

高阶全变差图像复原模型的 FP-ADI 耦合数值算法

张奕

(华北电力大学数理学院, 北京 102206)

摘要: 本文提出了一种新的结合固定点迭代法 (lagged diffusivity fixed point iterative, FP) 和交替方向法 (alternating directional iterative, ADI) 的基于高阶全变差模型的图像复原算法. 高阶 TV 模型对应的四阶欧拉-拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程下的 FP-ADI 耦合算法是有效而且稳定的: 首先, 该算法利用 FP 法线性化四阶非线性 Euler-Lagrange 方程; 其次, 对该方程构造了 ADI 差分格式; 最后, 给出固定点迭代-交替方向 (FP-ADI) 差分格式的耦合数值算法. 实验分析表明, 本文的 FP-ADI 耦合算法能够有效地消除 TV 方法产生的“阶越效应”和“纹理损失效应”, 并显示了良好的计算效率.

关键词: 图像复原; 高阶 TV 模型; 四阶 PDE; FP-ADI 耦合算法; 计算效率

中图分类号: TP391

Fast ADI scheme based on High order TV model for image restoration

Zhang Yi

(Dept. of the mathematics and physics, North China Electric Power University, Beijing 102206)

Abstract: This paper presents a novel image restoration algorithm coupling the lagged diffusivity fixed point method (FP) and alternating directional iterative (ADI) method. The FP-ADI coupled numerical algorithm based on the fourth order elliptic Euler-Lagrange partial differential equations (PDEs), the reduction of higher order total variation (TV) model, is efficient and stable. First of all, the fourth order nonlinear PDEs are linearized by the FP method. Secondly, the ADI scheme is adopted in spatial lattice. Then, the FP-ADI coupled algorithm is given. Our experiments show that the Staircase effect and the effect of loss of textures generated by the traditional TV model are substantially reduced, as well as a fair computing efficiency is demonstrated.

Keywords: image restoration; higher order TV model; fourth order PDE; FP-ADI coupled algorithms; computing efficiency

0 引言

基于全变差方法的图像去噪技术在近年来得到广泛的应用. 一个主要的原因是: 在医学领域, 尽管扫描技术在空间解、速度和峰值信噪比等方面取得了巨大的发展, 但是医学图像在扫描的过程中不可避免会受到高斯白噪声的干扰. 经典的图像去噪算法是基于最小二乘的, 它的主要缺点是会产生 GIBBS 现象^[1,3], 并不能很好地保留图像边缘的信息. 最早克服这个缺点的方法之一是 ROF 方法 (又称 TV 方法, 下同)^[1]. TV 方法对含有 TV 范数的函数求最小值, 是一个非约束性的最小化变分问题. 利用 TV 范数的革命性是允许图像的不连续, 同时避免了震荡现象. TV 方法的最主要缺点分别是“阶越”效应和“纹理损失效应”. 高阶的 TV 模型, 可以同时克服这两个缺点^[3], 它在原有的 TV 模型上添加了一个椭圆算子, 使得 TV 函数在保留真实的边缘的同时去除了伪边缘, 防止了非边缘区域的“阶越效应”的发生.

不论是 TV 模型还是高阶的 TV 模型, 都需要在一个多维的区域求最优解 (即需要求解一

基金项目: 国家自然科学基金(No.10771065)

作者简介: 张奕, (1986-), 男, 研究生, 主要研究方向为偏微分方程在图形信号处理中的应用. E-mail: rainskater@163.com

个大型的稀疏矩阵), 其所需的 CPU 时间和存储量都是十分大的. 早期设计快速求解 TV 模型的算法有固定点迭代法(FP)^[9]和耦合方法^[10], 其解决计算量的实际效果是显著的.

结合 FP 方法和交替步长 (ADI) 方法, 本文提出了一种新的求解高阶 TV 模型的算法. 高阶 TV 模型实际上是一个最小化变分泛函问题, 为了求解模型, 可以将泛函问题转化为偏微分方程 (partial differential equation, PDE) 问题求解. 推演出的 PDE 称为欧拉-拉格朗日 (Euler-Lagrange) 方程, 如果结合其约束条件, 则是一个四阶椭圆型的 Neumann 初边值问题^[4]. 本文构造二维图像的高阶 TV 模型的交替方向迭代 (alternating directional iterative, ADI) 差分格式, 给出了 FP-ADI 差分格式的耦合数值算法. FP-ADI 耦合算法含有五个变参数, 本文分别给出这些参数选择的方法. 实验表明, 该 FP-ADI 耦合数值方法比直接在多维区域中求解 Euler-Lagrange 方程具有更快的计算速度, 并且有效地防止“阶越”效应和“纹理损失效应”的发生.

1 一维高阶 TV 模型

为了在非边缘平坦区域处去除“阶越”效应, 可以在传统的 TV 模型:

$$\inf_u \int_{\Omega} (|u_x| + \lambda(u - u^0)^2) \quad (1)$$

中含引入椭圆算子 $L(u) = \Delta$ 的实函数 $\Delta L(u) / |u_x|_r^3$, 于是 (1) 成为:

$$\inf_u \int_{\Omega} (\alpha |u_x|_{\beta} + \mu \frac{L(u)}{|u|_{\gamma}^3} + (u - u^0)^2) \quad (2)$$

(2) 是一个无约束的最小化变分问题. 其中 α 和 μ 是变参数; $|u_x|_{\beta} = \sqrt{u_x^2 + \beta}$ 是 TV 范数; β 和 γ 是正则化参数, 一般取 10^{-3} 就可以避免出现计算的不稳定. 函数 $1/|u|_{\gamma}^3$ 的作用是在边缘处 ($|u|_r \rightarrow \infty$) 使得模型 (2) 退化为:

$$\inf_u \int_{\Omega} (\alpha |u_x|_{\beta}) \quad (3)$$

即在边缘处模型表现为一个传统的 TV 模型, 可以达到防止 GIBBS 现象的去噪效果, 而在非边缘区域则表现为一个高阶模型, 达到消除“阶越”的目的.

容易知, (2) 对应的 Euler-Lagrange 方程为[3]:

$$(k_2 u_{xx})_{xx} - k_1^* u_{xx} + u - u^0 = 0 \quad (4)$$

其中

$$k_1 = \frac{\alpha}{|u_x|_{\beta}} - 3\mu \frac{(u_{xx})^2}{(u_x)_{\gamma}^5} \quad (5)$$

$$k_2 = \frac{2\mu}{|u_x|_{\gamma}^3} \quad (6)$$

$\alpha, \mu > 0$ 和自然边界条件:

$$u_x = u_{xxx} = 0, x = 0, 1 \quad (7)$$

将 (2) 推广, 可以得到 2 维的高阶 TV 模型:

$$\inf_u \int_{\Omega} (\alpha |\nabla u|_{\beta} + \mu \frac{\Delta u^2}{|u|_{\gamma}^3} + (u - u^0)^2) \quad (8)$$

为了方便讨论和数值计算,将其化简为一个四阶的 Euler-Lagrange 方程^[3]:

$$\begin{cases} \Delta(k_2 \Delta u) - \nabla(k_1^* \nabla u) + u - u^0 = 0 \\ k_1^* = \alpha / |\nabla u|_{\gamma} \\ k_2 = 2\mu / |\nabla u|_{\gamma}^3 \\ \partial_n u = 0 \\ \partial_n(k_2 \Delta u) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

这是一个 Neumann 问题.

2 四阶 Euler-Lagrange 方程的弱极值原理

Neumann 问题 (9) 可以归结为一个椭圆型的边值问题:

$$\begin{cases} \Delta(k_2(x) \Delta u) = f(x, u, \Delta u) \\ \alpha_1(x) \partial_n u + \beta_1(x) u = 0 \\ \alpha_2(x) \partial_n(a \Delta u) + \beta_2(x)(a \Delta u) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中 $f(x, u, \Delta u) = \nabla(k_1^*(u) \nabla u) - u + u^0$, $(\alpha_1(x), \beta_1(x)) = (\alpha_2(x), \beta_2(x)) = (1, 0)$, 对于 Neumann 问题 (9), 目前还没有严格意义上的极值原理证明, 下面给出 (9) 的弱的极值原理:

定义 1 函数 \hat{u} 和 $\bar{u} \in C^4(\Omega) \cap C^{2+\alpha}(\Omega)$ 称为 (11) 式的上下解, 如果 $\hat{u} \geq \bar{u}$ 和 $\Delta \hat{u} \leq \Delta \bar{u}$ 并满足:

$$\Delta(k_2(x) \Delta \hat{u}) \geq f(x, u, \Delta \hat{u}) \text{ 和 } \Delta(k_2(x) \Delta \bar{u}) \leq f(x, u, \Delta \bar{u})$$

引理 1 Neumann 问题 (9) 存在一对极值 \underline{u} 和 \bar{u} 使得 $\hat{u} \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \tilde{u}$, 且存在序列 $\{\underline{u}^{(k)}\}$ 和 $\{\bar{u}^{(k)}\}$, 使得 $\{\underline{u}^{(k)}\}$ 单调递增收敛于 \underline{u} , $\{\bar{u}^{(k)}\}$ 单调递减收敛于 \bar{u} , 如果下列条件成立:

- 1) $f(x, u, \Delta u)$ 是 holder 连续且满足 lipschitz 条件;
- 2) $f(x, u_1, \Delta u) \leq f(x, u_2, \Delta u)$, 其中 $\hat{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \tilde{u}$ 和 $\Delta \hat{u} \leq \Delta u \leq \Delta \tilde{u}$

定理 1 Neumann 问题 (9) 的弱极值原理成立.

证明: $|k_1^*(x)| = |\alpha / |\nabla u|_{\gamma}| \leq |\alpha / \sqrt{\gamma}|$, (当且仅当 $|\nabla u| = 0$ 时等号成立)

$$\begin{aligned} f(x, u_1, \Delta u_1) - f(x, u_2, \Delta u_2) &= |k_1^*(x) \Delta u_1 - u_1 + u^0 - k_1^*(x) \Delta u_2 + u_2 - u^0| \\ &\leq |k_1^*| (|\Delta u_1 - \Delta u_2| + |u_1 - u_2|) \\ &\leq |\alpha / \sqrt{\gamma}| (|\Delta u_1 - \Delta u_2| + |u_1 - u_2|) \end{aligned} \quad (11)$$

由 (12) \Rightarrow 条件 1) 成立;

令 $\hat{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \tilde{u}$ 和 $\Delta \hat{u} \leq \Delta u \leq \Delta \tilde{u}$,

$$f(x, u_1, \Delta u) - f(x, u_2, \Delta u) = k_1^*(\Delta u - \Delta u) + (u_2 - u_1) \geq 0 \quad (12)$$

由 (13) \Rightarrow 条件 2) 成立; 证毕.

注:Neumann 问题 (9) 并不能满足强的极值原理,如果要获得强极值原理,需要修改边界条件,使得 $(\alpha_1(x), \beta_1(x)) = (\alpha_2(x), \beta_2(x)) = (1, \varepsilon)$, 这里取 $\varepsilon > 0$ 足够小,使反射边界条件受到影响较小.

3 四阶 Euler-Lagrange 方程的 ADI 算法

3.1 一维 Euler-Lagrange 方程的 FP 差分格式

熟知求解 (4) 的方法是最速牛顿下降法,冻结系数 k_1^* 和 k_2 ,求解线性化的四阶抛物型方程

$$u_t = (k_2 u_{xx})_{xx} - (k_1^* u_x)_x + u - u_0 \quad (13)$$

由于 (8) 的 CFL 条件为 $\Delta t < C(\Delta x)^4$, 因此每一次迭代时允许的步长是很小的,这会导其收敛的速度非常慢.为放松 CFL 条件,可以比照求解扩散方程的方法建立有效的差分格式,如 AOS 方法等.

本文提出一种时滞固定点迭代的方法,考察四阶 Euler-Lagrange 方程:

$$(k_2 u_{xx})_{xx} - (k_1^* u_x)_x + u - u_0 = 0 \quad (14)$$

在一维方向做离散,在区域 $\Omega \in [0, a]$ 内记 $h = a / (N + 1)$, $u_i^n = u(ih, n\Delta t)$;

椭圆差分算子
$$L_h u = \delta_x^2 u = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2};$$

四阶椭圆算子
$$L_h \cdot (L_h u^n) = \delta_x^2 (\delta_x^2 u) = \frac{u_{i-2}^n - 4u_{i-1}^n + 6u_i^n - 4u_{i+1}^n + u_{i+2}^n}{h^4};$$

$$k_1^*(i) = k_1^*(u(ih, n\Delta t)), k_2(i) = k_2(u(ih, n\Delta t)), (1 \leq i \leq N);$$

由于 $\partial_n u = 0$, 对边界点做镜面反射,使得 $u_{-1}^n = u_1^n, u_0^n = u_2^n, u_{N+1}^n = u_{N-1}^n, u_{N+2}^n = u_N^n$.

引理 2 若线性方程组 $Au = f$ 中的系数矩阵 $A \in (a_{ij}) \in C^{m \times n}$ 是严格对角占优的,则 A 非奇异,并且 A 为正定矩阵.

定理 2 四阶 Euler-Lagrange 方程的差分格式 (11)、(12) 的第 $n+1$ 步迭代解 $u^{n+1} \geq 0$

的充分条件为参数
$$\mu < \frac{(\min(|\nabla u|_\gamma))^3}{8}.$$

证明:椭圆算子展开的系数矩阵分别为:

$$A = \begin{pmatrix} k_2 & -4k_2 - k_1^* & 6k_2 - 2k_1^* + 1 & -4k_2 - k_1^* & k_2 & & & & \\ & k_2 & -4k_2 - k_1^* & 6k_2 - 2k_1^* + 1 & -4k_2 - k_1^* & k_2 & & & \\ & & \dots & & & & & & \\ & & & k_2 & -4k_2 - k_1^* & 6k_2 - 2k_1^* + 1 & -4k_2 - k_1^* & k_2 & \\ & & & & k_2 & -4k_2 - k_1^* & 6k_2 - 2k_1^* + 1 & -4k_2 - k_1^* & k_2 \end{pmatrix}$$

$$\mu < \frac{(\max(|\nabla u|_\gamma))^3}{2} \Rightarrow |\nabla u|_\gamma > 2\mu^{1/3} \Rightarrow |\nabla u|_\gamma^3 > 8\mu \Rightarrow k_2 < \frac{1}{4} \quad (15)$$

从而

$$|6k_2| + |2k_1^*| + 1 > |2k_2| + 2|4k_2 + k_1^*| \quad (16)$$

$$|6k_2 + 2k_1^* + 1| > |2k_2| + 2|-4k_2 + k_1^*| \quad (17)$$

(17) 知矩阵 A 是严格对角占优的.
因此由引理 1 知 A 是非奇异且正定的.

(18) 展开的线性代数方程组:

$$A_2 v^{n+1} = u^0, u = (u_0, \dots, u_i, \dots, u_N, u_{N+1})^T, u^0 = (f_0, \dots, f_i, \dots, f_{N+1})^T \quad (18)$$

A_2 非奇异且正定 $\Rightarrow v^{n+1} \geq 0$

(17) 展开的线性方程组

$$A_1 u^{n+1} = v^{n+1} \quad (19)$$

A_1 非奇异且正定 $\Rightarrow u^{n+1} \geq 0$, 证毕.

3.2 二维的四阶 Euler-Lagrange 方程的 FP-ADI 耦合格式

考察二维的四阶 Euler-Lagrange 方程:

$$\Delta(k_2(u)\Delta u) - \nabla \cdot (k_1^*(u)\nabla u) + u - u^0 = 0 \quad (20)$$

在区域 $\Omega \in [0, a] \times [0, b]$ 内作正方形网格剖分 (类似于 一维剖分, 不作赘述). 记离散化椭圆算子:

$$L_1 u^n = \delta_x^2 u^n = \frac{u_{i-1}^n - 2u_{ij}^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad L_2 u^n = \delta_y^2 u^n = \frac{u_{ij-1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij+1}^n}{h^2}$$

以及四阶椭圆算子:

$$L_1^2(u^n) = L_1 \cdot (L_1 u^n) = \delta_x^2(\delta_x^2 u^n) = \frac{u_{i-2}^n - 4u_{i-1}^n + 6u_{ij}^n - 4u_{i+1}^n + u_{i+2}^n}{h^4}$$

$$L_2^2(u^n) = L_2 \cdot (L_2 u^n) = \delta_y^2(\delta_y^2 u^n) = \frac{u_{ij-2}^n - 4u_{ij-1}^n + 6u_{ij}^n - 4u_{ij+1}^n + u_{ij+2}^n}{h^4}$$

对于第 $n+1$ 步的差分格式求解, 首先将已知的耗散系数简记 $k_1^*(u^n) = k_1^*$ 和 $k_2(u^n) = k_2$ 采用交替步差分格式 (ADI 迭代格式):

$$\begin{cases} u^{n+1/2} = u^n - \tau_n((k_2 L_1^2 - k_1^* L_1 + 1/2)u^n + (k_2 L_2^2 - k_1^* L_2 + 1/2)u^n - u^0) \\ u^{n+1} = u^{n+1/2} - \tau_n((k_2 L_1^2 - k_1^* L_1 + 1/2)u^{n+1/2} + (k_2 L_2^2 - k_1^* L_2 + 1/2)u^{n+1/2} - u^0) \end{cases} \quad (21)$$

(21) 化简为:

$$\begin{cases} (1 + \tau_n(k_2 L_1^2 - k_1^* L_1 + 1/2))u^{n+1/2} = (1 - \tau_n(k_2 L_2^2 - k_1^* L_2 + 1/2))u^n + \tau u^0 \\ (1 + \tau_n(k_2 L_2^2 - k_1^* L_2 + 1/2))u^{n+1} = (1 - \tau_n(k_2 L_1^2 - k_1^* L_1 + 1/2))u^{n+1/2} + \tau u^0 \end{cases} \quad (22)$$

其中 E 表示单位算子, τ 为选定的迭代参数. 要求解 u^{n+1} , 首先固定 $j = 1, 2, \dots, M-1$, 求解 (16) 式的第一式.

类似于 1 维格式, 易证得所展开的矩阵 A 在下都是非奇异且正定的, 可以解出 $u^{n+1/2}$; 固定 $i = 1, 2, \dots, N-1$, 求解 (16) 式的第二式, 同理可以解出 u^{n+1} .

定理 3 四阶 Euler-lagrange 方程的 ADI 差分格式 (16) 收敛到解 u_h^* 的充分条件为:

$$\mu < \frac{(\min(|\nabla u|_\gamma))^3}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tau}\right)$$

证明:由定理 1 得知 (16) 有解的充分条件为 $\mu < \frac{(\min(|\nabla u|_\gamma))^3}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tau}\right)$. 为证明 (16)

的收敛性,先记 $e^n = u_h^* - u^n$ 为第 n 次迭代的误差向量,由 (16) 式知:

$$\begin{cases} Ge^{n+1/2} = H'e^n + \tau u^0 \\ G'e^{n+1} = He^{n+1/2} + \tau u^0 \end{cases} \quad (23)$$

$$G = (L_1 - \lambda_1)(L_1 - \lambda_2), G' = (L_2 - \lambda_1')(L_2 - \lambda_2')$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau_n k_1^* \pm \sqrt{(\tau_n k_1^*)^2 - 4\tau_n k_2 (\frac{\tau_n}{2} + 1)}}{2\tau_n k_2} > 0$$

$$H = (L_1 - \lambda_1')(L_1 - \lambda_2'), H' = (L_2 - \lambda_1')(L_2 - \lambda_2'), \lambda_{1,2}' = \frac{-\tau_n k_1^* \pm \sqrt{(\tau_n k_1^*)^2 + 4\tau_n k_2 (-\frac{\tau_n}{2} + 1)}}{-2\tau_n k_2} > 0$$

消去 $e^{n+1/2}$, 则

$$e^{n+1} = (G')^{-1} \cdot H \cdot G^{-1} \cdot H' e^n \quad (24)$$

记迭代矩阵为

$$T_n = (G')^{-1} \cdot H \cdot G^{-1} \cdot H' \quad (25)$$

$$e^{n+1} = T_{n+1} T_n \dots T_0 e^0 = \prod_{i=0}^n T_i e^0 \quad (26)$$

由 G 、 G' 、 H 、 H' 展开的矩阵的特征值对应分别为:

$$\begin{cases} \theta_1 = (2 - \lambda_1 + 2 \cos \frac{2p\pi}{P+1})(2 - \lambda_2 + 2 \cos \frac{2p\pi}{P+1}) \\ \theta_2 = (2 - \lambda_1 + 2 \cos \frac{2q\pi}{Q+1})(2 - \lambda_2 + 2 \cos \frac{2q\pi}{Q+1}) \\ \theta_3 = (2 - \lambda_1' + 2 \cos \frac{2p\pi}{P+1})(2 - \lambda_2' + 2 \cos \frac{2p\pi}{P+1}) \\ \theta_4 = (2 - \lambda_1' + 2 \cos \frac{2q\pi}{Q+1})(2 - \lambda_2' + 2 \cos \frac{2q\pi}{Q+1}) \end{cases} \quad (27)$$

从而 T_n 的特征值

$$\theta = \frac{\theta_3 \theta_4}{\theta_1 \theta_2} \quad (28)$$

设特征向量为 $\{v^{(p,q)}\}$, 使得

$$e^0 = \sum_{p,q=1}^{Q-1} a_{p,q} v^{(p,q)} \quad (29)$$

由 (28) 和 (31) 得

$$e^{n+1} = \sum_{p,q=1}^{Q-1} a_{p,q} \left(\prod_{j=0}^n \theta^j \right) v^{(p,q)} \quad (30)$$

注意到 $\{v^{(p,q)}\}$ 的正交性, (32) 可得

$$\|e^{n+1}\|_0^2 = \sum_{p,q=1}^{Q-1} (a_{p,q}) \left(\prod_{j=0}^n \theta^j \right)^2 \|v^{(p,q)}\|_0^2 \leq \max \left(\prod_{j=0}^n \theta^j \right)^2 \|e^{(p,q)}\|_0^2 \quad (31)$$

由此可知, $e^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 的充分必要条件是

$$|\theta^{(n)}| \leq q = \text{const.} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\theta_3 \theta_4}{\theta_1 \theta_2} < 1 \quad (32)$$

$$\frac{\theta_3 \theta_4}{\theta_1 \theta_2} < 1 \Leftrightarrow \theta_1 > \theta_3, \theta_2 > \theta_4 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 > \lambda_1' \lambda_2' \Leftrightarrow 4\tau_n k_1 \left(\frac{\tau_n}{2} + 1 \right) > 4\tau_n k_1 \left(\frac{\tau_n}{2} - 1 \right) \quad (33)$$

由 (33), $\frac{\tau_n}{2} + 1 > \frac{\tau_n}{2} - 1$ 显然成立, 因此格式 (16) 在解 $\mu < \frac{(\min(|\nabla u|_\gamma))^3}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tau} \right)$ 有解, 且迭代解收敛.

3.3 高阶 TV 模型的 FP-ADI 图像复原算法

高阶 TV 模型的图像复原等价于求解二维的四阶 Euler-Lagrange 方程, 本文总结如下算法:

- 1) 置 $N = 0$;
- 2) 计算 $|\nabla u|_\gamma = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \gamma}$ 、取选择适当的参数 $\alpha > 0$ 和 $\mu > 0$, 使 $\alpha / 2\mu \rightarrow 0$;
- 3) 计算 $k_2(u^N)$, $k_1^*(u^N)$;
- 4) 取 $\tau_n > 0$;
- 5) 求解 $(1 + \tau_n(k_2 L_1^2 - k_1^* L_1 + 1/2))u^{N+1/2} = (1 - \tau_n(k_2 L_2^2 - k_1^* L_2 + 1/2))u^N + \tau u^0$, 得到 $u^{n+1/2}$
- 6) 求解 $(1 + \tau_n(k_2 L_2^2 - k_1^* L_2 + 1/2))u^{N+1} = (1 - \tau_n(k_2 L_1^2 - k_1^* L_1 + 1/2))u^{N+1/2} + \tau u^0$, 得到 u^{n+1}
- 7) 若 $|u^{N+1} - u^N| < \varepsilon$, 停止迭代; 若否, 置 $N = N + 1$, 转 1)

该算法用于求解二维的四阶 Euler-Lagrange 方程, 为了获取更快的收敛速度, 可以在迭代参数 $0 < \tau_n < 1$ 上做出适当的限制, 但会增加计算的复杂度. 此算法的优点在于利用在不同方向求解代数方程组, 避免了构造九点 (或更多) 格式的带状大型稀疏矩阵^[4], 只需要在分两步分别构造一个五对角矩阵, 最后求解一个维数较低的五对角矩阵.

4 仿真结果及分析

实验采用标准的 MATLAB 环境, 计算机配置为 Intel Core Duo T5870 的 CPU 以及 2.00GB 的内存. 为了方便和已有文献方法做比较, 实验选用 MATLAB 图像库里的标准图像

“lena.bmp”,对其加入高斯模糊算子和随机噪声,实验分别采用传统 TV 方法和本文提出的 FP-ADI 耦合方法对图像进行复原.TV 方法选取时间步长 $\Delta t = 0.01$,尺度参数 $\lambda = 0.2$; 本文方法分别选取正则化参数 $\gamma = 255^2$, $\beta = 255^2 \times 10^{-5}$, $\mu_0 = 17$, $\alpha = 10^{-5} \sim 10^{-7}$ 和迭代参数 $\tau_n = 0.1$,如图 4.1 所示.

从图 4.1 (2) 可以看出,经过 600 次迭代之后,传统 TV 方法在图中非轮廓区域出现了分层片状的而且这种现象随着次数的增加越来越严重;对比 4.1 (3) 可以说明,本文方法只需要经过 4 次迭代,就能将图像很好的平滑复原.



图 4.1 (1)待复原的模糊噪声图像 (2) TV 方法迭代 600 次复原后的图像 (3) FP-ADI 方法迭代 4 次复原后的图像

为了说明本文方法消除“阶越效应”的效果,给出两种方法的局部效果图像(图 4.2),从图 4.2 (左)和图 4.2 (右)可以对两种方法有一个直观的认识:图 4.2 (左)的帽子处的轮廓较 4.2 (右)的轮廓不规则,而且局部地方反映不出真实的边缘.通过上述分析可知,本文的 FD-ADI 耦合方法,不仅使得图像较好地消除噪声和模糊效果,并且能够保存图像的“真实轮廓”以及去除图像“伪轮廓”.



图 4.2 (左): TV 方法的局部放大图及其对应的图像边缘; (右):FP-ADI 耦合方法的局部放大图及对应的图像边缘

为了进一步说明本文方法对防止“纹理损失效应”的效果,给出 TV 方法和 FD-ADI 耦合方法在图像复原后对其特征抽取的局部图(图 4.3).考察图 4.3 (左)和图 4.3 (右),可以对两种方法有进一步的认识:图 4.3 (左)的图像细节(或者称为纹理)较图像 4.3 (右)的细节更为粗糙,有较多的不规则特征.通过本文方法,不仅能够很好地保留图像的真实边缘,而且能够保留图像的特征细节,防止了传统 TV 方法出现的特征损失.



图 4.3 (左):TV 方法的局部放大图及其对应的图像细节; (右):FP-ADI 方法的局部放大图及其对应的图像细节

表 4.1 给出了传统 TV 方法和本文方法 (FP-ADI)根据几种重要的图像处理评价指标做出的对比和分析.从下表可以看出,本文在仅迭代 4 步之后就超过了传统 TV 方法迭代 600 步的复原效果,尽管在每一步所需的算法复杂度 (计算时间) 要比传统的 TV 方法高,但是该方法通过较少次数的迭代就能实现理想的图像处理效果.

表 4.1 传统 TV 方法和本文 FP-ADI 耦合方法的指标评价比较

方法	迭代次数	CPU 时间	图像效果	SNR (DB)	PSNR(DB)
传统 TV 方法	200	12	模糊,分片效应	22.2437	28.3249
	400	24	较清晰,分片效应	21.7301	27.8082
	600	36	清晰,分片效应严重	21.5585	27.6391
本文方法	1	3	较模糊,无分片效应	23.3622	28.9579
	2	6	较清晰,无分片效应	23.0572	28.5089
	4	11	清晰,无分片效应	22.8046	28.1209

5 结论

为了防止在用 TV 泛函模型对退化图像进行复原的时候所产生的“分片效应”和“纹理损失效应”,本文给出了一种新的求解高阶 TV 模型的 Euler-Lagrange 方程的 FP-ADI 耦合数值算法.在二维的图像复原模型中,采用带有迭代参数的 ADI 差分格式所建立的 FP-ADI 耦合数值算法是有效且稳定的:只需要将两个试探性的参数选在合适的范围之内,Euler-Lagrange 方程的解是收敛的;方程采用了 FP 迭代法,所以可以通过求解一个简单的线性的五对角矩阵来得到精确解 u^* ;又因为方程采用 ADI 方法,避免了求解一个九点格式的带状大型稀疏矩阵.

实验分析表明,FP-ADI 耦合方法只花费 TV 方法的 $1/3 \sim 1/4$ 的时间,经过了较少次数的迭代 (2~4 步),就消除“分片效应”和“纹理损失效应”.该方法复原的图像具有较高的质量指标,是一种理想的图像复原处理方法.

[参考文献] (References)

- [1] L.I.Rudin, S.Osher, E.Fatemi, Nonlinear total variational based noise removal algorithm[J],Physica D, ,1992. 60:258~268.
- [2] 冯象初,王卫初.图像处理的变分和偏微分方法[M].北京:科学出版社,2009
- [3] T.Chan, M.Marquina, and P.Mulet. high-order Total Variational-based image restoration[J],SIAM J.SCI.Comput,2000,22,503~516.
- [4] C.V.Pao. On Fourth-order Elliptic Boundary Value Problems. Proceeding of the American Mathematical Society[J],1999,128(4):1023~1030.
- [5] 张文生.科学计算中的偏微分方程有限差分方法[M],北京:高等教育出版社,2006.
- [6] T.F.Chan, F.Esedoglu S, Park F, et al.Recent developments in total variational image restoration. ftp://ftp.math.ucla.edu/pub/camreport/cam05-01.pdf,2004.
- [7] T.F.Chan and P.Mulet, On the convergence of the lagged diffusivity fixed point method in image restoration[J],SIAM J.Numer.Anal,1999,36:354~367.
- [8] M.Lysaker, A.Lundervold, and X C.Tai, Noise Removal Using Fourth-order Partial Differential Equation

- with Application to Medical Magnetic Resonance Images in Spaces and Times[J]. IEEE transactions on image processig,2003,12(12):1579~1590.
- [9] C. Vogel and M. Oman. Iteration Methods for Total Variation Denoising[J]. SIAM J. Sci. Comp., 1996,17:227~238.
- [10] T.F.Chan, G.Golub,and Pulet. A nonlinear Primal-Dual Method for Total Variational-based image restoration.SIAM J.SCI.Comp,1999,20:1964~1977.
- [11] J.Weichert, B.M.ter Haar Romeny, M.A.Viergever. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. IEEE Transactions on image Processing.1998, 7(3):398~410.