 1, 考虑到修补区域 M 中, 距离待修补区域边界 Γ 比较近的像素, 受 M^c 的影响较大, 反之影响较少, 因此定义距离函数

$$d(x,y)=\min_{(x_0,y_0) \in \Gamma} \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \quad (x,y) \in M, \text{ 设 } g(x,y)=1+k_1/(d(x,y)+k_2), \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为}$$

参数, 可以改变 $g(x,y)$ 的取值范围。因此, 当待处理像素距离边界 Γ 近时, 受 M^c 影响较大。这样可以加速修补过程。在区域 M^c 中, 可以按照文献[4]的方法选取 g , 在边缘处 g 较小, 非边缘处 g 较大, 这样可以更好的保持边缘, 具体细节不再赘述。

2 数值实现方案

为了最小化 (3), 我们使用最速下降法, 这里,

$$E(w)=\sum_{i,j=0}^{N-1} g|\nabla w_{i,j}|+\frac{1}{\varepsilon} X_{M^c}(x) \sum_{\psi \in D} (\sup(|\langle w-v, \psi \rangle|-\tau, 0))^2$$

$$=TV_g(w)+\frac{1}{\varepsilon} X_{M^c}(x) \sum_{\psi \in D} J_\psi(w)$$

$$\text{其中 } J_\psi(w)=\sum_{\psi \in D} (\sup(|\langle w-v, \psi \rangle|-\tau, 0))^2$$

我们用 $(\varphi_l)_{l=1,\dots,N^2}$ 是 R^{N^2} 的一组基, 包含 Dirac delta 函数。令 $w^0 = v$ 为原图像, 需要计算迭代步骤中每一个 $l \in \{1, \dots, N^2\}$,

$$\frac{\partial E(w^n)}{\partial \varphi_l} = \frac{\partial TV_g(w^n)}{\partial \varphi_l} + \frac{1}{\varepsilon} X_{M^c}(x) \sum_{\psi \in D} \frac{\partial J_\psi(w^n)}{\partial \varphi_l}.$$

$$\text{令 } \nabla E(w^n) = \sum_{l=1}^{N^2} \frac{\partial E(w^n)}{\partial \varphi_l} \varphi_l, \text{ 用二分法计算最优步长 } s^n = \operatorname{argmin}_{t \in R} E(w^n - t \nabla E(w^n)), \text{ 最后}$$

$$\text{令 } w^{n+1} = w^n - s^n \nabla E(w^n)。$$

$$\frac{\partial TV_g(w^n)}{\partial \varphi_l} \text{ 的计算在文献[8]中有叙述, 这里不再赘述。}$$

下面考虑 $\sum_{\psi \in D} \frac{\partial J_\psi(w^n)}{\partial \varphi_l}$ 的计算, 这里我们用 $(\varphi_l)_{l=1,\dots,N^2}$ 表示梯度, 同样也可以用另一组基表示梯度, 比如 D 包含的一组正交基 $(\varphi'_k)_{k=1,\dots,N^2}$ 来计算 $\partial J_{\varphi'_k}(w^n)/\partial \varphi_l$, 因为

$$\frac{\partial J_{\varphi'_k}(w^n)}{\partial \varphi_l} = \sum_{j=1}^{N^2} \frac{\partial J_{\varphi'_k}(w^n)}{\partial \varphi'_j} \langle \varphi'_j, \varphi_l \rangle, \text{ 所以可以通过计算 } \left(\frac{\partial J_{\varphi'_k}(w^n)}{\partial \varphi'_j} \right)_{j=1,\dots,N^2} \text{ 得到}$$

$$\left(\frac{\partial J_{\varphi'_k}(w^n)}{\partial \varphi_l} \right)_{l=1,\dots,N^2}。$$

$$\text{考虑 } \left(\frac{\partial J_{\varphi'_k}(w^n)}{\partial \varphi'_j} \right) \text{ 的计算, 当 } |\langle w^n - v, \varphi'_k \rangle| < \tau \text{ 时, } \left(\frac{\partial J_{\varphi'_k}(w^n)}{\partial \varphi'_j} \right) = 0, \text{ 否则}$$

$$\frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_j} = 2 \text{sign}(\langle w^n - v, \phi_k \rangle) \langle \phi_j, \phi_k \rangle \times \left(\langle w^n - v, \phi_k \rangle - \tau \right) \text{ 即当 } j \neq k \text{ 时, } \left(\frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_j} \right) = 0 \text{。 综}$$

$$\text{上, } \frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_l} = \sum_{j=1}^{N^2} \frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_j} \langle \phi_j, \phi_l \rangle = \frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_k} \langle \phi_k, \phi_l \rangle, \text{ 这样}$$

$$\sum_{l=1}^{N^2} \left(\frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_l} \right) = \sum_{l=1}^{N^2} \frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_k} \langle \phi_k, \phi_l \rangle$$

$$= \langle \sum_{l=1}^{N^2} \frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_k} \phi_k, \phi_l \rangle = 0$$

因此, 对于 $l \in \{1, \dots, N^2\}$, 所有的 $\sum_{k=1}^{N^2} \left(\frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_l} \right)$ 可以通过系数 $\left(\frac{\partial J_{\phi_k}(w^n)}{\partial \phi_k} \right)_{k=1, \dots, N^2}$ 的逆小波变换算出。

3 实验与分析

图 2 (a) 为原始图像, 图 2 (b) 为有噪待修补图像, 图 2 (c) 为用全变分方法修补迭代 5000 次后的图像, 图 2 (d) 为用结合加权全变分与小波的图像修补模型迭代 5000 次的图像。可以清楚的发现, 用本文的方法更好的保持图像边缘, 在脸部、鼻梁等处的边缘较为清晰, 且去噪效果良好。另外, 我们从实验数值上对两种修补方法进行简单的比对, 如表 1 所示。可以看出, 用改进后的模型 MSE 更小, PSNR 更大, 更接近原始图像。这里, 均方误差 MSE 与峰值信噪比 PSNR 分别定义为 $MSE = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (f_{ij} - f'_{ij})^2 / N^2$, $PSNR = 10 \times \log(255^2 / MSE)$ 。

其中 f_{ij} 代表原始图像, f'_{ij} 代表处理过的图像, N 代表图像的高。

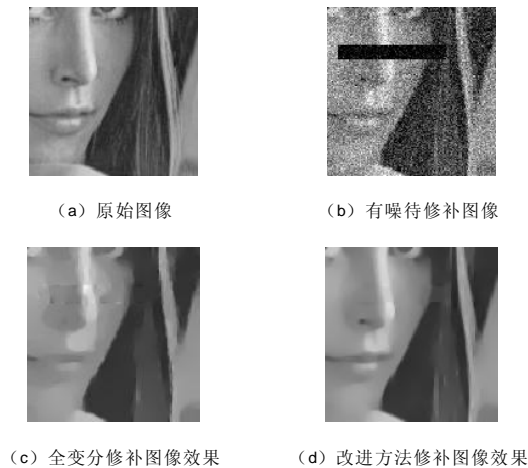


图 2 有噪图像修补
Fig. 2 Inpainting results of noisy image

表 1 比较两种方法修补结果
Tab.1 Comparison of two inpainting methods

	全变分修 补模型	改进后修 补模型
MSE	106.1724	50.6488
PSNR	27.8707	31.085

4 结论

文章综合利用了小波函数与全变分的优点, 对有噪图像进行修补。能量函数采用加权全变分形式, 减少 Gibbs 现象, 且更具有适应性, 约束中将 D 的范围缩小, 可以更好的保持纹理。从实验结果可以看出, 用本文方法对有噪图像修补后效果更好。

[参考文献] (References)

- [1] CHAN T, SHEN J. Mathematical models for local non-texture inpaintings[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2001, 62(3): 1019~1043.
- [2] F. MALGOUYRES. Minimizing the total variation under a general convex constraint for image restoration[J]. IEEE Trans. Image Process, 2002, 11 (12): 1450~1456.
- [3] F. MALGOUYRES. Mathematical analysis of a model which combines total variation and wavelet for image restoration[J]. J. Inform. Process. , 2002, 2(1): 1~10.
- [4] STRONG, DAVID M. , BLOMGREN, et al. Spatially adaptive local feature~driven total variation minimizing image restoration. Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 1997, 3167, 223~233.
- [5] STRONG, D. M. , CHAN, T. F. Relation of regularization parameter and scale in total variation based image denoising[J]. CAM Report 96-7, Dept. of Mathematics, Univ. of California, Los Angeles, CA 90024, U. S. A. , 1996.
- [6] L. C. EVANS, R. F. GARIEPY. Measure Theory and Fine Properties of Functions Studies in Advanced Mathematics[M]. CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [7] GUILLAUME CARLIERA, MYRIAM COMTE. On a weighted total variation minimization problem[J]. Journal of Functional Analysis, 2007, 250(1), 214~226.
- [8] A. MARQUINA, S. OSHER. Explicit algorithms for a new time dependent model based on level set motion for nonlinear deblurring and noise removal[J]. SIAM J. Sci. Comput., 2000, 22(2), 387~405