一类具功能性反应的食饵—捕食者两种群模型的定性分析

倪春霞，李学鹏
福建师范大学数学与计算机科学学院 ，福州（350007）
E-mail：ncx22@163.com

摘 要：本文研究了一类具功能性反应的食饵——捕食者两种群模型。利用微分方程定性理论，当给定参数满足一定条件下，讨论了该系统平衡点的稳定性态。运用 Dulac 函数法，得到了系统不存在闭轨的充分条件。运用 Poincare-Bendixson 环域定理，证明了极限环的存在性。运用张芷芬惟一性定理，证明了极限环的惟一性。

关键词：平衡点；极限环；存在惟一性
中图分类号：O175.14

1 引言

具功能性反应函数的食饵——捕食者两种群模型：

$$\begin{cases} \dot{x} = xg(x) - y\varphi(x) \\ \dot{y} = y[-d + e\varphi(x)] \end{cases}$$

其中，x, y 分别表示食饵种群与捕食者种群的密度，$g(x)$ 表示食饵种群的相对增长率，$\varphi(x)$ 为捕食者种群的捕食率，也称功能性反应函数，d 为捕食者种群的死亡率，$d, e > 0$。

文[1]研究了模型：$\dot{x} = x(a - bx^{\alpha}) - cyx^{\beta}, \dot{y} = y(-d + cex^{\beta})$；文[2]研究了模型：$\dot{x} = x(a - r_1 x) - \dfrac{cxy^{\alpha}}{1 + wx}, \dot{y} = -r_2 y - \dfrac{cxy}{1 + wx}$；文[3]研究了模型：$\dot{x} = x(a - bx^{\alpha}) - cyx^{\alpha}$，$\dot{y} = y(-d + cex^{\alpha})$ 且 α 使函数 $f(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为偶函数。以上三种模型均讨论了系统平衡点的性态，并得到了极限环的存在惟一性及系统的全局稳定性。

本文主要考虑模型：
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - bx^{\alpha}) - \dfrac{cx^{\alpha} y}{1 + wx^{\alpha}} \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-d + \dfrac{ecx^{\alpha}}{1 + wx^{\alpha}}) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a, b, c, d, e, w, \alpha > 0$ 且 α 使函数 $f(x) = x^{\frac{1}{\alpha}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为偶函数。

由生态学意义，我们仅在区域 $\bar{G} = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 进行讨论，记 $G = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$。

作时间变换 $dt = (1 + wx^{\alpha})d\tau$，这里 $1 + wx^{\alpha} > 0$，则系统（1）化为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = x(a + a_1 x^{\alpha} - a_2 x^{2\alpha}) - cx^{\alpha} y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = y(a_3 x^{\alpha} - d) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $a_1 = aw - b$，$a_2 = bw$，$a_3 = ec - wd$。

再作变换 $\bar{x}=\frac{a_3}{d}x^{\alpha}$， $\bar{y}=\frac{c\alpha a_3}{d^2}\cdot(\frac{d}{a_3})^{2-\frac{1}{\alpha}}y$， $\frac{d\bar{t}}{d}=d\tau$，则系统（2）的轨线走向不变，仍记 $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})$ 为 (x,y,t)，此时系统（2）化为：

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x(b_1+b_2x-b_3x^2)-yx^{2-\frac{1}{\alpha}}=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}=y(x-1)=Q(x,y)\end{cases}\tag{3}$$

其中 $b_1=\frac{a\alpha}{d}>0$， $b_2=\frac{a_1}{a_3}$ 不定号， $b_3=\frac{a_2d}{a_3{}^2}>0$。

2 平衡点性态

令
$$\begin{cases}P(x,y)=x(b_1+b_2x-b_3x^2)-yx^{2-\frac{1}{\alpha}}=0\\ Q(x,y)=y(x-1)=0\end{cases}$$

则有：

(1) 当 $b_1+b_2-b_3\le 0$ 时，系统(3)仅有 2 个平衡点 $O(0,0)$， $A(x_1,0)$，其中 $x_1=\frac{b_2+\sqrt{b_2{}^2+4b_1b_3}}{2b_3}$ 且满足 $b_1+b_2x_1-b_3x_1{}^2=0$；

(2) 当 $b_1+b_2-b_3>0$ 时，系统有 3 个平衡点 $O(0,0)$，$A(x_1,0)$，$B(1,y_0)$，其中 $y_0=b_1+b_2-b_3$。

引理 1（1） $O(0,0)$ 为系统（3）的鞍点；

（2）当 $b_1+b_2-b_3>0$ 时， $A(x_1,0)$ 为系统（3）的鞍点，且 $x_1>1$；

（3）当 $0<b_1+b_2-b_3<\alpha(b_1+b_3)$ 时， $B(1,y_0)$ 为系统（3）稳定的焦（结）点；

（4）当 $b_1+b_2-b_3>\alpha(b_1+b_3)$ 时， $B(1,y_0)$ 为系统（3）不稳定的焦（结）点。

证明 由系统（3）得：

$$\begin{cases}P_x=b_1+2b_2x-3b_3x^2-(2-\frac{1}{\alpha})x^{1-\frac{1}{\alpha}}y\\ P_y=-x^{2-\frac{1}{\alpha}}\\ Q_x=y\\ Q_y=x-1\end{cases}$$

令
$$\begin{cases}p(x,y)=P_x+Q_y=b_1+2b_2x-3b_3x^2-(2-\frac{1}{\alpha})x^{1-\frac{1}{\alpha}}y+x-1\\ q(x,y)=P_xQ_y-P_yQ_x=[b_1+2b_2x-3b_3x^2-(2-\frac{1}{\alpha})x^{1-\frac{1}{\alpha}}y](x-1)+x^{2-\frac{1}{\alpha}}y\end{cases}$$

（1） $q(0,0)=-b_1<0$，即 $O(0,0)$ 为系统（3）鞍点；

(2) 当 $b_1+b_2-b_3>0$ 时，令 $H(x)=b_1+b_2x-b_3x^2$，因为 $H(0)=b_1>0$，$H(1)=b_1+b_2-b_3>0$， $\lim_{x\to+\infty}H(x)=-\infty$，所以 $x_1>1$。

$$q(x_1,0)=(b_1+2b_2x_1-3b_3x_1{}^2)(x_1-1)=[2(b_1+b_2x_1-b_3x_1{}^2)-(b_1+b_3x_1{}^2)](x_1-1)=-(b_1+b_3x_1{}^2)(x_1-1)<0$$

，即 $A(x_1,0)$ 为系统（3）的鞍点；

因为 $q(1,y_0)=y_0=b_1+b_2-b_3$，

$$p(1,y_0)=b_1+2b_2-3b_3-(2-\frac{1}{\alpha})y_0=\frac{1}{\alpha}[b_1+b_2-b_3-\alpha(b_1+b_3)]$$，因此可得：

(3)当 $0<b_1+b_2-b_3<\alpha(b_1+b_3)$ 时，$p(1,y_0)<0$，$q(1,y_0)>0$，即 $B(1,y_0)$ 为系统（3）稳定的焦（结）点；

(4)当 $b_1+b_2-b_3>\alpha(b_1+b_3)$ 时，$p(1,y_0)>0$，$q(1,y_0)>0$，即 $B(1,y_0)$ 为系统（3）不稳定的焦（结）点；

引理 2 系统(3)从 $\overline{G}$ 内任意点 $P(x',y')$ 出发的解均有界。

证明 设 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 为系统（3）从点 $P(x',y')$ 出发的解，令 $\overline{x}=\max\{x',x_1\}$，作直线 $L_1=x-\overline{x}=0$，则 $\frac{dL_1}{dt}\Big|_{(3)}\le -y\overline{x}^{2-\frac{1}{\alpha}}<0$（$y>0$）；作曲线 $L_2=x+\ln y-K=0$，即 $y=e^{K-x}$，则 $\frac{dL_2}{dt}\Big|_{(3)}=(\frac{dx}{dt}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dt})\Big|_{(3)}=x(b_1+b_2x-b_3x^2)-e^{K-x}x^{2-\frac{1}{\alpha}}+x-1$。因此，当 $x\in(0,\overline{x}),K>>1$ 时，有 $\frac{dL_2}{dt}\Big|_{(3)}<0$；又 $L_3=x=0$，$L_4=y=0$ 是系统（3）的轨线，所以系统（3）从 $\overline{G}$ 内任意点 $P(x',y')$ 出发的解 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 有界。

3 闭轨的不存在性

定理 1 若 $b_1+(1+\alpha)b_2<0$，则系统（3）在 $\overline{G}$ 内无闭轨线。

证明 作 Dulac 函数：$B(x,y)=x^r y^s$，取 $r=\frac{1}{\alpha}-1$，$s=\frac{b_1}{a}-1$，则：

$$D=\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}$$

$$=x^r y^s\{b_1(r+1)-(s+1)+[(r+2)b_2+s+1]x-(r+3)b_3x^2-(2+r-\frac{1}{\alpha})x^{1-\frac{1}{\alpha}}y\}$$

$$=x^r y^s[\frac{b_1+(1+\alpha)b_2}{\alpha}x-(\frac{1}{\alpha}+2)b_3x^2-x^{1-\frac{1}{\alpha}}y]$$

于是，当 $b_1+(1+\alpha)b_2<0$，$x>0$，$y>0$ 时，$D<0$。由 Dulac 定理知：系统（3）在 $\overline{G}$ 内无闭轨线。

由引理 1、引理 2 及定理 1 易得：

定理 2 若 $0<b_1+b_2-b_3<\alpha(b_1+b_3)$ 且 $b_1+(1+\frac{1}{\alpha})b_2<0$ 时，系统（3）的平衡点 $B(1,y_0)$ 在 G 内是全局渐近稳定的。

4 极限环的存在性和惟一性

定理 3 若 $b_1+b_2-b_3>\alpha(b_1+b_3)$，则系统（3）在 $\overline{G}$ 内绕平衡点 $B(1,y_0)$ 存在惟一稳定的极限环。

证明（1）存在性

当 $b_1+b_2-b_3>\alpha(b_1+b_3)$ 时，$x_1>1$；

作直线 $L_1=x-x_1=0$，则 $\frac{dL_1}{dt}\Big|_{(3)}=-yx_1^{2-\frac{1}{\alpha}}<0$（$y>0$）；再作曲线 $L_2=x+\ln y-K=0$，

即 $y=e^{K-x}$，则 $\frac{dL_2}{dt}\Big|_{(3)}=(\frac{dx}{dt}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dt})\Big|_{(3)}=x(b_1+b_2x-b_3x^2)-e^{K-x}x^{2-\frac{1}{\alpha}}+x-1$。因此，当 $x\in(0,x_1)$，$K>>1$ 时，有 $\frac{dL_2}{dt}\Big|_{(3)}<0$；又 $L_3=x=0$，$L_4=y=0$ 是系统（3）的轨线，所以 L_1,L_2,L_3,L_4 构成 Poincare-Bendixson 环域的外境界线，且穿过边界的轨线均从外至内，又 $B(1,y_0)$ 为系统（3）不稳定的平衡点，因此 $B(1,y_0)$ 的外围至少存在一个稳定的极限环。

（2）惟一性

对系统（3）作变换 $x=u+1$，$y=y_0e^v$，$dt=(1+u)^{\frac{1}{\alpha}-2}d\tau$ 得：

$$\begin{cases}\dfrac{du}{d\tau}=-F(u)-\varphi(v)\\[2mm] \dfrac{dv}{d\tau}=g(u)\end{cases}\tag{4}$$

其中 $F(u)=-b_1(1+u)^{\frac{1}{\alpha}-1}-b_2(1+u)^{\frac{1}{\alpha}}+b_3(1+u)^{\frac{1}{\alpha}+1}+y_0$，

$\varphi(v)=y_0(e^v-1)$，$g(u)=u(1+u)^{\frac{1}{\alpha}-2}$

令 $f(u)=F'(u)=-b_1(\frac{1}{\alpha}-1)(1+u)^{\frac{1}{\alpha}-2}-\frac{b_2}{\alpha}(1+u)^{\frac{1}{\alpha}-1}+b_3(\frac{1}{\alpha}+1)(1+u)^{\frac{1}{\alpha}}$

（i）$ug(u)=u^2(1+u)^{\frac{1}{\alpha}-2}>0$（$u\neq 0$）

$$G(u)=\int_0^u g(u)du=\int_0^u u(1+u)^{\frac{1}{\alpha}-2}du=\alpha(1+u)^{\frac{1}{\alpha}}[1-\frac{1}{(1-\alpha)(1+u)}]+\frac{\alpha^2}{1-\alpha},$$

则 $G(\pm\infty)=+\infty$；

（ii）$\varphi(0)=0$，$\varphi'(v)=y_0e^v>0$ 即 $\varphi(v)$ 是严格单调递增的；

（iii）$F(0)=-b_1-b_2+b_3+y_0=0$

$$f(0)=-b_1(\frac{1}{\alpha}-1)-\frac{b_2}{\alpha}+b_3(\frac{1}{\alpha}+1)=-\frac{1}{\alpha}(b_1+b_2-b_3)+b_1+b_3<0$$

$$\frac{f(u)}{g(u)}=\frac{-b_1(\frac{1}{\alpha}-1)-\frac{b_2}{\alpha}(1+u)+b_3(\frac{1}{\alpha}+1)(1+u)^2}{u}$$

$$\frac{d}{du}[\frac{f(u)}{g(u)}]=\frac{1}{u^2}[b_1(\frac{1}{\alpha}-1)+\frac{b_2}{\alpha}-b_3(\frac{1}{\alpha}+1)+b_3(\frac{1}{\alpha}+1)u^2]$$

$$=\frac{1}{u^2}[-f(0)+b_3(\frac{1}{\alpha}+1)u^2]>0\ (u\neq 0)$$

从而由张芷芬惟一性定理可知，系统（4）在整个（u，v）平面上围绕原点至多存在一个极限环，故系统（3）在 $\bar{G}$ 内围绕正平衡点 $B(1,y_0)$ 存在惟一稳定的极限环。

参考文献

[1] 匡奕群,邱梅青.一类具功能性反应的食饵-捕食者模型的定性分析[J].生物数学学报,2007,22(4):629-633.

[2] 黄军华.一类具功能性反应的食饵-捕食者模型的稳定性[J].广西科学,2006,13(1):9-11.

[3] 颜向平,张存华.一类具功能性反应的食饵-捕食者两种群模型的稳定性[J].生物数学学报,2004,19(3):323-327.

[4] 张锦炎，冯贝叶.常微分方程几何理论与分支问题[M]．北京:北京大学出版社,2000.
[5] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,董镇喜.微分方程定性里理论[M].北京:科学出版社,2006.
[6] 陈兰荪,宋新宇，陆征一.数学生态学模型与研究方法[M].成都:四川科学技术出版社,2003.

A Qualitative Analysis of Two Species Predator-Prey Model with Functional Response

Ni Chunxia, Li Xuepeng
School of Mathmatics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou (350007)

Abstract
In this paper, a class of two species predator-prey model with funcrional response is studied. By using stability methods, when the given parameter meets certain conditions, the stability of equilibrium is discussed. The sufficient condition for inexistence of the limited ring is gor by using the method of Dulac function.The existence and uniqueness of the limit cycle are proved by applying Poincare-Bendixson Theoroem and Zhang Zhifen's Uniqueness Theoroem.

Keywords: Equilibrium; Limit cycle; Existence and uniqueness