

一类 SEIS 传染病模型在均匀网络上的研究

李常菊, 黄樟灿

武汉理工大学理学院数学系, 武汉 (4300700)

E-mail: lcjlajiao@163.com

摘要: 研究均匀网络上的一类具有潜伏期的 SEIS 传染病模型. 首先利用平均场理论得到了疾病传播的临界阈值, 分析得到该临界阈值不仅受网络中节点治愈率的影响, 另外潜伏期个体的存在也会对其产生影响. 证明了无病平衡点和地方病平衡点的全局性态完全由此临界阈值确定. 最后通过数值仿真验证了理论结果的正确性.

关键词: SEIS 模型; 均匀网络; 临界阈值; 仿真

1. 引言

自然界中存在大量复杂系统都可以通过复杂网络加以描述^[1-4], 一个典型的网络由节点和连接两个节点之间的边组成的, 其中节点用来代表真实系统中不同的个体, 边用来表示个体间的关系, 两个节点之间具有某种特定的关系则连一条边, 连边的两个节点被看作是相邻的.

在对网络展开的研究中颇为重要的工作是对网络上的动态传播进行定性和定量的研究, 这具有十分深刻的实际意义. 对于复杂网络上疾病传播动力学的研究, 我们一般将网络的节点分成有限个状态^[5]: 易感态 (S), 感染态 (I), 移除态 (R) 等, 然后用微分方程的办法来建立传播模型, 如 SI, SIS, SIR 等. 文献[6-7]研究了均匀网络以及无标度网络上 SIS 类传染病的模型的动力学行为. 文献[8]提出了带有直接免疫的 SIRS 类传染病的模型, 并对其进行了研究, 研究表明直接免疫和免疫丧失速率对传播临界值的重要影响. 文献[9]研究了复杂网络上具有感染媒介的 SIS 模型.

上述工作通常以 SIS 和 SIR 传播模型为基础, 研究疾病以及计算机病毒传播的临界阈值、静态感染密度以及动态演化规律等. 上述模型是在不考虑潜伏期情况下建立起来的, 而在现实中很多疾病和网络上的病毒具有潜伏期, 并且潜伏期对于流行病的传播有着重要的影响, 为了解决前人未解决的关于潜伏期个体的影响这一问题, 本文提出了一类 SEIS 模型.

不同的网络结构会对网络上的动力学产生不同的影响, 正确理解网络的拓扑结构和网络上的动力学行为之间的关系, 对于网络上的疾病传播控制具有重要的理论意义和现实的指导意义. 研究发现, 大量的实际网络存在小世界特征^[10-11] (如 WS 网络和 BA 无标度网络), 因此将该模型应用于均匀网络更具有实际意义.

2. 模型的建立

2.1 均匀网络及其基本性质

为了应用平均场理论对改进的 SEIS 模型进行分析, 首先对均匀网络 (如 ER 随机图和 WS 小世界网络) 给出如下三条假设^[12]:

- (1) 均匀性 (homogeneity) 假设: 均匀网络的度分布在网络平均度 $\langle k \rangle$ 处有个尖峰, 当 $k \gg \langle k \rangle$ 和 $k \ll \langle k \rangle$ 时呈指数下降, 因而假设网络中每个节点的度 k_i 都近似等于 $\langle k \rangle$.
- (2) 均匀混合 (homogeneous mixing) 假设: 感染强度和感染个体的密度 $I(t)$ 成比例.
- (3) 假设疾病发生的时间尺度远小于个体的生命周期, 从而不考虑个体的出生和自然死亡.

2.2 SEIS 模型的建立

在本文中网络中的节点分为以下几类：易感类 (S)，潜伏类 (E)，感染类 (I)。假设在时间 t 各类节点的密度分别是 $S(t), E(t), I(t)$ ， ρ_1, ρ_2 分别为处于潜伏状态和染病状态的节点的感染率， ε 表示节点从潜伏状态转化到感染状态的概率， δ 为节点的治愈率，即节点从感染状态转化为易感状态的概率。假设所有的参数为正，且各个状态之间的转化关系如下图所示：

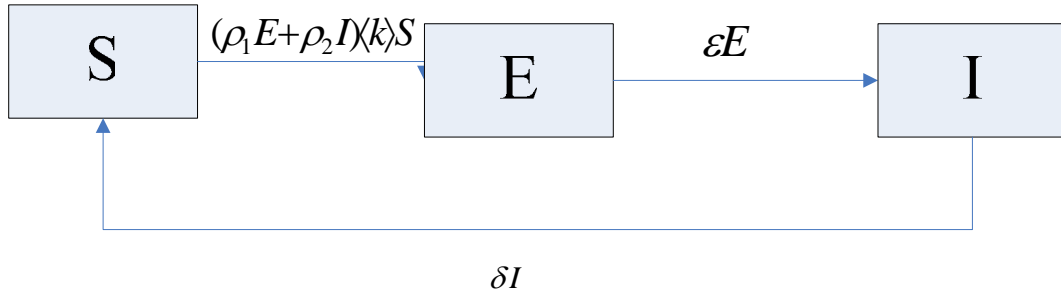


图 1 SEIS 模型各状态之间的转化关系图

根据图 1，可得到如下系统 (1)

$$\begin{cases} dS(t) = -(\rho_1 E + \rho_2 I) \langle k \rangle S(t) + \delta I(t) \\ dE(t) = (\rho_1 E + \rho_2 I) \langle k \rangle S(t) - \varepsilon E(t) \\ dI(t) = \varepsilon E(t) - \delta I(t) \end{cases} \quad (1)$$

令 $\rho = (\rho_1 E + \rho_2 I)$ ，根据归一化条件 $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = 1$ ，则系统 (1) 变形为

$$\begin{cases} dE(t) = \rho(1 - E(t) - I(t)) - \varepsilon E(t) \\ dI(t) = \varepsilon E(t) - \delta I(t) \end{cases} \quad (2)$$

系统 (2) 的正向不变集 $D = \{(E, I) / E \geq 0, I \geq 0, E + I \leq 1\}$

定理 1 系统 2 存在阈值 $H = \frac{\delta}{(\rho_1 \frac{\delta}{\varepsilon} + \rho_2) \langle k \rangle}$ ，当 $H > 1$ 时，存在无病平衡点 $E_0 = (1, 0, 0)$ ，

当 $H < 1$ 时，存在地方病平衡点 $E_+ = (\frac{\delta}{\rho} I^*, \frac{\delta}{\varepsilon} I^*, I^*)$

证明 令系统 (2) 中的各式为零，可求得

$$E = \frac{\delta}{\varepsilon} I, S = \frac{\delta}{\rho} I \quad (3)$$

将 (3) 代入归一化条件 $S(t) + E(t) + I(t) = 1$

$$\text{可求得 } I = (1 - \frac{\delta}{(\rho_1 \frac{\delta}{\varepsilon} + \rho_2) \langle k \rangle}) / (1 + \frac{\delta}{\varepsilon}) \quad (4)$$

由 (4) 可得当 $H > 1$ 时，系统在区域 D 内存在无病平衡点，当 $H < 1$ 时存在唯一的地方病平衡点。

2.2.1 无病平衡点的全局稳定性

定理 2 $H > 1$ 时无病平衡点在区域 D 是全局渐近稳定的。

证明 系统 (2) 在无病平衡点 $E_0 = (1, 0, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} \rho_1 \langle k \rangle - \varepsilon & \rho_2 \langle k \rangle \\ \varepsilon & -\delta \end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为;

$$\lambda^2 + (\varepsilon - \rho_1 \langle k \rangle + \delta) \lambda + \rho_1 \delta \langle k \rangle - \rho_2 \varepsilon \langle k \rangle + \delta \varepsilon = 0 \quad (5)$$

当 $H > 1$ 时, 易验证 $\varepsilon - \rho_1 \langle k \rangle + \delta > 0$, $-\rho_2 \varepsilon \langle k \rangle + \delta \varepsilon > 0$, 由此方程的两个特征根均具有负实部, 由 Routh-Hurwitz 判据可得当 $H > 1$ 时无病平衡点是局部渐近稳定的。

由此易得无病平衡点全局渐近稳定, 不在赘述。

2.2.2 地方病平衡点的全局稳定性

定理 3 $H < 1$ 当 $\sigma < 1$ 时地方病平衡点在区域 D 内是局部渐近稳定的

证明 系统 (2) 在无病平衡点 $E_+ = (\frac{\delta}{\rho} I^*, \frac{\delta}{\varepsilon} I^*, I^*)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} \rho_1 \langle k \rangle S - \varepsilon - \rho & \rho_2 \langle k \rangle S - \rho \\ \varepsilon & -\delta \end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为;

$$\lambda^2 + (\varepsilon - \rho_1 \langle k \rangle S + \delta + \rho) \lambda + \rho_1 \delta \langle k \rangle S - \rho_2 \varepsilon \langle k \rangle S + \delta \varepsilon + \rho \varepsilon + \delta \rho = 0$$

当

$$H < 1 \quad \varepsilon - \rho_1 \langle k \rangle S + \delta + \rho > 0, \quad \rho_1 \delta \langle k \rangle S - \rho_2 \varepsilon \langle k \rangle S + \delta \varepsilon + \rho \varepsilon + \delta \rho > 0$$

由此可得地方病平衡点是局部渐近稳定的。

2.3 解的特性分析

$$\text{模型的临界阈值 } H = \frac{\delta}{(\rho_1 \frac{\delta}{\varepsilon} + \rho_2) \langle k \rangle}$$

由上面的分析可知: 1 为 H 的临界值, 当 $H = 1$ 时有:

$$\rho_1 = \frac{\varepsilon}{\langle k \rangle} - \rho_2 \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \rho_2 = \delta \left(\frac{1}{\langle k \rangle} - \frac{\rho_1}{\varepsilon} \right)$$

结论 1. 当 ε 固定时, 临界值 ρ_1 , ρ_2 受 δ 的影响, 且 ρ_1 , ρ_2 随 δ 的增大而增大, 表明增大节点的治愈率有助于疾病的控制。

结论 2. 在 SEIS 模型中, 当 ε, δ 固定时, 整个网络中的疾病是最终消亡还是变为地方病既受 ρ_1 的影响又受 ρ_2 的影响, 并且它们的传播临界值要同时满足下面关系:

$$\left(\rho_1 \frac{1}{\varepsilon} + \rho_2 \frac{1}{\delta} \right) = \frac{1}{\langle k \rangle}$$

结论 3. 当 $\rho_1 = 0, \varepsilon = 0, \delta = 1$ 时, 而此时对应的模型恰好为标准的 SIS 模型, 计算得到

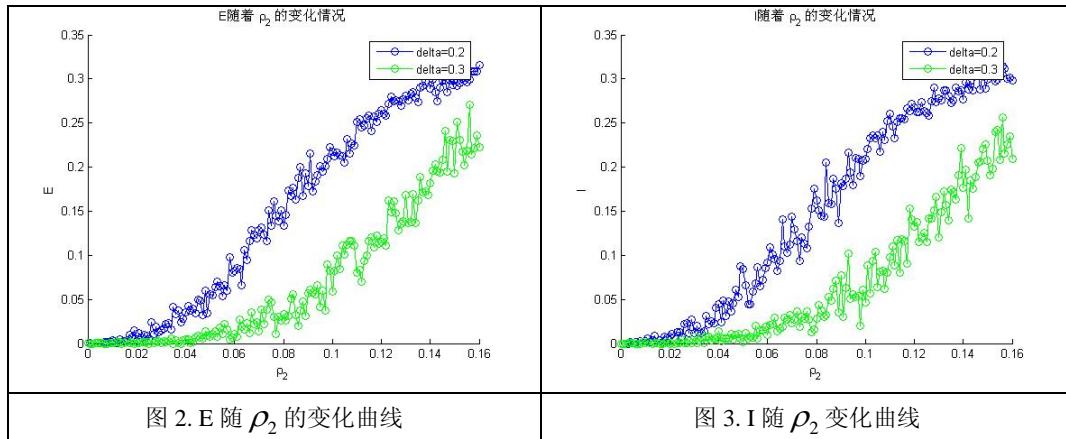
其对应的传播阈值为 $\frac{1}{\langle k \rangle}$ 与文献[6]中一样。

3. 数值仿真

为了验证上述平均场理论分析的正确性，以均匀网络模型为基础，通过大量的数值仿真，研究复杂网络上带有潜伏期的 SEIS 类传染模型的临界阈值特性。

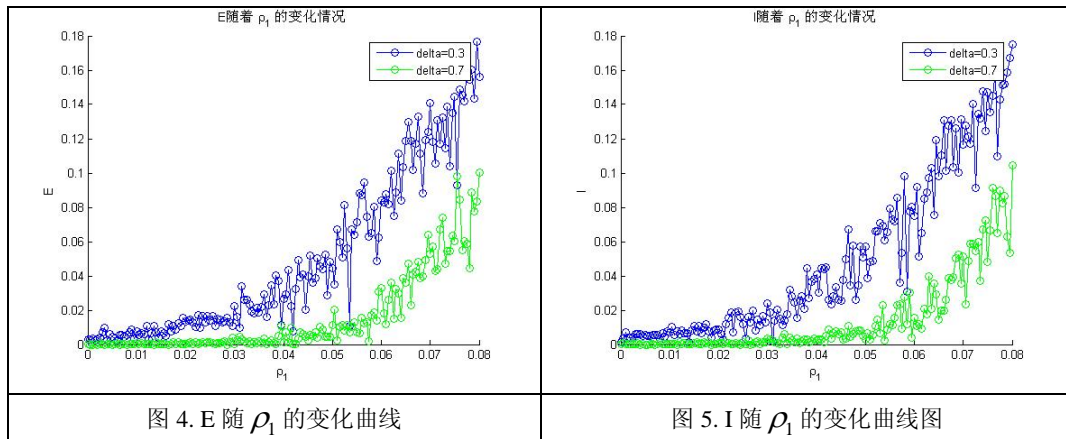
以下实验仿真假定网络规模 $N=3000$ ，平均度 $\langle k \rangle \approx 6$ ，试验中的每个数据点是 25 次网络实现的平均结果。

仿真 1. 取参数 $\varepsilon=0.2$ ， $\rho_1=0.01$ ，考虑 $\delta=0.2$ ， $\delta=0.3$ 两种情况，模拟稳态时潜伏节点、感染节点随染病节点的感染率 ρ_2 的变化曲线，仿真结果如下图所示：



通过图 2，图 3 可以看出，对不同的 δ 值，其对应的临界阈值也不同，当 δ 值增大时，；临界阈值 ρ_2 也会增大。理论计算得到当 $\delta=0.2$ $\delta=0.3$ 时阈值为 0.023， $\delta=0.3$ 时为 0.0485 由上述两图可见仿真阈值和其理论阈值拟合的较好。

仿真 2. 取参数 $\varepsilon=0.3$ ； $\rho_2=0.05$ 考虑 $\delta=0.3$ ， $\delta=0.7$ 两种情况下，感染节点、潜伏节点的密度随 ρ_1 的变化曲线，仿真结果分别如下所示：并且理论计算得到此时 ρ_2 的阈值分别为 0，0.048.其仿真结果如下所示：



4. 结论

本文提出了一类新的SEIS模型，利用平均场理论和数值仿真研究了其在均匀网络上的传播临特性。通过实验结果我们得到了模型的理论值和仿真值的阈值吻合较好，对于均匀网络，要想判断疾病的最后是都消亡，既要考虑然病期的个体还要考虑潜伏期个体的情况.增大节点的治愈率相应的阈值 ρ_1 、 ρ_2 会增大，表明地方病来临的时间将会推迟，这一结果也

和实际相符合。因此在现实中通过提高对潜伏状态的重视程度,可有效的预防和控制疾病的传播。

参考文献

- [1] Albert R, Barabási A L. Statistical mechanic of complex networks. Rev Mod Phys, 2002, 74 :47-79.
- [2] Newman M E J. The structure and function of complex networks [J]. SIAM Review, 2003, 45(2) :167-256.
- [3] Wang X F. Complex networks: Topology, dynamics and synchronization. Int J Bifurcation & Chaos,2002,12:885-916.
- [4] Evans T S. Complex Networks. arXiv: cond-mat/0405123.
- [5] Murray J D. Mathematical biology [M].Berlin: Springer-Verlag, 1993. Kephart J O , Sorkin G B. Fighting computer viruses
- [6] Pastor-Satorras R,Vespignani A.Epidemic and immunization in sale-free networks. In Handb-
- [7] ook of Graphy and Networks,Bornholdt S.,Schuster H.G.(eds.),WILE-YVCH publisher,2003.
- [8] Pastor-Satorras R,Vespignani A.Epidemic dynamics and endemic states in complex networks.
- [9] Phys.Rev.E,2001,63:066117.
- [10]张海峰,傅新楚.含有免疫作用的 SIR 传染病模型在复杂网络上的动力学行为[J],2006 全国复杂网络学术会议.
- [11]Hongjing Shi, Zhisheng Duan, Guangrong Chen. An SIS model with infective medium on complex networks [J]. Science Direct, 2008, 387, 2133-2144.
- [12]Watt s D J, Strogatz S H. Collective dynamics of mall-world networks [J]. Nature, 1998.
- [13]Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks [J]. Science, 1999.
- [14]汪小帆, 李翔 ,陈关荣.复杂网络理论及其应用[M].北京: 清华大学出版社, 2006.4.

SEIS Model's Dynamic Behavior on homogeneous Networks

Li Changju, Huang Zhangcan

School of Sciences, Wuhan University of Technology, Wuhan, China (430070)

Abstract

In this paper, a SEIS model is proposed. First, we analysis the spread of the disease using the mean field theory and solve a theoretical critical threshold. It is shown that the threshold is affected by the cured rate, at the same time by the existing of the eclipse nodes .And the global behavior of the model is entirely determined by this threshold. Then from some simulations we get the theoretical result is right.

Keywords: SEIS Model; Homogeneous networks; Critical threshold; simulations

作者简介: 李常菊, 女, 1984 年生, 硕士研究生, 主要研究方向系统控制及优化、复杂网络及微分方程方面的应用。