非自治时滞微分方程非负周期解的存在性

向占宏*

(湖南财经高等专科学校，长沙 410205)

摘要 利用 Leray-Schauder 不动点定理，研究了一类非自治时滞微分方程的非负周期解的存在性. 得到了一些新的结果并改进了相应的结论.

关键词 非自治微分方程; 非负周期解; Leray-Schauder 不动点

中图分类号 O175.14 **文献标识码** A

§1. 引 言 及 结 果

近几年许多学者有效地用 Krasnoselskii 锥不动点定理研究了二阶及高阶常微分方程两点边值问题正解的存在性. 文 [1] 以该不动点定理为工具研究了具有多个滞量的微分方程

$$\dot{y}(t) = -a(t)y(t) + f(t, y(t-\tau_0(t)), ...y(t-\tau_n(t))), \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) - f(t, y(t-\tau_0(t)), ...y(t-\tau_n(t))) \tag{2}$$

的正周期解的存在性，在假设

(P_1) $a(t) \in C(R, [0,\infty)), a(t+\omega) = a(t)$,

$$f(t, u_0, u_1...u_n) \in C(R \times [0,\infty)^{n+1}, [0,\infty)),$$

$$f(t+\omega, u_0, u_1...u_n) = f(t, u_0, u_1...u_n),$$

$\tau_i(t) \in C(R, [0,\infty)), \tau_i(t+\omega) = \tau_i(t), 0 \le i \le n, \omega > 0$ 是常数的情况下，得到了一些下面的定理:

定理 A 假设 (P_1) 和

(P_2)

$$\lim_{|u|\to 0} \max_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,u)}{|u|} = 0, \lim_{\substack{|u|\to\infty \\ u_j \ge \sigma|u| \\ 0\le j\le n}} \min_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,u)}{|u|} = \infty$$

或者 (P_1) 和

*作者简介：向占宏（ 1970– ），男，湖南平江人，湖南财经高等专科学校讲师，主要从事经济数学方面的教学和研究。

(P_3)

$$\lim_{\substack{|u|\to 0\\ u_j\ge\sigma|u|\\ 0\le j\le n}}\min_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,u)}{|u|}=\infty,\ \lim_{|u|\to\infty}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,u)}{|u|}=0$$

成立，则方程 (1) 和 (2) 都存在正 ω- 周期解.

其中 $\sigma=e^{-\int_0^\omega a(\xi)d\xi}, u=(u_0,u_1...u_n)\in[0,\infty)^{n+1}, |u|=\max\{u_0,u_1...u_n\}$.

本文用不同的方法，导出了保证方程 (1) 和 (2) 存在 ω- 非负周期解的充分条件，这些条件改进了定理 A 中的 $(P_2),(P_3)$ 式.

为方便起见，先叙述 Leray-Schauder 不动点定理.

令 $Y=\{y(t)|y\in C(R,R), y(t+\omega)=y(t)\}$, 定义 $\|y=\sup_{t\in[0,\omega]}\|$, 则在 $\|\cdot\|$ 下， Y 是 Banach 空间.

引理 1[2]　设 $\Phi:Y\to Y$ 全连续. 如果集 S 是有界的，则 Φ 在 S 中的闭包中必有不动点.

本文定理如下：

定理 1　假设 (P_1) 和

(P_2)

$$\lim_{|u|\to 0}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,u)}{|u|}=0,$$

或者 (P_1) 和

(P_3)

$$\lim_{|u|\to\infty}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{f(t,u)}{|u|}=0$$

成立，则方程 (1) 和 (2) 都存在非负 ω- 周期解.

§2. 定 理 的 证 明

只证明 $(P_1),(P_2)$ 的情形， $(P_1),(P_3)$ 类似可证.

记

$$G(t,s)=\frac{e^{\int_t^s a(\xi)d\xi}}{e^{\int_0^\omega a(\xi)d\xi}-1}. \tag{3}$$

因 $a(t)\ge 0$, 故令 $y(s)$ 是方程 (1) 的任一 $\omega-$ 周期解，则有

$$\dot y(s)+a(s)y(s)=f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(t-\tau_n(s))),$$

把上式的两边同时乘以 $e^{\int_t^s a(\xi)d\xi}$, 则有

$$\left\{y(s)e^{\int_t^s a(\xi)d\xi}\right\}'=e^{\int_t^s a(\xi)d\xi}f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(t-\tau_n(s))),$$

从 t 到 $t+\omega$ 积分上式得

$$y(t+\omega)e^{\int_t^{t+\omega} a(\xi)d\xi}-y(t)=\int_t^{t+\omega}\left\{e^{\int_t^s a(\xi)d\xi}f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(s-\tau_n(s)))\right\}ds,$$

进而有

$$y(t)=\int_t^{t+\omega}\left\{\frac{e^{\int_t^s a(\xi)d\xi}}{e^{\int_0^\omega a(\xi)d\xi}-1}f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(s-\tau_n(s)))\right\}ds,$$

即

$$y(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)\left\{f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(s-\tau_n(s)))\right\}ds. \tag{4}$$

故求 (1) 的 ω- 周期解等价于求积分方程

$$y(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)\left\{f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(s-\tau_n(s)))\right\}ds. \tag{5}$$

而求 (5) 的 ω- 周期解等价于定义在 Banach 空间 Y 上的算子方程

$$y=\Phi y, \tag{6}$$

其中 $\Phi:Y\to Y$ 为

$$(\Phi y)(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(s-\tau_n(s)))ds. \tag{7}$$

对 $s\in[t,t+\omega]$ 有

$$A:=G(t,t)\le G(t,s)\le G(t,t+\omega)=:B,$$

取满足 $B\omega\varepsilon<1$ 的正数 $\varepsilon>0$, 由 (P_2) 知存在 $\alpha>0$, 使得当 $|u|\le\alpha$ 时, $f(t,u)<\varepsilon|u|$. 令 $\sigma=e^{-\int_t^s a(\xi)d\xi}$, $S=\{y:y\in Y,0\le y(t)\le\alpha$ 且 $y(t)\ge\sigma\|y\|\}$. 则易证 S 是有界集. 若 $y\in S$, 显然有 $(\Phi y)(t)\ge 0$, 且 $\max_{s\in[t,t+\omega]}\{y(s-\tau_0(s)),...y(s-\tau_n(s))\}\le\alpha$, 则有

$$(\Phi y)(t)\le B\omega\varepsilon\alpha<\alpha, \tag{8}$$

且

$$\int_0^\omega f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(s-\tau_n(s)))ds\ge\frac{\|\Phi Y\|}{B}.$$

因

$$1\ge\frac{G(t,s)}{G(t,t+\omega)}\ge\frac{G(t,t)}{G(t,t+\omega)}=\frac{A}{B}=\sigma.$$

所以有

$$(\Phi y)(t)\ge A\int_0^\omega f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(t-\tau_n(s)))ds\ge\frac{A}{B}\|\Phi Y\|=\sigma\|\Phi Y\|$$

故 $\Phi S\subset S$. 下证 Φ 全连续. 记

$$b_0=\max\{f(t,y(t-\tau_0(t)),...y(t-\tau_n(t)))\in[0,\omega]\times S^{n+1}\},$$

和

$$b_1=\max\{a(t)|t\in[0,\omega]\}.$$

则有

$$\begin{aligned}(\Phi y)(t) &= \left|\int_t^{t+\omega}\{G(t,s)f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(s-\tau_n(s))\}ds\right| \\ &\leq B\int_0^{\omega} f(s,y(s-\tau_0(s)),...y(s-\tau_n(s))ds \\ &\leq Bb_0\omega.\end{aligned}$$

所以 $(\Phi y)(t)$ 中的所有函数一致有界，因为对 $\forall y\in S$, 有

$$\frac{d(\Phi y)(t)}{dt}=\frac{dy(t)}{dt}=-a(t)(\Phi y)(t)+f(t,y(t-\tau_0(t)),...y(t-\tau_n(t))), \tag{9}$$

进而有

$$\left\|\frac{d(\Phi y)(t)}{dt}\right\|\leq b_0b_1B\omega+b_0=b_0(1+b_1B\omega).$$

故 Φ 等度连续，从而 $\Phi: Y\to Y$ 是紧算子. 设 $y_k, y_0\in Y, \|y_k-y_0\|\to 0(k\to\infty)$ 且 $\upsilon_k=\Phi y_k-\Phi y_0$, 由方程 (9) 得

$$\begin{aligned}\upsilon_k' &= -a(t)(\Phi y_k)(t)+f(t,y_k(t-\tau_0(t)),...y_k(t-\tau_n(t)))+a(t)(\Phi y_0)(t) \\ &\quad -f(t,y_0(t-\tau_0(t)),...y_0(t-\tau_n(t))) \\ &= -a(t)[(\Phi y_k)(t)-(\Phi y_0)(t)]+f(t,y_k(t-\tau_0(t)),...y_k(t-\tau_n(t))) \\ &\quad -f(t,y_0(t-\tau_0(t)),...y_0(t-\tau_n(t))) \\ &= -a(t)\upsilon_k+f(t,y_k(t-\tau_0(t)),...y_k(t-\tau_n(t))) \\ &\quad -f(t,y_0(t-\tau_0(t)),...y_0(t-\tau_n(t)))\end{aligned}$$

令 $f_k^*(t)=f(t,y_k(t-\tau_0(t)),...y_k(t-\tau_n(t)))-f(t,y_0(t-\tau_0(t)),...y_0(t-\tau_n(t)))$. 由 $f(t,u_0,u_1,...,u_n))$ 在 $[0,\omega]\times S^{n+1}$ 上一致连续知，当 $\|y_k-y_0\|\to 0$ 时， $|f_k^*(t)|\to 0$, 故上式可改写成

$$\upsilon_k'=-a(t)\upsilon_k+f_k^*(t), \tag{10}$$

即 υ_k 是方程 (10) 的 ω 周期解. 由 (7) 式可得

$$|\upsilon_k|\leq\int_t^{t+\omega}\{|G(t,s)f_k^*(s)|ds\leq B\omega|f_k^*(s)|\to 0.$$

从而当 $\|y_k-y_0\|\to 0$ 时，有 $\|\Phi y_k-\Phi y_0\|\to 0$, 故 Φ 连续，从而 Φ 为全连续算子.

综上讨论得 Φ 是满足引理 1 的全连续算子，于是由引理 1 知，存在 $y\in S$ 使得 $y(t)=(\Phi y)(t)$, 即 $y(t)$ 是方程 (1) 的 ω 周期解，由 S 之定义，有 $y(t)\geq\sigma\|y\|\geq 0$, 即得 $y(t)$ 是 (1) 的非负 ω- 周期解.

参 考 文 献

[1] 蒋达清, 魏俊杰. 非自治时滞微分方程周期正解的存在性 [J]. 数学年刊，1999,20A:(6),715-720.

[2] 郭大钧，非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科技出版社， 1985.

[3] 郭大钧，孙经先等非线性常微分方程泛函方法 [M]. 济南：山东科技出版社， 1995.

the Existence of Non-negative periodic solution for a Class of Non-autonomous Differential Equations

XIANG Zhan-hong

(Hunan College of Finance and Economics, Hunan Changsha, 410205)

Abstract Using Leray-Schauder fixed point theorem,the existence of the non-negative periodic solution for a Class of non-autonomous differential equations are studied. some new results are Obtained.

Keywords Non-autonomous Differential Equations; Non-negative Periodic Solution; Leray-Schauder Fixed Point

Subject Classification O175.14