逻辑斯蒂有限增长模型的改进

郑连存 [1]，郑瑶 [2]

[1] 北京科技大学数学力学系，北京 100083

E-mail: liancunzheng@sina.com

[2] 中国人民大学经济学院， 北京 100080

E-mail: taotaot6162@sina.com

摘要： 本文将经典的逻辑斯蒂有限增长模型改进为具有幂律型增长因子的形式， 并讨论了模型所描述的有限增长特性。本文研究结果表明，幂律指数α 的值对于某特定的生物种群（如人口、酵母菌）的总数量 $p(t)$ 有着重要的影响。某特定的生物种群（如人口、酵母菌）的总数是幂律指数α 的减函数。

关键词：逻辑斯蒂方程，有限增长，微分方程

1． 引言

20 世纪末，世界人口已经达到 60 亿已上， 到 2050 年世界人口估计将达到 100 亿， 届时这些人口的六分之一将生活在发达国家。人口增长问题不仅仅是简单的人口数量问题，更重要的是人口的迅速增长会对人类的福利造成影响，对经济发展造成影响[1]。

自 18 世纪末马尔萨斯发表了著名的著作《人口原理》，人口的增长问题越来越引起人们的重视。在仅考虑出生率和死亡率两个因素情况下，设t_0时刻人口总数为 $p(t_0)$，设t时刻人口总数为 $p(t)$ 马尔萨斯有限增长模型描述为如下简单微分方程[2-7]

$$\frac{dp}{dt}=kp \tag{1}$$

的解。其中k为人口增长比例因子（k>0）. 方程（1）的解为 $p(t)=p_0e^{k(t-t_0)}$， 它预测人口数量随时间按指数增长。当人口数量不大时，马氏模型从一定程度上反映了人口增长规律， 但当人口数量较大时，马氏模型出现较大偏差。19 世纪末， 丹麦生物数学家 Pierre-Francois Verhulst 将方程（1）改写为

$$\frac{dp}{dt}=r(M-p)p\,,\quad r>0 \tag{2}$$

其中 M 假定为人口（酵母菌）的最大值。

第一作者：郑连存，男，1957 年出生，教授，博士导师
研究方向：微分方程理论及应用

方程（2）称为逻辑斯蒂有限增长模型， 其解为

$$p(t)=\frac{Mp_0}{[p_0+(M-p_0)e^{-rM(t-t_0)}]} \tag{3}$$

多年来， 逻辑斯蒂有限增长模型被认为具有相当简单生命史的生物种群模型，如有限空间的培养物中生产的酵母菌，亦可以用于经济学中关于新产品生产量的预测。

事实上，人口增长要受到多种因素的影响。仅就出生率和死亡率来讲，出生率受到婴儿死亡率，人们对于避孕的态度及措施，对于堕胎的态度及怀孕期间的健康护理等。死亡率受到卫生设施与公共卫生状况，战争、污染、原料水平、饮食习惯、心理压力和焦虑等的影响等。影响到一个地区人口增长的其他因素还有人口迁移，生存空间的限制，可用水资源及传染病等。显然，要考虑到更多因素时应该用更复杂的模型来描述。

2． 改进的逻辑斯蒂模型

一般来讲，人口增长比例因子参数应该为（$M-p$）的函数，$k=f(M-p)$. 幂律型模型广泛出现在很多自然科学研究和工程实际问题中，本文中我们将方程（1）中的比例因子参数改写为 $k=r(M-p)^{\alpha}$，($r, M,\ \alpha>0$ 为常数)，则得到如下改进的微分方程数学模型：

$$\frac{dp}{dt}=r(M-p)^{\alpha}p,\quad r>0 \tag{4}$$

当 $\alpha=1$ 时即为经典的逻辑斯蒂有限增长模型。当$\alpha>0,\alpha\neq 1$时可以用来描述一些更复杂的有限增长情况。

对于α 的某些特殊情况可以求出方程（4）的解析解，例如当 $\alpha=2$，3 时，其解析解情况可分析讨论如下：

当$\alpha=2$时，方程（4）两边分离变量并积分得

$$\frac{1}{M}\frac{1}{M-p}+\frac{1}{M^2}\ln\frac{p}{M-p}=rt+c_1 \tag{5}$$

将$t=t_0$ 时， $p=p_0$ 代入得到

$$\frac{M}{M-p}+\ln\frac{p}{M-p}=rM^2(t-t_0)+\frac{M}{M-p_0}+\ln\frac{p_0}{M-p_0} \tag{6}$$

当$\alpha=3$时，方程（4）两边分离变量积分并利用条件$t=t_0$ ， $p=p_0$得

$$\frac{1}{M^3}\ln\frac{p}{M-p}+\frac{1}{2M}\frac{1}{(M-p)^2}+\frac{1}{M^2}\frac{1}{(M-p)} = r(t-t_0)+\frac{1}{M^3}\ln\frac{p_0}{M-p_0}+\frac{1}{2M}\frac{1}{(M-p_0)^2}+\frac{1}{M^2}\frac{1}{(M-p_0)} \tag{7}$$

当 $t\to\infty$ 时，由（6）或（7）均可看出 $p(t)\to M$ 。

下面讨论对增长率情况，由方程（4）两边求二阶导数得到

$$p''=rp'(M-p)^{\alpha}+rp\alpha(M-p)^{\alpha-1}(-p') = rp'(M-p)^{\alpha-1}[M-(1+\alpha)p]=0$$

于是得到

$$p=\frac{M}{1+\alpha} \tag{8}$$

上式表明当人口数量 $p(t)$ 达到 $\frac{M}{1+\alpha}$ 时，增长率 $\frac{dp}{dt}$ 达到其最大值，人口增长最快，然后再逐渐递减到零。

文[2]（p303-305）中曾利用培养物中酵母菌增长的数据来检验经典的逻辑斯蒂方程（$\alpha=1$），估计出细菌极限数量为 $M\approx 665$，此时，系数 $r\approx 0.000827$，下面图 1 给出了逻辑斯蒂方程的计算结果和酵母菌在培养物中生长实验的逻辑斯蒂曲线[2]。

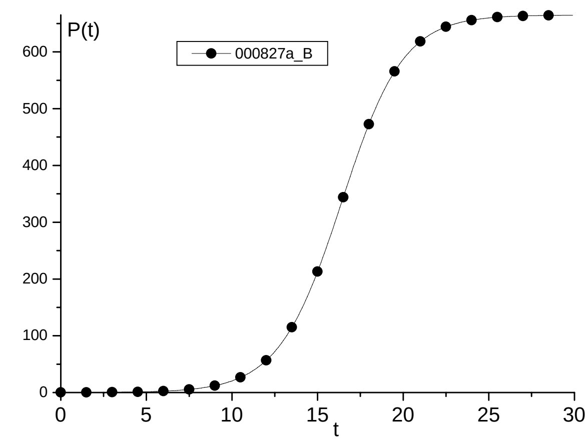

Fig.1 酵母菌在培养物中生长的逻辑斯蒂曲线

当 $p<M$ 时，为了和文[2]结果进行对比，本文利用酵母菌模型系数 $r\approx 0.000827$，对于不同的幂律指数α，数值求解微分方程（4），得到有限增长模型（4）描述的增长规律，如图 2-3 所示。

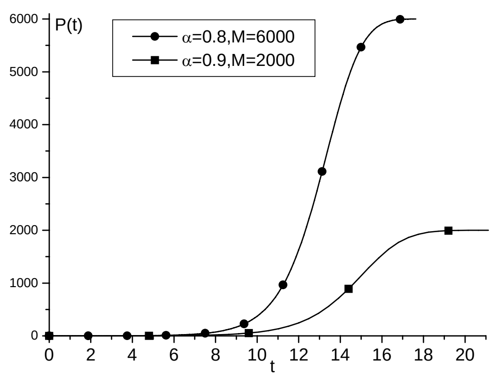

Fig.2 The profiles of P(t) for α =0.8 and 0.9, r=0.000827

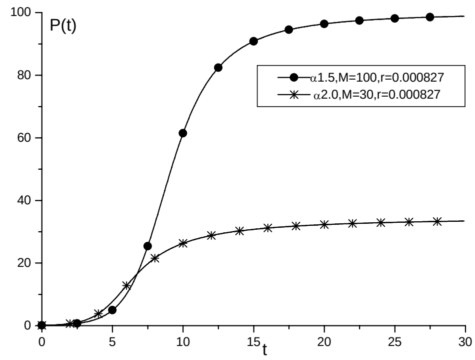

Fig.3 The profiles of P(t) for α =1.5 and 2.0, r=0.000827

由图 2-3 可以看出，幂律指数α 的值对于某特定的生物种群（如人口、酵母菌）的总数量 $p(t)$ 有着重要的影响。在同样比例因子系数 r 条件下，某特定的生物种群（如人口、酵母菌）的总数是幂律指数α 的减函数。当种群数量较大时，需要用具有较小幂律指数α 值的模型来描述，反之亦然。

3. 结论

本文将经典的逻辑斯蒂有限增长模型改进为具有幂律型增长因子的更一般形式。 对于某些特定的幂律指数α 值求出了问题的解析解，并利用数值方法对于α 的一般值给出了问题的数值解。本文研究结果表明，幂律指数α 的值对于某特定的生物种群（如人口、酵母菌）的总数量 $p(t)$ 有着重要的影响，生物种群（如人口、酵母菌）的总数是幂律指数α 的减函数。当种群数量较大时，需要用具有较小幂律指数α 值的模型来描述，反之亦然。

参考文献：

1． 于同申：发展经济学[M]，北京，中国人民大学出版社， 2002 年，第 75-96 页。

2． [美]Frank R. Giordano, Maurice D. Weir, and William P. Fox, 数学建模（A first course in mathematical modeling 原书第三板）[M], 叶其孝，姜启源等（译），北京，机械工业出版社，2005 年，第 296-308 页。

3． Levins, R. The strategy of model building in population biology [J], American scientist,1966, 54, pp.421-431

4. Verhulst, P. F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population[J], *Nouv. mém. de l'Academie Royale des Sci. et Belles-Lettres de Bruxelles*, 1845, 18, pp.1-41.

5. Verhulst, P.F. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population[J], *Mém. de l'Academie Royale des Sci., des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 1847, 20, 1-32.

6. 杨启帆：数学建模[M]，北京，高等教育出版社，2005 年， 第 50-90 页。

7. Frauenthal, James C. Introduction to population modeling[M], Lexington, Ma:Comap,1979.

The improvement model for the logistic population growth equation

Liancun Zheng[1], Yao-Zheng[2]

[1]Department of Mathematics and Mechanics, University of Science and Technology Beijing Beijing 100083, China, E-mail: liancunzheng@sina.com

[2]School of Economics, University of Renmin, Beijing 100080

Abstract. The classical logistic equation is generalized to a new model with power law exponent to the rate of growth of the population and the solutions are both analytically and numerically presented. The results indicated that the population is affected strongly by the power law exponent and the associated characteristics of growth of the population are discussed.

Keywords: logistic equation, growth of the population, differential equation.