基于年龄分组和种群增长模型的种群稳定收获模型

汪涛，汤进
（安徽大学计算机学院，合肥 230601）

摘要：由于单种群饲养收获模型中未考虑到种群的年龄结构，即不同年龄结构的物种的繁殖率和死亡率都有明显的不同，因此，有必要研究基于按年龄分组的合理的种群分配方案。本文就是在这样的背景下，提出了两种种群稳定收获模型的解法，并且对相应的模型进行了求解和检验。

关键词：稳定收获；种群增长；年龄分组；数学模型
中图分类号：O174.42

Population steady harvest model based on age grouping and population increasing model

WANG Tao, TANG Jin
(Computer Science & Technology School,Anhui University, HeFei 230601)

Abstract: As single population harvest model doesn't consider population's age structure,different age structure's species' breed rate and dead rate have obvious difference,so it is necessary to discuss reasonable distribute project based on age structure. This paper is just under this background and then present two different population steady harvest model. At last,we solve the model and test the model.

Keywords: Steady harvest; Population increasing; Age grouping; Mathematics model

0 引言

由于在研究涉及天然牧场、畜牧场等养殖业的可持续发展的一种合理的稳定收获模型——单种群饲养收获模型中未考虑到种群的年龄结构，即不同年龄结构的动物的繁殖率和死亡率都有明显的不同，以及对不同年龄层次结构的捕捞率不同都将导致种群的捕获模型呈现出不稳定性。因此，有必要研究基于按年龄分组的合理的种群分配方案。所以，本文就是在这样的前提下，提出了两种基于年龄分组和种群增长模型的种群稳定收获模型，并对相应的模型进行了求解和检验。

1 模型假设和符号说明

1.1 模型假设

本文在综合考虑影响种群稳定收获的因素后，提出了下面三条模型假设。

1）、假设对同一年龄组的动物来说，其繁殖率、死亡率、存活率以及捕获率均相等。

2）、各时段同一年龄的收获系数不变，即 $h_i(k)$ 和 $x_i(k)$ (在捕捞之后)与 k 无关。

3）、所考虑的环境相对封闭，种群的初始分布已知。

基金项目：国家自然科学基金(61073116). 安徽高校省级重点自然科学研究项目（KJ2010A009 & KJ2010A006）
通信联系人：汤进，（1976-），男，副教授，主要研究方向：图像处理与模式识别. E-mail: tj@ahu.edu.cn
作者简介：汪涛，（1989-），男，无职称，主要研究方向：图像处理与模式识别，视频处理与识别，数学建模，信息安全

1.2 模型符号说明

1.2.1 模型一：基于矩阵求解法的年龄分组和种群增长模型的种群稳定收获模型

时段：与年龄的离散化对应，时间离散为时段，并且时间的间隔与年龄区间的间隔相等；

n ：种群按年龄大小等间隔（比如间隔为 5 岁或 10 岁等）分组的最大分组数或称年龄组数；

$x_i(k)$：k 时段第 i 年龄组的种群数量，$k=0,1,2,\cdots$，$i=1,2,\cdots,n$；

$x_i(0)$：初始时段第 i 年龄组的种群数量；

b_i： 第 i 年龄组每个(雌性)个体在 1 个时段内的平均繁殖数（即繁殖率）；

d_i：第 i 年龄组 1 个时段内死亡数与总数之比，或称死亡率；

s_i：存活率，其等于 $1-d_i$，,其中 s_i 不全为零，否则没有一个雌性可以活过第 i 年；

$x(k)$：$x(k)=[x_1(k),x_2(k),\cdots,x_n(k)]^T$,表示 k 时段种群按年龄组的分布向量；

$h_i(k)$：对时段 k 第 i 年龄组种群的收获系数；

H ：以 h_i 为对角元素的分布向量。

1.2.2 模型二：基于微分方程求解法的年龄分组和种群增长模型的种群稳定收获模型

r_m ：种群中的最高年龄；

$p(r,t)$：种群密度函数，即对很小的 dr ，$p(r,t)$ 表示时刻 t 在年龄区间 $[r,r+dr]$ 内的种群数；

$u(r,t)$：在时刻 t 年龄为 r 的种群的死亡率；

$s(r,t)$：在时刻 t 年龄为 r 的种群的出生率；

$h(r,t)$：在时刻 t 年龄为 r 的种群的被捕获率。

2 模型的建立与求解

2.1 模型一：基于矩阵求解法的年龄分组和种群增长模型的种群稳定收获模型

2.1.1 种群增长模型

1）$k+1$ 时段第 1 年龄组种群数量是 k 时段各年龄组繁殖数量之和，也就是第 k 时段各年龄组种群的组数分别乘以其相应的繁殖率的和，即：

$$x_1(k+1)=\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot x_i(k) \tag{1}$$

2）$k+1$ 时段第 $i+1$ 年龄组的种群数量是第 k 时段第 i 年龄组存活下来的数量，也就是第 i 年龄组的种群数量乘以其对应的存活率 s_i 即可，即：

$$x_{i+1}(k+1)=s_i \cdot x_i(k) \tag{2}$$

3）根据繁殖率 b_i 与存活率 s_i 可构造 Leslie 矩阵（简称 L 矩阵），如下：

$$L=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

则 $x(k+1)=[x_1(k+1), x_2(k+1),\cdots, x_n(k+1)]^T$ ；

$$L\cdot x(k)=L\cdot[x_1(k), x_2(k),\cdots, x_n(k)]^T=\begin{bmatrix} b1 & b2 & \cdots & bn-1 & bn \\ s1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sn-1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$=[\sum_{i=1}^{n} b_i x_i(k), s_1(k)x_1(k), s_2(k)x_2(k),\cdots, s_{n-1}x_{n-1}(k)]^T \quad (4)$$

根据(1)、(2)、(4)式可知：$x(k+1)=L\cdot x(k) \qquad k=0,1,2\cdots$ （5）

所以，当矩阵 L 和年龄组的初始分布向量 $x(0)$ 已知时，便可预测任意 k 时段种群年龄组分布为：

$$x(k)=L^k\cdot x(0) \qquad k=1,2\cdots \quad (6)$$

2.1.2 种群稳定收获模型

所谓稳定收获[1,2,3,4]是指，各个时段同一年龄组的收获量不变。那么，为了达到最优稳定收获，则应满足：时段 k 第 i 年龄组的种群增长量就是这个时段的收获量，也就是满足：

$$x_i(k)-x_i(k-1)=h_i(k)\cdot x_i(k) \quad ,i=1,2,\cdots n; k=1,2,\cdots \quad (7)$$

1）由种群增长模型知：$x(k+1)=L\cdot x(k) \qquad k=0,1,2\cdots$ ，

再根据(7)式 $x_i(k)-x_i(k-1)=h(k)\cdot x(k) \quad i=1,2\cdots,n; k=1,2\cdots$

可得：$[x_1(k+1)-x_1(k), x_2(k+1)-x_2(k),\cdots, x_n(k+1)-x_n(k)]^T$

$$=[h_1(k+1)x_1(k+1), h_2(k+1)x_2(k+1),\cdots, h_n(k+1)x_n(k+1)]^T \quad k=0,1,2,\cdots \quad (8)$$

而：$[x_1(k+1)-x_1(k), x_2(k+1)-x_2(k),\cdots, x_n(k+1)-x_n(k)]^T$

$$=x(k+1)-x(k)=L\cdot x(k)-x(k), \quad k=0,1,2,\cdots \quad (9)$$

而：$[h_1(k+1)x_1(k+1), h_2(k+1)x_2(k+1),\cdots, h_n(k+1)x_n(k+1)]^T$

$$=\begin{bmatrix} h_1(k+1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2(k+1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n(k+1) \end{bmatrix}\cdot L\cdot x(k) \quad ,k=0,1,2,\cdots \quad (10)$$

由式(8)、(9)、(10)，可得：

$$L\cdot x(k)-x(k)=\begin{bmatrix} h_1(k+1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2(k+1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_n(k+1) \end{bmatrix}\cdot L\cdot x(k) \quad ,k=0,1,2,\cdots$$

$\therefore L \cdot x - x = H \cdot L \cdot x$

所以，稳定收获模型可表示为：$L \cdot x - x = H \cdot L \cdot x$ （11）

2）由以上分析知：稳定收获模型可表示为：$L \cdot x - x = H \cdot L \cdot x$ $\therefore (L - H \cdot L) \cdot x = x$；

$$\therefore \begin{bmatrix} (1-h_1)b_1 & (1-h_1)b_2 & \cdots & (1-h_1)b_{n-1} & (1-h_1)b_n \\ (1-h_2)s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1-h_n)s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot x = x \qquad (12)$$

所以，上述矩阵的特征方程为：

$$\lambda^n - (1-h_1)(b_1\lambda^{n-1} + b_2(1-h_2)s_1\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_{n-1})s_1s_2\cdots s_{n-1}s_n) = 0$$

当 $\lambda \neq 0$ 时，上述特征方程可变形为：

$$\lambda^n = (1-h_1)(b_1\lambda^{n-1} + b_2(1-h_2)s_1\lambda^{n-2} + \cdots + b_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_{n-1})s_1s_2\cdots s_{n-1}\lambda \\ + b_n(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_n)s_1s_2\cdots s_n) \qquad (13)$$

用 λ^n 除上式两边并记等式两边函数为：$q(\lambda)$,则：

$$q(\lambda) = (1-h_1)(\frac{b_1}{\lambda} + \frac{b_2(1-h_2)s_1}{\lambda^2} + \frac{b_3(1-h_2)(1-h_3)}{\lambda^3} + \cdots + \frac{b_n(1-h_2)(1-h_3)\ldots(1-h_{n-1})(1-h_n)s_1s_2\ldots s_{n-1}s_n}{\lambda^n}) \\ = 1 \qquad (14)$$

当 $\lambda > 0$ 时，$q(\lambda)$ 是单调减少的，并且 $\lambda \to 0^+$时，$q(\lambda) \to \infty$，而 $\lambda \to +\infty$ 时，$q(\lambda) \to 0$，即上述矩阵有唯一的正特征根并且为单根，很明显，其特征根为 $\lambda = 1$；

$$\therefore (1-h_1)[b_1 + b_2s_1(1-h_2) + \cdots + b_ns_1s_2\cdots s_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_n)] = 1$$

由于 $\lambda = 1$，所以，可以直接由下列方程求出对应的特征向量 x^*：

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (15)$$

若令 $x_1 = 1$,则由式(15)，解得对应特征值 1 的上述矩阵的特征向量为：

$$x^* = [1, s_1(1-h_2), \cdots, s_1s_2\cdots s_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_n)]^T$$

因此，可得出稳定收获的充分必要条件是：h_i 满足：

$$(1-h_i)[b_1 + b_2s_1(1-h_2) + \cdots + b_ns_1s_2\cdots s_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_n)] = 1 \qquad (16)$$

并且，$x = cx^*$（c 是大于零的常数），其中，

$$x^* = [1, s_1(1-h_2), \cdots, s_1s_2\cdots s_{n-1}(1-h_2)(1-h_3)\cdots(1-h_n)]^T \qquad (17)$$

所以，只要知道矩阵 L 以及初始种群个年龄组中的种群数量，代入种群增长模型公式(6),便可解得各时段不同年龄层次的种群分布；然后将种群分布代入式(7)，便可得到不同时段对不同年龄层次种群的捕获率，可根据该捕获率进形捕获种群中各年龄组的种群，这样的捕获便是稳定的收获情况了！同时，还要进行稳定性分析，将所得到的捕获率以及开始时的 L 矩阵代入式(16)和(17)进行稳定收获检验，如满足公式(16)和(17)，则表明最后可以得到稳定收获情况！否则，最终得不到稳定收获的情形！

2.2 模型二：基于微分方程求解法的年龄分组和种群增长模型的种群稳定收获模型

首先，考察时刻t，年龄在$[r,r+dr)$内的种群到时刻$t+dt$的情况，他们中活着的种群将处于年龄区间为$[r+dt,r+dr+dt)$，而在dt时间内死亡的种群数为$u(r,t)p(r,t)drdt$，被捕获的种群数为$h(r,t)p(r,t)drdt$，故有：

$$p(r,t)dr-p(r+dt,t+dt)=u(r,t)p(r,t)drdt+h(r,t)p(r,t)drdt \tag{18}$$

上式(18)可近似地写作($dr=dt$)，所以，上式又可以写为：

$$\begin{aligned}&[p(r+dr,t+dt)-p(r,t+dt)]dr+[p(r,t+dt)-p(r,t)]dt\\&=-u(r,t)p(r,t)drdt-h(r,t)p(r,t)drdt\end{aligned} \tag{19}$$

由上式(19)可以得出$p(r,t)$满足的偏微分方程[4]是：

$$\partial p/\partial r+\partial p/\partial t=-u(r,t)p(r,t)-h(r,t)p(r,t) \tag{20}$$

其中，$u(r,t)$和$h(r,t)$为已知函数，这个一阶偏微分方程有两个定解条件：

①初始条件：$p(r,0)=p_0(r,0)$

②单位时间内出生的新的种群数，或叫出生率为：$p(0,t)=\int_0^{r_m}p(r,t)s(r,t)dr$

所以，种群稳定收获的偏微分方程及定解条件为：

$$\begin{cases}\partial p/\partial r+\partial p/\partial t=-u(r,t)p(r,t)-h(r,t)p(r,t),t,r>0\\ p(r,0)=p_0(r,0)\qquad p(0,t)=\int_0^{r_m}p(r,t)s(r,t)dr\end{cases} \tag{21}$$

所以，限于死亡率与时间无关（$u(r,t)=u(r)$）解得上述方程组(21)的解为：

$$p(r,t)=\begin{cases}p_0(r,t)\exp\left(-\int_{-t}^{r}(u(s)+h(s))ds\right),0\le t\le r\\ \int_0^{r_m}p(r,t-r)s(r,t-r)dr\ \exp\left(-\int_0^{r}(u(s)+h(s))ds\right),t>r\end{cases} \tag{22}$$

注：对角线$r=t$把平面 otr 分为两部分，在$t<r$区域，$p(r,t)$由初始种群密度$p_0(r-t,0)$和死亡率$u(r,t)$以及被捕获率$h(r,t)$决定；在$t>r$区域，则由未来生育状况$\int_0^{r_m}p_0(r,r-t)s(r,r-t)dr$和死亡率以及被捕获率$h(r,t)$决定。

所以，根据式(22)可以得出种群被捕获率方程应该为：

$$h(r,t)=\begin{cases}-\dfrac{p(0,t)}{p(r,t)}-u(r,t)\quad ,0\le t\le r\\ -\dfrac{\int_0^{r_m}p(r,t-r)s(r,t-r)dr}{p(r,t)}\quad ,t>r\end{cases} \tag{23}$$

所以，只要知道初始的种群的种群密度函数$p(r,t)$、死亡率$u(r,t)$、出生率$s(r,t)$，代入上式(23）便可以计算出种群的被捕获率方程。按照此方程中的曲线的值对不同年龄层次结构的种群进行捕获，将会是稳定收获的另一种求解方法了！

3 模型检验

我们在调查了天然牧场、畜牧场等养殖业的相关情况后，确定了对于某种物种不同年龄段i的种群的初始种群数量$x_i(0)$，以及相应的繁殖率b_i和死亡率d_i，其相应的数值如下表

1 所示：

表 1 初始信息表

	1	2	3	4	5
$x_i(0)$	1000	900	800	700	600
b_i	0	1.5	1	0	0
d_i	0.02	0.04	0.07	0.1	0

然后我们根据本文提出的基于矩阵求解法的按年龄分组和种群增长模型的种群稳定收获模型进行求解，得到了在不同时间段k对于不同年龄段i的物种的现有种群个数X和相应的最优捕获率H，其相应的三维点图结果如下图 1 和 2 所示，三维曲面图如图 3 和 4 所示。同时，我们根据资料，分析出了另一种种群的种群密度函数$p(r,t)$、死亡率$u(r,t)$、出生率$s(r,t)$。其相应的表达式如下：

$$p(r,t)=0.03r+0.05t;\quad u(r,t)=0.05r-0.03t;\quad s(r,t)=0.02r-0.05t \tag{24}$$

然后，我们使用基于微分方程求解法的按年龄分组和种群增长模型的种群稳定收获模型进行求解，根据公式（23），可以计算出相应的种群的被捕获率方程为如公式（25），利用该公式可以计算出捕获率。

$$h(r,t)=\begin{cases}\dfrac{-5t-0.06r^2-0.1tr+0.15t^2}{3r+5t}, & 0\le t\le r\\[2mm] \dfrac{53-23t-0.15t^2}{3r+5t}, & t>r\end{cases} \tag{25}$$

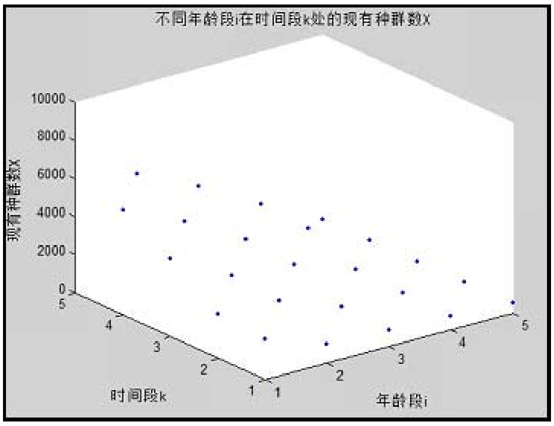

图 2 三维点图现有种群数

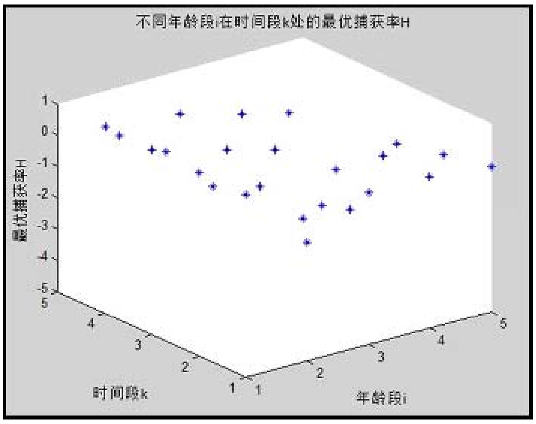

图 2 三维点图最优收获率

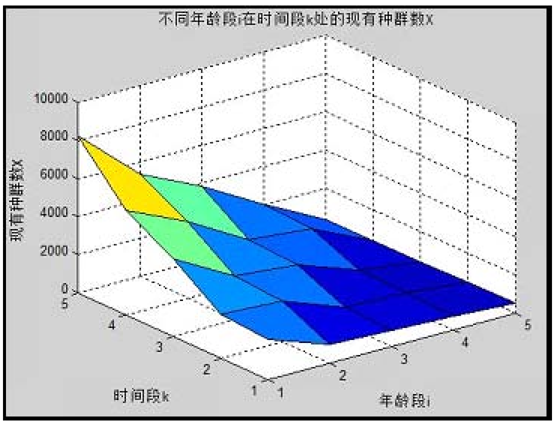

图 3 三维曲面图现有种群数

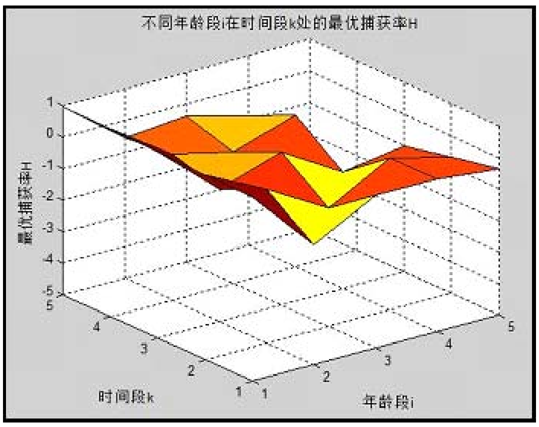

图 4 三维曲面图最优收获率

4 模型检验

本文在单种群饲养收获模型的基础上，考虑了年龄结构和种群增长模型，最终提出了两种种群稳定收获的模型，消除了由于过度捕捞年龄结构较小的种群或过度捕捞年龄结构较高的种群，从而破坏了种群的可持续发展。最后，对论文中提出的模型进行了求解和检验。实验结果表明，模型效果较好，具有一定的使用价值。

[参考文献] (References)

[1] 姜启源. 数学模型（第二版）[M].北京：高等教育出版社，1993 年.
[2] 李鸿. 基于年龄分组的单种群收获模型及稳定性分析 [J].工科数学，2001 年 12 月，17(6).
[3] 陈东彦、李冬梅、王树忠等. 数学建模 [M].北京：科学出版社，2007 年.
[4] 朱忠仁，黄运新. 一类按年龄阶段分组的种群动态模型的研究 [J].湖北大学学报，1990 年，12(3).
[5] 杨尚俊. 数学建模简明教程 [M].安徽：安徽大学出版社，2006 年 3 月